UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

EXISTENCIA DE SOLUCIONES FUERTES PARA UNA CLASE DE ECUACIONES DE EVOLUCIÓN SEMILINEALES CON CONDICIÓN INICIAL NO LOCAL

CLAUDIO ANDRÉS LEAL JARA

Profesor Guía: Dr. Carlos Enrique Lizama Yañez.

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Chile para optar al grado de Magister en Ciencia en la Especialidad de Matemática.

Santiago, Chile
2013

EXISTENCIA DE SOLUCIONES FUERTES PARA UNA CLASE DE ECUACIONES DE EVOLUCIÓN SEMILINEALES CON CONDICIÓN INICIAL NO LOCAL

CLAUDIO ANDRÉS LEAL JARA

Este trabajo de titulación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Carlos Lizama Yáñez del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, compuesta por los doctores Verónica Poblete Oviedo de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile y Rodrigo Ponce Cubillos del Instituto de Matemáticas y Física de la Universidad de Talca.

Dra. Verónica Poblete Oviedo	**Dr. Rodrigo Ponce Cubillos**
Dr. Carlos Lizama Yáñez	**Director**

Dedicatoria

A mis padres, como un testimonio de cariño y eterno agradecimiento por mi existencia, valores morales y formación profesional. Porque sin escatimar esfuerzo alguno, han sacrificado gran parte de su vida para formarme y porque nunca podré pagar todos sus desvelos, ni aún con las riquezas más grandes del mundo. Por lo que soy y por todo el tiempo que les robé pensando en mí...

A todos los que directa e indirectamente
ayudaron a la realización de este proyecto.

A la vida.

"Lo importante en la vida
no es el triunfo sino la lucha.
Lo esencial no es haber
vencido, sino haber luchado bien."
(Barón Pierre de Coubertin)

Agradecimientos

Agradecer a todos resulta difícil, debido a que compartí buenos y agradables momentos con mucha gente a lo largo de estos dos años. Agradezco a:

A la Universidad de Santiago de Chile por haberme dado cobijo y por las lecciones que aprendí en ella, asimismo, por haberme dado su voto de confianza y por todo el apoyo otorgado a mi persona. En especial a Evelyn Aguilar López por tener una gran disposición con los estudiantes, orientándonos en todo lo que refiere al Magister.

A mis maestros, que ayudaron en mi formación profesional, por su invaluable apoyo y confianza.

A mi director de tesis, Dr. Carlos Lizama Yáñez por su paciencia, apoyo y confianza en mí como persona y en mi trabajo. Gracias por no perder la fe (y si así ha sido), gracias por recuperarla. Gracias por sus consejos personales y académicos. Gracias por escucharme y contestarme cada correo que le enviaba pidiendo su valiosa ayuda.

A mis correctores: Dra. Verónica Poblete Oviedo y Dr. Rodrigo Ponce Cubillos por sus valiosas sugerencias y observaciones. Gracias por todo su tiempo invertido en la revisión de esta tesis.

A mi familia, familiares y amigos por darme ánimos para seguir intentando y no darme por vencido jamas.

A mis compañeros y amigos de Magister: María José, Maribel, Victoria, José, Rodrigo, Carlos, Dubó, John y Vidal. Gracias por infundirme sus ánimos y compartir conmigo sus conocimientos.

¡Gracias, eternamente gracias, a todos!.

Claudio Andrés Leal Jara

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **3**

1.1. Operadores Autoadjuntos con Resolvente Compacto 3

1.2. Semigrupos 7

1.2.1. Semigrupos Analíticos. 11

1.2.2. Semigrupos Compactos. 14

1.3. Potencias Fraccionarias 15

2. Un Problema con Condiciones no Locales **19**

2.1. Solución clásica, débil y fuerte 19

2.2. Resultados principales 21

2.3. Aplicaciones 28

Introducción

En este trabajo de tesis se investigará la existencia de soluciones fuertes para una clase de ecuaciones de evolución semi lineales con condiciones iniciales no locales en un espacio de Hilbert H

$$u'(t) + Au(t) = f(t, u(t))\,, \quad t \in J \tag{1}$$

$$u(0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u(t_i), \tag{2}$$

donde $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ es un operador autoadjunto, definido positivo, $f : J \times H \longrightarrow H$ es una función que cumple algunas condiciones de regularidad, $J = [0, a]$, $a > 0$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq a$, $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. En el año 1990, Byszewski y Laksmikantham [7] investigaron condiciones iniciales no locales y, a través de su estudio, obtuvieron criterios para la existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones diferenciales con condición inicial no local. Este tipo de ecuaciones, en comparación con las condiciones iniciales usuales, tiene mejores efectos en cuanto a aplicaciones se refiere. Es por esto último que, a lo largo de este tiempo, varios autores se han dedicado a estudiar este tipo de condiciones y se han obtenido resultados en diversos problemas.

En cuanto a las aplicaciones, Deng [11] usó la condición no local 2 para describir el fenómeno de difusión de una pequeña cantidad de gas en un tubo transparente. En tal caso, esta condición permite mediciones adicionales en tiempos $t_i, i = 1, 2, \cdots, m$ la cual es más precisa que la medición en el instante $t = 0$. En [5] Byszewski señaló que si $\gamma_i \neq 0\,, i = 1, 2, \ldots, m$, entonces los resultados se pueden aplicar en cinemática para determinar la ubicación $u(t)$ de un objeto para cada instante de tiempo t del cual no sabemos las posiciones $u(0), u(t_1), \ldots, u(t_m)$, pero se tiene la condición (2). En resumen, para describir fenómenos físicos, la condición no local puede ser más útil que la condición inicial en el instante $t = 0$.

En [5] [6], Byszewski discutió la existencia de soluciones clásicas y fuertes para la ecuación de evolución

$$\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (t_0, t_0 + a] \tag{3}$$

con, ya sea, la condición no local

$$u(t_0) + g(t_1, t_2, \ldots, t_m, u(\cdot)) = u_0 \tag{4}$$

o bien

$$u(t_0) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u(t_i) = u_0 \tag{5}$$

en un espacio de Banach reflexivo X, las condiciones impuestas en [5] [6] son muy fuertes y algunas de ellas pueden no satisfacerse en algunas aplicaciones. En el artículo [8], se obtuvo la existencia de soluciones fuertes para el problema no local (1)-(2), en el contexto de un espacio de Hilbert.

En este trabajo revisamos los resultados de [8] para ver que si imponemos una condición óptima (ver condición (H1)) sobre los coeficientes γ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ nos garantiza que el problema (1)-(2) tiene soluciones en un espacio de Hilbert. Además en [8], se concluye que los resultados obtenidos son aplicados en ecuaciones parabólicas con condiciones iniciales no locales. Nuestra discusión se basará, básicamente, en la teoría de semigrupos analíticos y el teorema de punto fijo de Schauder.

Capítulo 1
Preliminares

En este capítulo se revisarán algunos conceptos y resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo. Consideraremos un espacio de Hilbert H con una norma inducida por el producto interno $(\cdot, \cdot)$. Denotamos por J, al intervalo $[0, a]$, $a > 0$, y $C(J, H)$ al espacio de Banach de todas las funciones continuas de J a H, dotado con la norma del máximo $||u||_C = \max_{t \in J} ||u(t)||$ y por $\mathcal{L}(H)$ al espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados sobre H.

1.1. Operadores Autoadjuntos con Resolvente Compacto

A continuación daremos algunas nociones fundamentales sobre teoría espectral, asumiendo que A es un operador lineal autoadjunto, definido positivo y no necesariamente acotado.

Definición 1.1.1. Sea $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un operador sobre H. Se define el *conjunto resolvente* de A como $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)$ es invertible y $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\}$, y al *espectro* de A como $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Para $\lambda \in \rho(A)$, llamaremos a $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ el *resolvente u operador resolvente* de A en λ.

El espectro de A es un concepto familiar en la teoría de Algebra Lineal en espacios de dimensión finita, pues en tal caso, éste consiste en el conjunto de los valores propios del operador A.

