UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

TRANSFORMADA DE LAPLACE
Y
ECUACIONES DE VOLTERRA

CÉSAR RENÉ FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

INDICE

RESUMEN

El siguiente trabajo aborda principalmente dos grandes temas: la transformada de Laplace y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales, y las ecuaciones integrales de Volterra. En ambos temas hay una gran cantidad de ejemplos resueltos que permiten entender mejor los métodos explicados.

En el capítulo acerca de la transformada de Laplace y posteriormente en el capítulo acerca del teorema de convolución, se ha tratado de ser bastante riguroso y completo al momento de presentar las definiciones, teoremas y sus demostraciones y ejemplos. Para los ejemplos se ha trabajado en base al libro de Ecuaciones Diferenciales de F. Simmons [7].

En el capítulo acerca de las ecuaciones de Volterra, además de mostrar diferentes métodos, se ha dado una gran cantidad de ejemplos que se complementan con una extensa lista en el Anexo C.

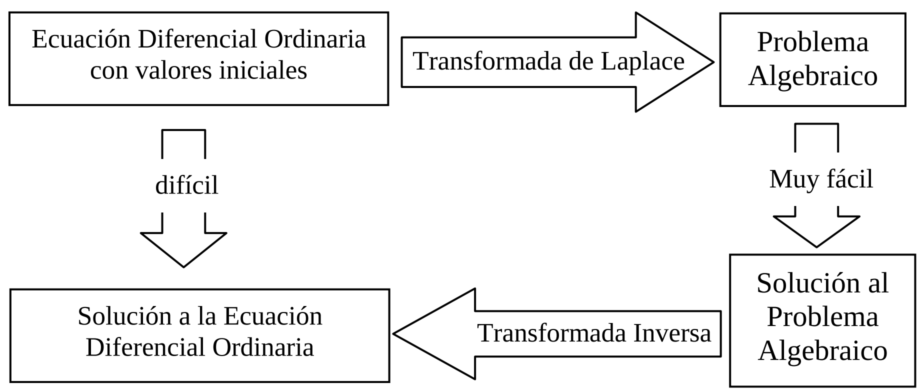
Como aplicación de interés se ha tratado en detalle el Problema Mecánico de Abel y el problema de la curva tautócrona.

Al final del texto se encuentra una sección dedicada al cálculo fraccional, para mostrar qué rumbos puede tener una posterior investigación.

INTRODUCCION

La Transformada de Laplace es un caso especial de lo que se denomina Transformación Integral. Su utilidad para resolver problemas físicos hace que sea, junto con la Transformada de Fourier, una de las herramientas más útiles para estos efectos.

En particular destaca su utilidad para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias como las que surgen al analizar, por ejemplo, circuitos electrónicos. El método de Laplace consiste en aplicar esta transformada a ecuaciones diferenciales de difícil resolución, convirtiéndolas así en problemas algebraicos simples, que pueden ser resueltos de manera sencilla. Este método se puede ilustrar con el siguiente esquema:



El objetivo del método es que modificar el problema usando la transformada de Laplace y posteriormente usar la Transformada Inversa, sea más fácil que resolver la ecuación diferencial por métodos directos. Esto resulta particularmente útil cuando las funciones involucradas no son continuas.

Para poder hacer efectivo este método se requiere de varios resultados previos.

En el Capítulo 1, junto con presentar la transformada de Laplace y utilizarla para obtener la transformada de funciones básicas, como las potencias o la función exponencial, estudiamos qué características debe tener una función para que exista su transformada.

Posteriormente, para poder utilizar la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales, estudiamos diversos teoremas relacionados con la derivada y la integral de funciones.

El capítulo 2 presenta el teorema de convolución y su aplicación al problema mecánico de Abel. Además se analiza cómo la convolución permite estudiar la respuesta de un sistema a un estímulo, en particular de sistemas masa-resorte o de circuitos eléctricos

El Capítulo 3 utiliza los capítulos anteriores para abordar el problema de las ecuaciones de Volterra de primer y segundo tipo. Finalmente mostramos cómo la convolución permite definir la integral y la derivada fraccionaria.

Capítulo 1: Transformada de Laplace

1. 1 Introducción histórica

Fig. 1. 1: Retrato de Laplace

Pierre-Simon de Laplace nació el 23 de marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge y falleció el 5 de marzo de 1827. A los 19 años viajó a Paris a estudiar matemáticas, donde rápidamente impresionó a d'Alembert, quien lo apadrinó y le consiguió trabajo de profesor de matemáticas en la École Militaire. Debido a la gran cantidad de trabajos de calidad que presentó y la variedad de temas que abordó, ya a los 24 años se le conocía como "el Newton de Francia". El matemático Anders Lexell, contemporáneo de Laplace, escribió que Laplace mismo se consideraba el mejor matemático de Francia, y que "quería opinar acerca de todo".