Definición 1.1.2. Diremos que un operador A definido en un espacio de Hilbert H tiene *resolvente compacto* si $\rho(A) \neq \emptyset$ y $R(\lambda, A)$ es un operador compacto, para cada $\lambda \in \rho(A)$.

Si $\dim H = \infty$ entonces los operadores con resolvente compacto son no acotados, pues de lo contrario para $\lambda \in \rho(A)$ entonces el operador $(\lambda I - A)$ es acotado y, al ser $R(\lambda, A)$ un operador compacto, obtenemos que el operador identidad $I = (\lambda - A)R(\lambda, A)$ es compacto lo cual contradice el hecho que $\dim H = \infty$. Para ciertos operadores, tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 1.1.3. *[12] Sea $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ un operador con $\rho(A) \neq \emptyset$ y sea $X_A = D(A)$, con la norma del gráfico, esto es: $||x||_A = ||x|| + ||Ax||$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) A tiene resolvente compacto.

ii) $i : X_A \hookrightarrow H$ es compacta.

Antes de probar el teorema, daremos algunos resultados necesarios para su demostración.

Lema 1.1.4. *Para $\lambda \in \rho(A)$ fijo, la norma $||x||_\lambda = ||(\lambda I - A)x||$ es equivalente con la norma del gráfico en $D(A)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \rho(A)$ fijo y $x \in D(A)$ arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned}
||x||_\lambda &\leq ||\lambda x|| + ||Ax|| \\
&= |\lambda|\,||x|| + ||Ax|| \\
&\leq |\lambda|\,||R(\lambda, A)||\,||x||_\lambda + ||Ax|| \\
&\leq M_\lambda |\lambda|\,||x||_\lambda + ||Ax||,
\end{aligned}$$

donde $M_\lambda := ||R(\lambda, A)||$. Así

$$C_\lambda ||x||_\lambda \leq ||Ax|| \leq ||x||_A,$$

donde $C_\lambda = (1 - M_\lambda|\lambda|)$. Análogamente,

$$\begin{aligned}
||x||_A &= ||(\lambda I - A)R(\lambda, A)x|| + ||Ax|| \\
&\leq ||R(\lambda, A)||\,||x||_\lambda + ||Ax|| \\
&\leq M_\lambda ||x||_\lambda + ||Ax|| \\
&= M_\lambda ||x||_\lambda + ||(\lambda I - (\lambda I - A))x|| \\
&\leq M_\lambda ||x||_\lambda + |\lambda|\,||x|| + ||x||_\lambda \\
&\leq (M_\lambda + 1)||x||_\lambda + |\lambda|||x||_A.
\end{aligned}$$

Así, si $|\lambda| \neq 1$, tenemos

$$||x||_A \leq K_\lambda ||x||_\lambda,$$

donde $K_\lambda = \frac{M_\lambda + 1}{1 - |\lambda|}$. Ahora si $|\lambda| = 1$, tenemos

$$||x||_A \leq K_\lambda ||x||_\lambda,$$

donde $K_\lambda = 2M_\lambda + 1$. □

Teorema 1.1.5. *[10][Teorema de la Aplicación Inversa] Sean X_1 y X_2 dos espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, biyectivo, entonces A^{-1} es acotado.*

Demostración. (Teorema 1.1.3)

i)$\Rightarrow$ ii)

Sea $\lambda \in \rho(A)$ fijo. Luego, por Lema 1.1.4 y Teorema 1.1.5, el operador $R(\lambda, A) : H \longrightarrow D(A)$ es biyectivo y con inversa continua $(\lambda I - A)$. Por lo tanto el operador $\lambda I - A$ es acotado y en consecuencia $D(A) = H$. Luego como $R(\lambda, A) : H \longrightarrow H$ es un operador compacto, se tiene que $i = R(\lambda, A)(\lambda - A)$ es compacto.

ii) $\Rightarrow$ i)

Supongamos que $i : X_A \longrightarrow H$ es compacta. Como $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador acotado para $\lambda \in \rho(A)$, tenemos que el operador $i \circ (\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A)$ es compacto. □

Para operadores no acotados en H un resultado fundamental es el teorema espectral, el cual muestra que todo operador autoadjunto con resolvente compacto se puede representar por un operador diagonal. A continuación, daremos algunas definiciones usuales de la teoría de operadores con el objetivo de demostrar el teorema espectral.

Definición 1.1.6. Un operador $A : D(A) \longrightarrow H$ con dominio $D(A)$ denso en H se dice:

i) *Autoadjunto* si $A = A^*$, donde $D(A^*) := \{x' \in H : \exists\, y' \in H, (Ax, x') = (x, y'), \forall x \in D(A)\}$;

ii) *Simétrico* si $(Ax, y) = (x, Ay)$ para todo $x, y \in D(A)$;

iii) *Definido positivo* si $\Re(Ax, x) > 0$ para todo $x \in D(A)$;

Notar que todo operador autoadjunto A es simétrico. Ahora, si $D(A) = H$ entonces el recíproco es cierto.

Proposición 1.1.7. *[2][Propiedades espectrales de operadores con resolvente compacto] Sea A un operador con resolvente compacto. Entonces*

1. $\sigma(A) = \sigma_p(A)$;
2. *$\sigma(A)$ es finito, o bien existe una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ y $\sigma(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$;*
3. *dim* $\ker(\lambda I - A) < \infty$ *para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, donde* $\ker(\lambda I - A) = \{x \in D(A) : Ax = \lambda x\}$.

Proposición 1.1.8. *Si $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un operador autoadjunto y definido positivo en H con dominio denso, entonces*

i) $(Ax, x) \in \mathbb{R}$, *para cada* $x \in H$,

ii) $\sigma(A) \subset]0, +\infty[$.

Demostración. Claramente se tiene i) debido a que $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$, para cada $x \in H$. Por otra parte, si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces $Ax = \lambda x$, para algún $x \in D(A), x \neq 0$ y así $\lambda||x||^2 = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}||x||^2$, de lo cual se tiene $(\lambda - \bar{\lambda})||x||^2 = 0$ y así $\lambda = \bar{\lambda}$. Luego $\lambda \in \mathbb{R}$ y por ser A definido positivo, se tiene que $\lambda \in \mathbb{R}^+$. □

Para demostrar el teorema espectral requerimos del siguiente resultado.

Teorema 1.1.9 (Teorema de Hilbert-Schmidt)**.** *Sea B un operador compacto y simétrico en un espacio de Hilbert H sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Entonces H tiene una base ortonormal cuyos elementos son vectores propios de B*

Demostración. La demostración se puede hallar en [18](p. 203). □

Teorema 1.1.10 (Teorema Espectral)**.** *Sea A un operador autoadjunto con resolvente compacto en un espacio de Hilbert H de dimensión infinita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Entonces existe una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de H, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $e_n \in D(A)$, $Ae_n = \lambda_n e_n$ y $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Más aún, el operador A tiene como dominio*

$$D(A) = \{x \in H : \{\lambda_n(x, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})\},$$

y es definido por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n.$$

Demostración. Como A tiene resolvente compacto, por Proposición 1.1.7 existe $\mu \in (0, \infty) \cap \rho(A)$. Luego $R(\mu, A)$ es compacto y simétrico. Por Teorema 1.1.9 existe una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de H y $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $R(\mu, A)e_n = \alpha_n e_n$. Como $R(\mu, A)$ es inyectivo se tiene que $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $e_n \in D(A)$ y $e_n = \alpha_n(\mu I - A)e_n$. De esto se sigue que $Ae_n = \lambda_n e_n$ donde $\lambda_n = \mu - \frac{1}{\alpha_n}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Sea $x \in D(A)$, entonces $(\lambda_n(x, e_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((x, Ae_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ y $Ax = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(Ax, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n$. Ahora supongamos que $x \in H$ tal que $(\lambda_n(x, e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Sean $x_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n$, $y_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \lambda_n(x, e_n)e_n$. Entonces $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$ e y_m converge cuando $m \to \infty$. Notar que $x_m \in D(A)$ y $Ax_m = y_m$. Como A es cerrado, se tiene que $x \in D(A)$. □

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1.11. *Sea A un operador autoadjunto, definido positivo con resolvente compacto en un espacio de Hilbert H de dimensión infinita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Entonces existe una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de H, $\lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_n \geq 0$ tal que $e_n \in D(A)$, $Ae_n = \lambda_n e_n$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Más aún, el operador A tiene como dominio*

$$D(A) = \{x \in H : \{\lambda_n(x, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})\},$$

y es definido por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n.$$

Note que como A es definido positivo el primer valor propio λ_1, es positivo, y por lo tanto tendremos una sucesión de valores propios reales positivos $\{\lambda_n\}$.

1.2. Semigrupos

Sea X un espacio de Banach. Definiremos ahora el concepto de semigrupo, generador infinitesimal, y después algunos tipos de semigrupos.

Definición 1.2.1. Una familia $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ se llama *semigrupo fuertemente continuo* (o C_0-*semigrupo*) si cumple las siguientes condiciones:

i) $T(0) = I$

ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todo $s, t \geq 0$.

iii) La aplicación $t \mapsto T(t)x$ es continua de $\mathbb{R}^+$ en X para cada $x \in X$.

En lo que sigue, simplemente llamaremos a $(T(t))_{t\geq 0}$ *semigrupo*, y lo entenderemos como un semigrupo fuertemente continuo. Veremos que la aplicación definida en el inciso iii) produce soluciones a ecuaciones diferenciales definidas en espacios de Banach. El concepto apropiado para ver este hecho es la siguiente definición.

Definición 1.2.2. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo sobre un espacio de Banach X y sea $D(A)$ el subespacio de X definido por

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \; existe\}.$$

y para cada $x \in D(A)$, definimos

$$Ax := \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

El operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ se llama el *generador* del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.

Lema 1.2.3. *Si A es el generador de un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X, entonces se verifica:*

i) Para $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

ii) Si $x \in D(A)$, entonces $T(t)x \in D(A)$ y $\dfrac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$ para todo $t \geq 0$.

iii) Para cada $t \geq 0$ y $x \in X$, se tiene $\displaystyle\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ y se verifican las siguientes identidades

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds,\ x \in X,$$

y

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds,\ x \in D(A).$$

iv) El operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ es un operador cerrado y densamente definido en X.

v) Existen constantes $w \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$ tal que $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$.

Demostración. i) Se sigue de la continuidad de $t \mapsto T(t)x$. Sea $G(t) := \displaystyle\int_0^t T(s)xds$, luego

$$\begin{aligned} T(t)x = G'(t)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds \end{aligned}$$

ii) Sea $x \in D(A)$, entonces se tiene que $\frac{1}{h}(T(t+h) - T(t))$ converge a $T(t)Ax$ cuando $h \to 0$. Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(h)T(t)x - T(t)x)$$

existe, de donde $T(t)x \in D(A)$ por la definición de $D(A)$, con $AT(t)x = T(t)Ax$.

iii) Para $x \in X$ y $t \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds,\end{aligned}$$

la cual converge a $T(t)x - x$ cuando $h \to 0$. Si $x \in D(A)$, entonces la función $s \mapsto T(s)\frac{T(h)x-x}{h}$ convergen uniformemente en $[0,t]$ a la función $s \mapsto T(s)Ax$ cuando $h \to 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^t T(s)xds &= \lim_{h\to 0}\int_0^t T(s)\frac{1}{h}(T(h)-I)xds \\ &= \int_0^t T(s)Axds.\end{aligned}$$

iv) Para cada $x \in X$ sea $x_h = 1/h\int_0^h T(s)xds$. Por iii), $x_h \in D(A)$ para $t > 0$ y por i) $x_h \to x$ cuando $h \to 0$. Luego $\overline{D(A)} = X$. Para probar que A es cerrado, sea $x_n \in D(A)$ tal que $x_n \to x$ y $Ax_n = y$ cuando $n \to \infty$. De iii) tenemos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \tag{1.1}$$

El integrando al lado derecho de (1.1) converges a $T(s)y$ uniformemente en intervalos acotados. Por lo tanto, haciendo $n \to \infty$ en (1.1) tenemos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds. \tag{1.2}$$

Dividiendo (1.2) por $t > 0$ y haciendo $t \to 0$, por ii), vemos que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.

v) Escojamos $m \geq 1$ tal que $||T(s)|| \leq M$ para todo $0 \leq s \leq 1$ y escribamos $t \geq 0$ como $t = s + n$ para $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq s < 1$. Entonces

$$||T(t)|| \leq ||T(s)|| \cdot ||T(1)||^n \leq M^{n+1} = Me^{n\log M} \leq Me^{\omega t}$$

donde $\omega := \log M$, para cada $t \geq 0$.

□

Ejemplos:

1. Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(X)$. Se define

$$T(t) := e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},\ t \geq 0.$$

Entonces $(T(t))_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo con generador A.

2. Sea Ω un espacio métrico localmente compacto, $q : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua con parte real acotada inferiormente, esto es, $\sup_{\omega\in\Omega} \Re q(\omega) < \infty$. Sobre el espacio de Banach $X := C_0(\Omega)$ de funciones continuas que se anulan en el infinito, se define el operador de multiplicación.

$$T(t)f := e^{tq} \cdot f,\ f \in X,\ t \geq 0.$$

Entonces $(T(t))_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en X, llamado *semigrupo de multiplicación*, y su generador es dado por el operador de multiplicación

$$Af = q \cdot f,$$

con dominio $D(A) = \{f \in X : qf \in X\}$. Un resultado análogo se tiene para los espacios $L^p(\Omega, \mu)$, $1 < p < \infty$, donde (Ω, μ) es un espacio de medida σ-finito, con $q : \Omega \to \mathbb{C}$ una función medible con parte real esencialmente acotada inferiormente.

3. Sea X uno de los siguientes espacio de Banach:

   i) $C_0(\mathbb{R})$ de todas las funciones continuas en $\mathbb{R}$ que se anulan en infinito con la norma del supremo $||\cdot||_\infty$.

   ii) $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, de todas las funciones p-integrables en $\mathbb{R}$ con la p-norma $||\cdot||_p$.

   iii) $C_{ub}(\mathbb{R})$ de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas en $\mathbb{R}$ con la norma del supremo $||\cdot||_\infty$.

   Para $f \in X$ y $t \geq 0$, llamamos a

$$(T_l(t)f)(s) := f(s+t),\ s \in \mathbb{R},$$

la traslación a la izquierda (de f por t), mientras que

$$(T_r(t)f)(s) := f(s-t),\ s \in \mathbb{R},$$

la traslación a la derecha (de f por t).

Las familias $(T_r(t))_{t\geq 0}$ y $(T_l(t))_{t\geq 0}$ son C_0-semigrupos en X con generadores

$$A_l f = f'$$
$$A_r f = f',$$

respectivamente, y sus dominios son

$$D(A_l) = D(A_r) = \{f \in X : f \text{ es diferenciable y } f' \in X\},$$

si $X = C_{ub}(\mathbb{R})$ ó $C_0(\mathbb{R})$, y

$$D(A_l) = D(A_r) = W^{1,p}(\mathbb{R}),$$

si $X = L^p(\mathbb{R})$.

4. Sea $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ un operador autoadjunto y definido positivo, definido en un espacio de Hilbert H. El operador $-A$ definido en el Teorema 1.1.10 es generador del C_0-semigrupo

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}(x, e_n)e_n,\ x \in H. \tag{1.3}$$

1.2.1. Semigrupos Analíticos.

Hasta ahora hemos considerado, semigrupos cuyo dominio es el eje real no negativo. Consideraremos ahora semigrupos cuyo dominio es algún sector del plano complejo. En lo que sigue X es un espacio de Banach.