Entre los trabajos de Laplace destaca sobre todo su "Tratado de Mecánica Celeste", obra que publicó en cinco volúmenes entre 1799 y 1825 y que suele considerarse como la culminación de la teoría newtoniana de la gravitación.

El otro gran aporte de Laplace se encuentra en el campo de la Teoría de Probabilidades. La primera edición de la "Teoría Analítica de las Probabilidades" fue publicada en 1812 y en ella consideró las probabilidades desde todos los puntos de vista: presenta el método de los mínimos cuadrados, el problema de la aguja de Bufón, aplicaciones a la mortalidad, expectativa de vida y a problemas legales; incluye también aplicaciones para determinar la masa de Júpiter, Saturno y Urano, métodos de triangulación y un método para determinar el meridiano de Francia. Y contiene lo que hoy conocemos como la Transformada de Laplace.

La transformada de Laplace aparece por primera vez en el trabajo de Euler de 1769, "Institutiones Calculi Integralis", al resolver la ecuación:

$$Ly'' + My' + Ny = U \ .$$

Sin embargo, quizás por la frecuencia con que Laplace la usó y por la profundidad de los resultados que logró, la transformada lleva su nombre.

Fig. 1. 2: Retrato de Euler

Durante el siglo XIX se le conocía con el nombre "Método de Laplace" y aunque hubo muchos matemáticos que contribuyeron a la teoría, fue Poincaré quien desarrolla de nuevo la transformada de Laplace. Sin embargo, la transformada de Laplace como la conocemos hoy, se debe al trabajo de Gustav Doetsch de 1937.

1. 2 Definición y ejemplos básicos

Definición 1. 2. 1:

Sean $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{C}$. La **Transformada de Laplace de f en p** se define como:

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right](p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx,$$

siempre que la integral exista.

$\mathcal{L}$ se denomina **Operador de la Transformada de Laplace**.

La transformada de Laplace se puede denotar de varias maneras:

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right](p) = F(p) = \widehat{f}(p).$$

A partir de la definición se puede demostrar una de las propiedades básicas más importantes de la transformada de Laplace:

Teorema 1. 2. 2: La Transformada de Laplace es una transformación lineal.

Demostración:

(i) $\mathcal{L}\left[f(x)+g(x)\right](p) = \int_0^\infty e^{-px}\left(f(x)+g(x)\right)dx$

$$= \int_0^\infty e^{-px} f(x) + e^{-px} g(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx + \int_0^\infty e^{-px} g(x)\,dx = \mathcal{L}\left[f(x)\right](p) + \mathcal{L}\left[g(x)\right](p)$$

(ii) $\mathcal{L}\left[k \cdot f(x)\right](p) = \int_0^\infty e^{-px}\left(k \cdot f(x)\right)dx = k\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx = k\mathcal{L}\left[f(x)\right](p).$ ♦

Ejemplo 1. 2. 3: Demostrar que la transformada de Laplace para $f_n(x) = x^n$ es:

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ , con } n = 0, 1, 2, ...$$

Solución: (Inducción sobre n)

Caso $n = 0$:

En este caso: $f(x) = 1$.

Aplicamos la definición a esta función para obtener:

$$F_0(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p} e^{-px} \Big|_0^b \right) = \frac{1}{p} .$$

Por lo tanto, se cumple la fórmula.

Caso $n = k$:

Supondremos válido para $n = k - 1$, es decir, la hipótesis de inducción es:

$$F_{k-1}(p) = \frac{(k-1)!}{p^k} .$$

Aplicamos la definición, y obtenemos: $F_k(p) = \int_0^{\infty} x^k e^{-px}\, dx$.

Integramos por partes:

$$F_k(p) = \int_0^{\infty} x^k e^{-px}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^k}{p} e^{-px} \Big|_0^b \right) + \frac{k}{p}\int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-px}\, dx = \frac{k}{p} F_{k-1}(p) .$$

Usamos la hipótesis de inducción y queda:

$$F_k(p) = \frac{k}{p} F_{k-1}(p) = \frac{k}{p}\frac{(k-1)!}{p^k} = \frac{k!}{p^{k+1}} .$$

Así queda demostrada la fórmula.

Nota: Hemos usado el hecho que $\lim_{b\to\infty} e^{-pb} = 0$. Sin embargo, esto sólo es válido si "$Re(-p)$" es negativo, o equivalentemente, si $Re(p) > 0$.

Ejemplo 1. 2. 4: Hallar la Transformada de Laplace para: $f(x) = e^{ax}$.