Definición 1.2.4. Diremos que un operador A sobre un espacio de Banach X es *sectorial* si es un operador cerrado, con dominio denso en X y existen $\phi \in (0, \pi/2)$, $M \geq 1$ y $a \in \mathbb{R}$, tal que el sector

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subseteq \rho(A)$$

y se verifica

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in S_{a,\phi}$

Ejemplos:

1. Si A es un operador lineal acotado en un espacio de Banach X, entonces A es sectorial.

2. Si A es un operador auto-adjunto, densamente definido en un espacio de Banach X y si A es acotado inferiormente, entonces A es sectorial.

3. Si $Au(x) = -\Delta u(x),\ x \in \Omega$, cuando $u \in C_0^2(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$, y A es la clausura en $L^p(\Omega)$ de $-\Delta|_{C_0^2(\Omega)}$ $(1 < p < \infty)$ entonces A es sectorial si el conjunto resolvente de A se encuentra en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0\}$.

4. Sea A es un operador sectorial en X y $||A(\lambda I - A)^{-1}|| \leq C$ para $|arg\lambda| \geq \phi_0$, $|\lambda| \geq R_0$ para algunas constantes positivas R_0, C, y $\phi_0 < \pi/2$. Suponga además que B es un operador lineal con $D(A) \subset D(B)$, y verifica para todo $x \in D(A)$, $||Bx|| \leq \epsilon||Ax|| + K(\epsilon)||x||$, ϵ, K constantes positivas con $\epsilon C < 1$, entonces $A + B$ es un operador sectorial. En efecto, supongamos que $a = 0$, luego para $x \in D(A)$, $|arg\lambda| \geq \phi_0$, $|\lambda| \geq R_0$ tenemos

$$\begin{aligned} ||B(\lambda I - A)^{-1}|| &\leq \epsilon||A(\lambda I - A)^{-1}|| + K(\epsilon)||(\lambda I - A)^{-1}|| \\ &\leq \epsilon C + K(\epsilon)(1 + C)/|\lambda|, \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} ||(\lambda I - (A + B))^{-1}|| &\leq ||(\lambda I - A)^{-1}(I - B(\lambda I - A)^{-1})^{-1}|| \\ &\leq \frac{1 + C}{|\lambda|}\left(\epsilon C + \frac{K(\epsilon)(1 + C)}{|\lambda|}\right)^{-1} \\ &\leq \frac{M}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

para $|arg\lambda| \geq \phi_0$ y $|\lambda|$ suficientemente grande. Por lo tanto $A + B$ es sectorial.

Definición 1.2.5. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en X. $(T(t))_{t\geq 0}$ se dice analítico, si existe un sector del plano complejo $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < argz < \phi_2\}$ con $\phi_1 < 0 < \phi_2$ y una familia de operadores lineales continuos $T(z) : X \to X$, $z \in \mathcal{S}$, que coinciden con $T(t)$ para $t \geq 0$ y tal que

1. $z \mapsto T(z)x$ es analítica en $\mathcal{S}$, para cada $x \in X$.

2. $\lim\limits_{z\to 0, z\in\mathcal{S}} T(z)x = x$, para todo $x \in H$.

3. $T(z + w) = T(z)T(w)$, para todo $z, w \in \mathcal{S}$.

El siguiente teorema caracteriza a los semigrupos analíticos, la demostración se puede hallar en [14].

Teorema 1.2.6. *Sea A un operador lineal densamente definido. Entonces $-A$ genera un semigrupo analítico, $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, si y solo si, A es un operador sectorial en X.*

Ejemplos:

1. Sea $z \in \mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{L}(X)$ definido por

$$T(z) := e^{zA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zA)^n}{n!}.$$

   Entonces, $T(z)$ es un semigrupo analítico.

2. Consideremos el núcleo del calor

$$\mathcal{K}(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

   y definamos $\mathcal{K}_t(x) = \mathcal{K}(x,t)$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se define

$$\mathcal{T}_t f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} f(y)dy = (\mathcal{K}_t * f)(x), \mathcal{T}_0 f(x) = f(x).$$

   La familia $\{\mathcal{T}_t\}$ define un semigrupo cuyo generador infinitesimal es el operador Laplaciano Δ. A este semigrupo se le conoce como *semigrupo del calor de Dirichlet* en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$.

3. Sea A un operador autoadjunto y definido positivo. Definimos,

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}(x, e_n)e_n,\ x \in X,$$

   donde λ_n son los valores propios del operador A. Entonces $T(t)$ es un semigrupo analítico con generador $-A$ que además satisface:

$$||T(t)|| \leq e^{-\lambda_1 t}\,, \text{para todo} t \geq 0 \tag{1.4}$$

$$||AT(t)|| \leq \frac{C}{t}\,, \text{para todo} t > 0, \tag{1.5}$$

   donde λ_1 es el primer valor propio de A (ver Teorema 1.1.10).

1.2.2. Semigrupos Compactos.

Definición 1.2.7. Sea $(A, D(A))$ el generador de un C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X. Diremos que $(T(t))_{t\geq 0}$ es *compacto* para $t > t_0$, si para cada $t > t_0$, el operador $T(t)$ es compacto. El semigrupo $T(t)$ se dice *compacto* si es compacto para cada $t > 0$.

Notamos que si $T(t)$ es compacto para $t \geq 0$, entonces en particular la identidad es compacta y X es necesariamente de dimensión finita. Observar además que si para algún $t_0 > 0$, $T(t)$ es compacto, entonces también lo es $T(t)$ para cada $t \geq t_0$ pues $T(t) = T(t - t_0)T(t_0)$ y $T(t_0)$ es compacto.

Definición 1.2.8. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo. Diremos que T es *inmediatamente continuo en norma* si $T : (0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ es continua.

Teorema 1.2.9. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo. Si T es inmediatamente continuo en norma y su generador tiene resolvente compacto, entonces $T(t)$ es compacto para cada $t > 0$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \rho(A)$. Reemplazando A por $A - \lambda$, podemos asumir que A es invertible. Sea $S(t) := \displaystyle\int_0^t T(s)ds$, entonces por Lema 1.2.3 se tiene la identidad:

$$S(t) = T(t)A^{-1} - A^{-1}. \tag{1.6}$$

Ahora supongamos que A^{-1} es compacto. Entonces $S(t)$ es compacto por (1.6). Como T es inmediatamente continua en norma, deducimos que $T(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(S(t+h) - S(t))$ es compacto para todo $t \geq 0$. $\square$

Teorema 1.2.10. *[3][Voigt] Sean X e Y dos espacios de Banach, $J \subset \mathbb{R}$. Se define $S : J \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ que verifica:*

i) $S(\cdot)f \in L^1(J, Y)$*, para cada* $f \in X$*,*

ii) $S(t)$ *es compacto para cada* $t \in J$*,*

iii) $||S(t)|| \leq \kappa(t)$*,* $t \in J$*, y para algún* $k \in L^1(J, \mathbb{R})$*.*

Entonces $R : X \to Y$ definida por $Rf := \int_J S(t)f dt$, $f \in X$ es un operador compacto .

Ejemplo:

1. Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Sobre el espacio $L^p([-1,0],X)$ de todas las funciones Bochner p-integrables consideraremos el semigrupo de traslación a la izquierda $(T_0(t))_{t\geq 0}$ definido por

$$(T_0(t)f)(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma+t) & \text{si } \sigma+t \leq 0, \\ 0 & \text{si } \sigma+t > 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

   Entonces $(T_0(t))_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en $L^p([-1,0],X)$ con generador

$$A_0 f = \frac{d}{d\sigma} f,$$

   y dominio

$$D(A_0) = \{f \in W^{1,p}([-1,0];,X) : f(0) = 0\},$$

   donde $\frac{d}{d\sigma}$ denota la derivada débil en $L^p([-1,0],X)$. Más aún, este semigrupo es nilpotente, i.e., $T_0(t) = 0$ para $t \geq 1$. En particular, es continuo en norma y compacto para $t \geq 1$, pero su resolvente es compacto sí y sólo sí X es finito-dimensional. Esto es debido a que la inclusión $W^{1,p}([-1,0],X) \hookrightarrow L^p([-1,0],X)$ es compacta si y solo si X es finito-dimensional.