Solución:

Aplicamos la definición directamente, y queda:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{ax} \cdot e^{-px}\, dx = \int_0^\infty e^{(a-p)x}\, dx = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p-a}.$$

Notas:

1. En vez de escribir: $\lim\limits_{b\to\infty} (\ )\Big|_0^b$, hemos usado la notación: $(\ )\Big|_0^\infty$. Esta notación se utilizará de ahora en adelante.

2. Al evaluar la integral, estamos asumiendo que $e^{(a-p)\cdot\infty} = 0$, lo cual solamente es cierto si: $\mathrm{Re}(a-p) < 0$. Es decir, la transformada de Laplace tiene sentido si *Re(p) > a*.

Ejemplo 1. 2. 5: Hallar la transformada de Laplace para: $f(x) = \sin ax$.

Solución:

Aplicamos la definición: $F(p) = \int_0^\infty \sin ax \cdot e^{-px}\, dx$.

Integramos por partes, y llegamos a:

$$F(p) = -\frac{\sin ax \cdot e^{-px}}{p}\Big|_0^\infty + \frac{a}{p}\int_0^\infty \cos ax \cdot e^{-px}\, dx = \frac{a}{p}\int_0^\infty \cos ax \cdot e^{-px}\, dx.$$

Volvemos a integrar por partes, y obtenemos:

$$F(p) = \frac{a}{p}\left[-\frac{\cos ax \cdot e^{-px}}{p}\Big|_0^\infty - \frac{a}{p}\int_0^\infty \sin ax \cdot e^{-px}\, dx \right] = \frac{a}{p}\left[\frac{1}{p} - \frac{a}{p} F(p) \right].$$

Hemos llegado a una ecuación con variable *F(p)*:

$$F(p) = \frac{a^2}{p^2} - \frac{a^2}{p^2} F(p).$$

Despejamos *F(p)* y obtenemos la Transformada de Laplace para la función seno:

$$F(p) = \frac{a^2}{a^2 + p^2}.$$

Nota: Nuevamente hemos usado el hecho que $\lim_{b \to \infty} e^{-pb} = 0$, lo que implica *Re(p) >0*.

Ejemplo 1. 2. 6: Hallar la Transformada de Laplace para: $f(x) = \cos ax$.

Solución:

Usando la definición llegamos a la siguiente integral, muy similar a la del ejemplo

anterior:
$$F(p) = \int_0^\infty \cos ax \cdot e^{-px}\, dx.$$

Si integramos por partes y evaluamos, llegaremos a:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{a}{p} F^*(p),$$

en donde $F^*(p)$ es la Transformada de Laplace hallada en el ejemplo anterior.

Reemplazamos dicha transformada y obtenemos:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} - \frac{a}{p} \cdot \frac{a}{a^2 + p^2} \\ &= \frac{1}{p}\left(\frac{a^2 + p^2 - a^2}{a^2 + p^2} \right) \\ &= \frac{p}{a^2 + p^2}. \end{aligned}$$

Nota: Nuevamente, esto es válido sólo si: *Re(p) >0*.

Existe otra forma de obtener estos dos últimos resultados, usando números complejos:

Ejemplo 1. 2. 7:

Sabemos que $\mathcal{L}\left[e^{ax}\right](p)=\dfrac{1}{p-a}$.

Usando este resultado, obtenemos que: $\mathcal{L}\left[e^{iax}\right](p)=\dfrac{1}{p-ai}$.

Racionalizamos, y queda:

$$(*) \qquad \mathcal{L}\left[e^{iax}\right](p)=\frac{p+ai}{p^2+a^2}=\frac{p}{p^2+a^2}+i\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Pero por otro lado:

$$(**) \qquad \mathcal{L}\left[e^{iax}\right](p)=\mathcal{L}[\cos ax+i\sin ax](p)=\mathcal{L}[\cos ax](p)+i\mathcal{L}[\sin ax](p).$$

Igualando las partes reales y complejas de (*) y (**), obtenemos las fórmulas de los ejemplos 1. 2. 5. y 1. 2. 6. Esta forma de llegar a las transformadas de seno y coseno, muestra la utilidad de trabajar con números complejos.

Nota: Abusando del lenguaje, a partir de ahora muchas veces anotaremos $\mathcal{L}[f(x)]$, en vez de $\mathcal{L}[f(x)](p)$, si no hay confusión posible.

Ejemplo 1. 2. 8: Hallar la transformada de Laplace para: $f(x)=\sinh ax$.