1.3. Potencias Fraccionarias

En esta sección, daremos algunas nociones sobre potencias fraccionarias de un operador A definido sobre un espacio de Hilbert H con norma definida mediante el producto interno. Nos concentraremos en las potencias fraccionarias de A donde $-A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico. Los resultados de esta sección serán usados en el estudio de soluciones del problema de Cauchy (1)-(2).

Definición 1.3.1. Sea A un operador sectorial en H con $\Re\sigma(A) > 0$ (i.e. $\Re\lambda > 0$, para todo $\lambda \in \sigma(A)$). Dado $\alpha > 0$, se define el operador $A^{-\alpha}$ como

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s) ds,$$

cuyo dominio es

$$D(A^{-\alpha}) := \{x \in H : \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) x dt \, \text{existe}\},$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma de Euler.

Observación 1.3.2. 1. Notamos que esta integral existe pues $-A$ genera un semigrupo exponencialmente estable (ver [13]).

2. Si A es un escalar positivo ($H = \mathbb{R}$), entonces $A^{-\alpha}$ es la $-\alpha$ potencia de A.

3. $A^{-\alpha}$ también se puede escribir como
$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda^{-\alpha} R(\lambda, A) d\lambda, \tag{1.8}$$
donde el camino Γ actúa en el conjunto resolvente de A de $\infty e^{-i\theta}$ a $\infty e^{i\theta}$, $\phi < \theta < \pi$, $0 < \phi < pi/2$ evitando el eje real negativo y el origen y $\lambda^{-\alpha}$ es tomado positivo para valores positivos de λ.

4. Cuando $0 < \alpha < 1$ se puede deformar el camino de integración Γ en los lados superior e inferior del eje real negativo y se obtiene la representación de Balakrishnan:
$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda, \tag{1.9}$$

5. Note además que cuando $\alpha = 1$, entonces A^{-1} es la inversa de A.

Con respecto a la Observación 1,3,2 parte (3), se tiene que la integral (1.8) converge en la norma de operadores para cada $\alpha > 0$ y por lo tanto define un operador acotado $A^{-\alpha}$. Si $\alpha = n$ el integrando es analítico en $S_{a,\phi}$ y se verifica que el camino de integración Γ puede ser transformado a un pequeño círculo alrededor del origen. Entonces usando el teorema del residuo se sigue que la integral es igual a $A^{-\alpha}$ y por lo tanto para valores enteros positivos de α la Definición (1.8) coincide con la clásica definición de $(A^{-1})^n$

Proposición 1.3.3. *Sean A un operador sectorial sobre un espacio de Banach X, con $\Re\sigma(A) > 0$ y $\alpha, \beta > 0$, entonces se tienen las siguientes propiedades*

i) $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$*;*

ii) $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$*;*

iii) $A^{-\alpha}$ *es inyectivo.*

Demostración. i) Claramente $A^{-\alpha}$ es lineal. Veamos que $A^{-\alpha}$ es acotada. Sea $x \in X$. Dado que el semigrupo es exponencialmente estable, tenemos:
$$\begin{aligned}||A^{-\alpha}x|| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} s^{\alpha-1}||T(s)x||ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} s^{\alpha-1}Me^{-\omega s}||x||ds \\ &\leq \frac{M\omega^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}||x||du \\ &\leq M\omega^{-\alpha}||x||.\end{aligned}$$

Por lo tanto $A^{-\alpha}$ es acotado.

ii) Dado $x \in X$, tenemos

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta}x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}T(s)T(t)xdsdt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\left(\int_t^\infty (u-t)^{\beta-1}T(u)xdu\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \left(\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}dt\right)T(u)xdu \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)xdudt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)xdu \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)xdu \\
&= A^{-(\alpha+\beta)}x.
\end{aligned}$$

iii) Dado $x \in X$, si $A^{-\alpha}x = 0$ para algún $\alpha > 0$, entonces para todo entero $n > \alpha$, $A^{-n}x = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = 0$. Pero A^{-1} es inyectiva así que $A^{-n} = (A^{-1})^n$ es inyectiva. Luego $x = 0$.

□

Proposición 1.3.4. *Sea A un operador sectorial sobre un espacio de Banach X, con $\Re\sigma(A) > 0$ y $\alpha > 0$, entonces son equivalentes*

i) El C_0-semigrupo $T(t) = e^{-tA}$ es compacto para todo $t > 0$.

ii) $A^{-\alpha}$ es compacto para todo $\alpha > 0$.

iii) A^{-1} es compacto.

Demostración. i)⇒ ii)]

Supongamos que $T(t) = e^{-tA}$ es compacto para todo $t > 0$, luego por Teorema 1.2.10 se tiene que $A^{-\alpha}$ es un operador compacto.

ii)⇒ iii)]

Como $A^{-\alpha}$ es compacto para todo $\alpha > 0$, en particular para $\alpha = 1$ se tiene lo pedido.

iii)⇒ i)]

Supongamos que A^{-1} es compacto. Sea $S(t) = T(t)A^{-1} - A^{-1}$. Claramente $S(t)$ es compacto por (1.6), luego $T(t) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(S(t+h) - S(t))$ es compacto para todo $t \geq 0$. □

Definición 1.3.5. Sean A un operador sobre X. Para $\alpha \geq 0$, se define A^α como $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$, con dominio $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$.

Note que al espacio $D(A^\alpha)$, lo podemos dotar de un producto interno $(\cdot,\cdot)_\alpha = (A^\alpha\cdot, A^\alpha\cdot)$. Además, las siguientes propiedades son válidas.

Teorema 1.3.6. *Sean A un operador sectorial sobre un espacio de Hilbert H con resolvente compacto y $\alpha > 0$, entonces se cumple que:*

i) *Si $0 \leq \alpha \leq \beta$ entonces $D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$.*

ii) *A^α es lineal.*

iii) *A^α es cerrado.*

iv) *$H_\alpha := (D(A^\alpha), (\cdot,\cdot)_\alpha)$ es un espacio de Hilbert.*

v) *Si $0 \leq \alpha < \beta$, entonces H_β es densa en H_α y la inclusión $H_\beta \hookrightarrow H_\alpha$ es compacta.*

vi) *Si A es un operador autoadjunto y definido positivo, entonces A^α también lo es.*

Demostración. Ver [14], [15]. □

Proposición 1.3.7. *Sea A un operador sectorial en H con $\Re\sigma(A) > a > 0$ y $(T(t))_{t\geq 0}$ el semigrupo generado por $-A$. Para $\alpha \geq 0$, $t \geq 0$, tenemos que $A^\alpha T(t) \in \mathcal{L}(H)$,*

$$||A^\alpha T(t)|| \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha} e^{-at}, t > 0$$

y

$$A^\alpha T(t) = T(t) A^\alpha \; en \, H_\alpha \, , t \geq 0$$

Demostración. Ver [14, 17]. □

Capítulo 2
Un Problema con Condiciones no Locales

En este capítulo se estudiarán condiciones para obtener la existencia de soluciones tanto fuertes como débiles para el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, a] \\ u(0) &= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u(t_i), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ es un operador autoadjunto, definido positivo, $f : J \times H \longrightarrow H$ es una función que cumple algunas condiciones de regularidad, $J = [0, a]$, $a > 0$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq a$, $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Este capítulo está basado en la referencia [8].

2.1. Solución clásica, débil y fuerte

Comenzaremos dando algunas nociones básicas acerca de las soluciones débiles, clásicas y fuertes del problema

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= h(t), \; t \in J \\ u(0) &= u_0 \in H. \end{aligned} \tag{2.2}$$

con $h : J \to H$, $J = [0, a]$, $a > 0$.

Definición 2.1.1. Una función $u : J \longrightarrow H$ es una *solución clásica* de (2.2) en J si $u \in C^1(J, H) \cap C(J, D(A))$, y se satisface (2.2).

Observe que si A genera un C_0-semigrupo, entonces la solución de (2.2) verifica

$$u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)h(s)ds, \; t \in J \tag{2.3}$$

Definición 2.1.2. Sean $u_0 \in H$ y $h \in L^1(J, H)$. La función $u \in C(J, H)$ dada por (2.3) es llamada una *solución débil* de (2.2) en J.

Esta definición de solución débil del problema con valores iniciales (2.2) coincide, cuando $h = 0$, con la definición de que $T(t)u_0$ sea solución de la ecuación homogénea correspondiente. Es evidente que no toda solución débil de (2.2) es una solución clásica, inclusive en el caso $h = 0$. Sin embargo para $h \in L^1(J, H)$ el problema (2.2), posee una única solución débil. Nos concentraremos en imponer condiciones adicionales a h de manera que para $u_0 \in D(A)$, la solución débil se convierte en solución clásica y así probar, bajo tales condiciones, la existencia de soluciones de (2.2) para $u_0 \in D(A)$. Se observa que la continuidad de h no es suficiente para asegurar la existencia de soluciones clásicas para (2.2) para $x \in D(A)$.

Ejemplo: Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $T(t)$ y sea $x \in X$ tal que $T(t)x \notin D(A)$ para cada $t \geq 0$. Sea $h(s) = T(s)x$. Entonces $h(s)$ es continua para $s \geq 0$. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + T(t)x \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Afirmamos que (2.4) no tiene solución clásica, a menos que $0 \in D(A)$. En efecto, la solución débil de (2.4) es

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x,$$

pero $tT(t)x$ no es diferenciable para $t > 0$ y por lo tanto no puede ser solución clásica de (2.4). Por ello requeriremos de otras condiciones en h, más que la continuidad de h, de manera que existan soluciones clásicas para el problema en cuestión.

Definición 2.1.3. Si la solución débil u de (2.2) pertenece a $W^{1,1}(J, H) \cap L^1(J, D(A))$ y satisface la ecuación (2.2) para casi todo $t \in J$, se le llama *solución fuerte* de (2.2), donde $W^{1,1}(J, H) := \{u \in L^1(J, H) : u' \in L^1(J, H)\}$.

2.2. Resultados principales

En esta sección, consideraremos el problema de evolución con condiciones no locales.

$$u'(t) + Au(t) = h(t)\,, \quad t \in J \tag{2.5}$$

$$u(0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u(t_i). \tag{2.6}$$

donde $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ es un operador autoadjunto, definido positivo, $J = [0, a]$, $a > 0$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq a$, $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. De ahora en adelante para el problema (2.5)-(2.6) vamos a suponer que $h \in C(J, H)$ y además se verifican las siguientes hipótesis:

(H0) A es autoadjunto, definido positivo y $-A$ genera un C_0-semigrupo analítico.

(H1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} |\gamma_i| < e^{\lambda_1 t_1}$, donde λ_1 es el primer valor propio de A

Por (H0), (H1) y (1.4), tenemos que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i)\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{m} |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t_i} \leq \sum_{i=1}^{m} |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t_1} < 1.$$

Luego el operador $\mathcal{B}$, dado por

$$\mathcal{B} := \left(I - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i)\right)^{-1} \tag{2.7}$$

existe, es acotado y se puede representar como

$$\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i)\right)^{n}. \tag{2.8}$$

Además,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{B}|| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left|\left(\sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i)\right)\right|\right|^{n} \\ &= \frac{1}{1 - \left|\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i)\right|\right|} \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} |\gamma_i|}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Comenzaremos con el siguiente resultado

Lema 2.2.1. *Si (H0)-(H1) se satisface, entonces el problema* (2.5)-(2.6) *tiene una única solución débil* $u \in C(J, H)$ *dada por*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t)\mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds + \int_0^t T(t-s)h(s)ds\,, \quad t \in J. \tag{2.10}$$

Más aún, $u \in W^{1,2}(J, H) \cap L^2(J, D(A))$ *y es una solución fuerte de* (2.5)-(2.6).

Demostración. Por (H0),sabemos que el problema (2.5) - (2.6) tiene una única solución débil $u \in C(J, H)$ dada por

$$u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)h(s)ds,\ t \in J. \tag{2.11}$$

En particular tenemos que

$$u(t_i) = T(t_i)u(0) + \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds\,, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.12}$$

De (2.6) y (2.11) tenemos que

$$\begin{aligned} u(0) &= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \left(T(t_i)u(0) + \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds \right) \\ &= u(0) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Como $I - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i)$ tiene inversa $\mathcal{B}$, entonces

$$u(0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds. \tag{2.13}$$

De (2.11) y (2.13), se tiene que u satisface (2.10). De manera recíproca, la función $u \in C(J, H)$ dada por (2.10) es solución débil de (2.5)-(2.6). En efecto

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{d}{dt} T(t)\mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds + \frac{d}{dt} \int_0^t T(t-s)h(s)ds \\ &= -A \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds + T(t)h(0) + \int_0^t T(t-s)h'(s)ds \\ &= -A \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds + h(t) - \int_0^t -AT(t-s)h(s)ds \\ &= -Au(t) + h(t) \end{aligned}$$

Luego, por regularidad maximal de ecuaciones de evolución lineales con operador definido positivo en un espacio de Hilbert (ver [19], Capitulo II, Teorema 3.3), si $u_0 \in H_{1/2}$, entonces la solución débil de (2.2) tiene la regularidad

$$u \in W^{1,2}(J,H) \cap L^2(J,H_1) \cap C(J,H_{1/2}), \tag{2.14}$$

donde $H_{1/2} = D(A^{1/2})$. Más aún es una solución fuerte del problema (2.1). Notemos que la función $u(t)$ definida en (2.2.1) es solución débil de (2.1) cuando $u(0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s)h(s)ds$. Sabemos que una solución débil de (2.3) es $u(t) = T(t)u(0) + v(t)$ con $v(t) = \int_0^t T(t-s)h(s)ds$. Como esta última es solución débil de (2.2) con $u(0) = 0$, entonces v tiene la regularidad (2.14). Como $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo analítico, $T(t_i)u(0) \in D(A) \subseteq H_{1/2}$. Así $u(0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t_i)u(0) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i v(t_i) \in H_{1/2}$. Usando nuevamente la regularidad (2.14), tenemos que $u \in W^{1,2}(J,H) \cap L^2(J,D(A))$, por lo tanto u es solución fuerte de (2.5)-(2.6). □

Definición 2.2.2. Para cualquier $r > 0$, definimos el siguiente subconjunto de $C(J,H)$

$$\Omega_r := \{u \in C(J,H) : ||u(t)|| \leq r, t \in J\}.$$

Notar que Ω_r es un conjunto cerrado, acotado y convexo. De la definición anterior, si agregaremos otra condición sobre $f(\cdot, u(\cdot))$, se garantiza la existencia de soluciones fuertes del problema semilineal (2.1).

(H2) Para algún $r > 0$, existe $\phi \in C(J,\mathbb{R}^+)$ tal que para todo $u \in H$ que cumpla $||u|| \leq r$, se tiene $||f(t,u)|| \leq \phi(t)$, $t \in J$

Teorema 2.2.3. *Sean A un operador autoadjunto, definido positivo sobre un espacio de Hilbert H con resolvente compacto y $f : J \times H \longrightarrow H$ una función continua. Si además se cumplen (H0),(H1) y (H2), entonces el problema* (2.1) *tiene, al menos, una solución fuerte $u \in W^{1,2}(J,H) \cap L^2(J,D(A))$.*

Demostración. Sea Q un operador sobre $C(J,H)$ definido para cada $t \in J$ como

$$Qu(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t)\mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s) f(s, u(s))ds + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s))ds. \tag{2.15}$$

Por la hipótesis (H1) y el Lema 2.2.1, encontrar una solución débil de (2.5)-(2.6) es equivalente a encontrar un punto fijo al operador Q. Para esto, utilizaremos el teorema del punto fijo de Schauder.

i) Q es continuo: En efecto, sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(J,H)$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ en $C(J,H)$. Como f es continua, se tiene que para cada $s \in J$,

$$\lim_{n\to+\infty} f(s, u_n(s)) = f(s, u(s)),$$

esto es

$$\sup_{s\in J} ||f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))|| \to 0\,, n \to \infty. \tag{2.16}$$

De (1.4) y (2.15), se tiene para todo $t \in J$

$$\begin{aligned}||Qu_n(t) - Qu(t)|| \leq & \left(\sum_{i=1}^{m} |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t_i} ||\mathcal{B}|| \int_0^{t_i} e^{-\lambda_1(t_i-s)} ds \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)ds}\right) \sup_{s\in J} ||f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))|| \\ & \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t_i}}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|} \int_0^{t_i} e^{-\lambda_1(t_i - s)}\, ds \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} ds \right) \sup_{s\in J} ||f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))||. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Como $e^{-\lambda_1 t_i} \geq e^{-\lambda_1 t_1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y $e^{-\lambda_1 t} < 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t_i}}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|} \int_0^{t_i} e^{-\lambda_1(t_i-s)} ds + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} ds = \\ &\qquad \frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t_i}(1 - e^{-\lambda_1 t_1})}{\lambda_1(1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|)} + \frac{1 - e^{-\lambda_1 t_1}}{\lambda_1} < \\ &\qquad\qquad \frac{e^{\lambda_1 t_1} + 1}{\lambda_1(1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|)}. \end{aligned}$$

Notar que este último término es positivo por (H1), y además

$$||Qu_n - Qu|| < \frac{e^{\lambda_1 t_1} + 1}{\lambda_1(1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|)} \sup_{s\in J} ||f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))||,$$

y de (2.16) se tiene que $||Qu_n - Qu|| \to 0$, cuando $n \to \infty$, es decir, Q es continuo en $C(J,H)$.

ii) Q es compacto: En efecto para $t \in J$ fijo definimos un operador $S : [0,t] \to \mathcal{L}(C(J,H),H)$ definido para cada $u \in C(J,H)$ como

$$S(s)u = T(t-s)u(s).$$

Este operador verifica:

i) $S(\cdot)u \in L^1([0,t],H)$ pues $\int_0^t ||S(s)u||ds \leq ||u|| \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}ds < \infty$.

ii) Si B es un subconjunto acotado en $C(J,H)$, definimos $B_s = \{u(s) : u \in B\}$. Al ser B_s acotado en H y $T(t-s)$ un operador compacto, tenemos que $\overline{S(s)B} = T(t-s)\overline{B_s}$ es compacto.

iii) $||S(s)|| = e^{-\lambda_1(t-s)}$ y claramente $e^{-\lambda_1(t-s)} \in L^1(J,\mathbb{R})$.

Luego por Teorema 1.2.10 tenemos que $\int_0^t T(t-s)u(s)ds$ es compacto. De la misma forma si en lugar de t ponemos $t_i, i = 1,2\ldots,m$, el resultado anterior sigue siendo válido. Por lo tanto ,el operador $\mathcal{T}$, dado por

$$\mathcal{T}u = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i T(t)\mathcal{B} \int_0^{t_i} T(t_i - s)u(s)ds + \int_0^t T(t-s)u(s)ds$$

es compacto. Además como el operador no lineal de Nemytskii $\mathcal{N}_f : C(J,H) \longrightarrow C(J,H)$ dado por $\mathcal{N}_f u(t) = f(t,u(t))$ es continuo por (2.16) y además como Ω_r es un subconjunto acotado de $C(J,H)$, por (H2) el conjunto $\{\mathcal{N}_f u : u \in \Omega_r\}$ es acotado, y así el operador no lineal de Nemytskii es acotado. Luego $Q = \mathcal{T} \circ \mathcal{N}_f$ es compacto (en el sentido de que lleva conjuntos acotados en relativamente compactos).

iii) Existe un $R > 0$ tal que $Q(\Omega_R) \subset \Omega_R$: En efecto, sea

$$R = \frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i|(1 - e^{-\lambda_1 t_1}) + 1}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|} \int_0^a \phi(s)ds.$$

Entonces, para cualquier $u \in \Omega_R$, tenemos

$$\begin{aligned} ||Qu(t)|| &\leq \sum_{i=1}^{m} |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t} ||\mathcal{B}|| \int_0^{t_i} e^{-\lambda_1(t_i - s)} ||f(s,u(s))||ds \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} ||f(s,u(s))||ds \\ &\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i|}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|} + 1 \right) \int_0^a \phi(s)ds \\ &= R. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Q(\Omega_R) \subset \Omega_R$ y así $Q : \Omega_R \longrightarrow \Omega_R$ es compacto y continuo. Luego por el teorema de punto fijo de Schauder, Q tiene al menos un punto fijo $u \in \Omega_R$. Como sabemos que u es solución débil de (2.5)-(2.6) con $h(\cdot) = f(\cdot, u(\cdot))$, por el Lema (2.2.1), tenemos que $u \in W^{1,2}(J,H) \cap L^2(J, D(A))$ es solución fuerte de (2.1). $\square$

Ahora supongamos la hipótesis:

(H3) Para algún $r > 0$, existe $\phi \in C(J, \mathbb{R}^+)$ y una función continua no decreciente $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $u \in H, ||u|| \leq r$, se tiene $||f(t,u)|| \leq \phi(t)\psi(||u||)$, $t \in J$.

La hipótesis (H3) nos permite formular el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4. *Sean A un operador autoadjunto, definido positivo sobre un espacio de Hilbert H con resolvente compacto y $f : J \times H \longrightarrow H$ una función continua. Si se cumplen (H0),(H1) y (H3), entonces el problema* (2.1) *tiene, al menos, una solución fuerte $u \in W^{1,2}(J,H) \cap L^2(J, D(A))$ siempre y cuando exista una constante R con*

$$M\psi(R) \int_0^a \phi(s)ds \leq R, \tag{2.18}$$

donde

$$M = \frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i|(1 - e^{-\lambda_1 t_1}) + 1}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|}. \tag{2.19}$$

Demostración. Del teorema anterior, sabemos que $Q : C(J,H) \to C(J,H)$ definido por (2.15) es continuo y compacto. Luego, para algún $u \in \Omega_R$, de (2.19) y la condición (H3) tenemos

$$\begin{aligned}
||Qu(t)|| &\leq \sum_{i=1}^m |\gamma_i| e^{-\lambda_1 t} ||\mathcal{B}|| \int_0^{t_i} e^{-\lambda_1(t_i - s)} ||f(s,u(s))||ds + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} ||f(s,u(s))||ds \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i|}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|} \int_0^{t_i} \phi(s)\psi(||u(s)||)ds + \int_0^t \phi(s)\psi(||u(s)||)ds \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i|}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|} \psi(R) \int_0^{t_i} \phi(s)ds + \psi(R) \int_0^t \phi(s)ds \\
&\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^m |\gamma_i|}{1 - e^{-\lambda_1 t_1} \sum_{i=1}^m |\gamma_i|} + 1 \right) \psi(R) \int_0^a \phi(s)ds \\
&= M\psi(R) \int_0^a \phi(s)ds \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Q(\Omega_R) \subset \Omega_R$. Así $Q : \Omega_R \to \Omega_R$ es un operador completamente continuo. Luego por teorema de punto fijo de Schauder, Q tiene al menos un punto fijo $u \in \Omega_R$, como sabemos que u es solución débil de (2.5)-(2.6) con $h(\cdot) = f(\cdot, u(\cdot))$, y por Lema 2.16, $u \in W^{1,2}(J, H) \cap L^2(J, D(A))$ es solución fuerte de (2.5)-(2.6). $\square$

Corolario 2.2.5. *Sean A un operador autoadjunto, definido positivo sobre un espacio de Hilbert H con resolvente compacto y $f : J \times H \to H$ una función continua. Si además se cumplen (H0),(H1) y (H3), entonces el problema* (2.1) *tiene, al menos, una solución fuerte $u \in W^{1,2}(J, H) \cap L^2(J, D(A))$ siempre y cuando*

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{\psi(r)}{r} < \frac{1}{M \int_0^a \phi(s) ds},$$

donde M está definida por (2.19).

2.3. Aplicaciones

Una aplicación de los resultados anteriores, nos permite resolver la siguiente ecuación parabólica en derivadas parciales con condición no local.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = f(x,t,u(x,t)) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, t \in J = [0,a],\ a > 0 \\ u(x,0) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u(x,t_i)\,, x \in [0,1], \end{cases} \tag{2.20}$$

donde $J = [0,a]$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq a$, $\gamma_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1,2,\ldots,m$ y $f : [0,1] \times J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$, con la norma $||\cdot||_2$. Definimos el operador A sobre en el espacio de Hilbert H por

$$Au = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\,, u \in D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

donde $H^2(0,1) = W^{2,2}(0,1)$, $H_0^1(0,1) = W_0^{1,2}(0,1)$. Se sabe de [14], [17] que A es un operador autoadjunto definido positivo sobre H y que $-A$ genera un semigrupo analítico y compacto $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Además $\sigma_p(A) = \sigma(A) = \{\lambda_n := n^2\pi^2,\ n \in \mathbb{N}\}$ y las autofunciones asociadas a estos autovalores son $v_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ los cuales están normalizados. El conjunto $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H y además se tiene

$$T(t)u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2}(u,v_n)v_n,$$

$$||T(t)|| \leq e^{-\pi^2 t}, \text{ para todo} t \geq 0.$$

Sea $f(t,u(t)) = f(\cdot,t,u(\cdot,t))$. El problema (2.20) se puede reescribir como un problema del tipo (2.1). A continuación presentaremos algunos resultados que garantizan la existencia de soluciones para el problema (2.20).

Teorema 2.3.1. *Si* $f(x,t,u(x,t)) = \dfrac{\sin(u(x,t))}{\sqrt{t}+1}\,, x \in [0,1]\,, t \in J$ *y* $\sum_{i=1}^{m} |\gamma_i| < e^{\pi^2 t_1}$, *entonces el problema* (2.20) *tiene al menos una solución fuerte* $u \in C(J, H_0^1(0,1) \cap L^2(J,H^2(0,1)) \cap W^{1,2}(J,L^2([0,1],\mathbb{R}))$.

Demostración. Sea $\phi(t) = \sqrt{t^{-1}}$, $t > 0$ usando la condición $\sum_{i=1}^{m} |\gamma_i| < e^{\pi^2 t_1}$ es fácil ver que las condiciones (H1) y (H2) se cumplen. Luego por Teorema 2.2.3, el problema (2.20) tiene al menos una solución fuerte $u \in C(J, H_0^1(0,1) \cap L^2(J,H^2(0,1)) \cap W^{1,2}(J,L^2([0,1],\mathbb{R}))$. $\square$

Antes de enunciar el segundo resultado, daremos la siguiente definición.

Definición 2.3.2. Dados $\alpha\,,\beta\in\mathbb{N}\,,\mu\in\mathbb{R}^+\,,\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\,,T>0$, se definen los espacios de Banach $C^{\mu,\mu/2}([0,T]\times\Omega)$ y $C^{\alpha+\mu,\beta+\mu/2}([0,T]\times\Omega)$, respectivamente por:

$$C^{\mu,\mu/2}([0,T]\times\Omega)=\{u\in C([0,T]\times\Omega):\sup_{t_i\in(0,T),x_i\in\Omega}\frac{|u(t_1,x_1)-u(t_2,x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu+|t_1-t_2|^{\mu/2}}<\infty\}.$$

$$C^{\alpha+\mu,\beta+\mu/2}([0,T]\times\Omega)=\{u:D_x^iu,D_t^lu\in C^{\mu,\mu/2}([0,T]\times\Omega),i\leq\alpha,l\leq\beta\}.$$

Teorema 2.3.3. *Suponga que* $\displaystyle\sum_{i=1}^m|\gamma_i|<e^{\pi^2t_1}$ *y* $f:[0,1]\times J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *es una función continua que cumple las siguientes condiciones:*

(P1) Para algún $r>0$, *existe una función* $\phi\in C(J,\mathbb{R}^+)$ *tal que para todo* $t\in J\,,x\in[0,1]\,,u\in H\,,||u||\leq r\,,|f(x,t,u(x,t))|\leq\phi(t)$,

(P2) Existe una función $c:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ *tal que*

$$|f(x,t,\xi)-f(y,s,\eta)|\leq c(r)(|x-y|^\mu+|t-s|^{\mu/2}+|\xi-\eta|),$$

para algún $r>0$, $\mu\in(0,1)\,,(y,s,\eta)\in[0,1]\times J\times[-r,r]$,

entonces el problema (2.20) *tiene al menos una solución clásica* $u\in C^{2+\mu,1+\mu/2}([0,1]\times J)$

Demostración. De la condición $\displaystyle\sum_{i=1}^m|\gamma_i|<e^{\pi^2t_1}$ y (P1), es fácil ver que las condiciones (H1) y (H2) se cumplen. Luego por teorema 2.2.3, el problema (2.20) tiene al menos una solución fuerte $u\in C(J,H_0^1(0,1))\cap L^2(J,H^2(0,1))\cap W^{1,2}(J,L^2([0,1],\mathbb{R}))$. Como f satisface la condición (P2), usando el mismo método de regularización de [1], se prueba que $u\in C^{\alpha+\mu,\beta+\mu/2}([0,1]\times J)$ es solución clásica de (2.20). □

Bibliografía

[1] H. Amann: Periodic solutions of semilinear parabolic equations. In: L. Cesari, R. Kannan, R. Weinberger (eds.) Nonlinear Analysis: A Collection of Papers in Honor of Erich H Rothe. 1 - 29. Academic Press, New York (1978).

[2] W. Arendt: Heat Kernels **Internet Seminar (2005-2006)**, `http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.020/arendt/downloads/internetseminar.pdf`.

[3] W. Arendt and A. Bukhvalov: Integral representations of resolvents and semigroups. Forum Math 6: 111 - 135. (1994).

[4] A. Bátkai and S. Piazzera: Semigroups for Delay Equations, Research Notes in Mathematics, vol 10, A.K. Peters, Ltd., Boston, Mass., 1-15 (2005).

[5] L. Byszewski: Existence and uniqueness of a classical solutions to a functional differential abstract nonlocal Cauchy problem. J. Math. Appl. Stoch. Anal. **12**, 91-97 (1999).

[6] L. Byszewski: Application of properties of the right hand sides of evolution equations to an investigation of nonlocal evolution problems. Nonlinear Anal. **33**, 413-426 (1998).

[7] L. Byszewski and V. Lakshmikantham: Theorem about the the existence and uniqueness of solutions of a nonlocal Cauchy problem in a Banach Space. Appl. Anal. **40**, 11-19 (1990).

[8] P. Chen, Y. Li and H. Fan: Existence of strong solutions for a class of semilinear evolution equations with nonlocal conditions, Advances in Differential Equations (2012) .

[9] J. Cholewa and T. Dlotko: Global Attractors in Abstract Parabolic Problems. Cambridge: University Press (2000).

[10] J. B. Conway: A Course of Functional Analysis. Springer-Verlag, New York (1990).

[11] K. Deng: Exponentially decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions. J. Math. Anal. Appl. **179**, 630-637 (1993)

[12] K. Engel and R. Nagel: One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer-Verlag, New York (1991).

[13] M. Haase: The Functional Calculus for Sectorial Operators. Operator Theory: Advances and Applications, Number 169 in Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser-Verlag, Basel, (2006).

[14] D. Henry: Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. In Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer, New York (1981).

[15] H. Komatsu: Fractional Powers of Operators. Pacific Journal of Mathematics Vol. 19, No. 2, (1966).

[16] L. Lorenzi, A. Lunardi, G. Metafune, D. Pallara, Analytic Semigroups and Reaction Diffusion Problems, **Internet Seminar (2004-2005)**, `http://www.math.unipr.it/~lunardi/LectureNotes/I-Sem2005.pdf`.

[17] A. Pazy: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin (1983).

[18] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 1, Academic Press, New York - San Francisco - London (1972).

[19] R. Teman: Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics 2nd edn. Springer, New York (1997).