Solución: Recordemos primero que: $\sinh ax=\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$, lo que implica que:

$$\mathcal{L}[\sinh ax]=\mathcal{L}\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right].$$

Sabemos que la transformada de Laplace es lineal, por lo que podemos escribir:

$$\mathcal{L}[\sinh ax] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{ax}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-ax}\right].$$

Ahora usamos el hecho que $\mathcal{L}\left[e^{ax}\right] = \dfrac{1}{p-a}$, para obtener:

$$\mathcal{L}[\sinh ax] = \frac{1}{2}\frac{1}{p-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+a} \qquad (\operatorname{Re}(p) > a \;\; y \;\; \operatorname{Re}(p) > -a).$$

Finalmente sumamos las fracciones y queda:

$$\mathcal{L}[\sinh ax] = \frac{a}{p^2 - a^2} \qquad \left(\operatorname{Re}(p) > |a|\right).$$

Ejemplo 1. 2. 9: Hallar la Transformada de Laplace para: $f(x) = \cosh ax$.

Solución:

Recordemos primero que: $\cosh ax = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$.

Usamos la linealidad de la Transformada de Laplace y la fórmula $\mathcal{L}\left[e^{ax}\right] = \dfrac{1}{p-a}$ y

queda: $\mathcal{L}[\cosh ax] = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{ax}\right] + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-ax}\right] = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p+a} = \dfrac{p}{p^2 - a^2} \;\; \left(\operatorname{Re}(p) > |a|\right).$

1. 3 Condiciones para la existencia de la Transformada de Laplace.

La transformada de Laplace $\mathcal{L}\left[f(x)\right](p)=\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx$ es una integral impropia y por lo tanto puede converger como diverger. Cabe entonces preguntarse, ¿qué características debe cumplir una función *f(x)*, para que admita efectivamente una transformada de Laplace?

Para responder a esta pregunta, observemos en primer lugar que la definición de la transformada de Laplace, escrita en forma de límite, es: $\mathcal{L}\left[f(x)\right](p)=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-px}f(x)\,dx$.

Por lo tanto un primer requisito para que la transformada de Laplace exista es que $\int_0^b e^{-px}f(x)\,dx$ exista y para eso *f(x)* debe ser continua o continua por tramos en el intervalo $\left[0,\infty\right[$.

En segundo lugar, para que la integral $\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx$ converja, es necesario que el integrando “tienda a 0” lo suficientemente rápido, a medida que $x\to\infty$. La siguiente definición nos permitirá establecer un criterio para poder lograr ese objetivo.

Definición 1. 3. 1:

Una función *f(x)* se dice de **orden exponencial**, si existen constantes $M, c > 0$ tales que: $$\left| f\left(x\right) \right| \le M \cdot e^{cx} \ \ \forall x > 0 .$$

Esto significa que una función es de orden exponencial, si existe alguna función exponencial que la acote. Ejemplos de funciones de orden exponencial son las funciones constantes, los polinomios y, por supuesto, las funciones exponenciales.

Veremos ahora que ser de orden exponencial es una condición suficiente para que la transformada de Laplace converja.

Teorema 1. 3. 2:

Si *f* es de orden exponencial, entonces $F\left(p\right) = \mathcal{L}\left[f(x) \right]\left(p\right) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$

converge absolutamente para *Re*(*p)>c*. Además: $\lim_{\mathrm{Re}(p)\to\infty} F\left(p\right) = 0$

Demostración:

En primer lugar, $\int_0^\infty \left| e^{-px} f(x) \right| dx = \int_0^\infty e^{-px} \cdot \left| f(x) \right| dx \le \int_0^\infty e^{-px} \cdot M e^{cx}\, dx = M \int_0^\infty e^{(c-p)x}\, dx$.

Sabemos que la última integral converge para *Re*(*p)>c*, y se puede calcular fácilmente que su valor es $\frac{1}{p-c}$ (ver ejemplo 1. 2. 4).

Usando el criterio de comparación concluimos que $\int_0^\infty \left| e^{-px} f(x) \right| dx$ también converge, lo cual, a su vez significa que *F(p)* converge absolutamente para *Re*(*p)>c*.

Aún más: $\left|F(p)\right| = \left|\int_0^{\infty} e^{-px} f(x)\,dx\right| \le \dfrac{M}{\operatorname{Re}(p) - c}$

Concluimos que $\left|F(p)\right| \to 0$, cuando $\operatorname{Re}(p) \to \infty$, de manera que: $\lim\limits_{\operatorname{Re}(p)\to\infty} F(p) = 0$ ♦

Aunque esta demostración se basa en el hecho de estar trabajando con funciones continuas (aunque sea por tramos) y de orden exponencial, se puede demostrar que ninguna de estas características es necesaria. El hecho que: $\lim\limits_{\operatorname{Re}(p)\to\infty} F(p) = 0$ es válido siempre que *F(p)* exista. Esto nos lleva al siguiente corolario:

Corolario 1. 3. 3:

Si $\lim\limits_{\operatorname{Re}(p)\to\infty} F(p) \ne 0$, entonces F(p) **no puede** ser la transformada de Laplace de **ninguna** función.

Resumiendo todo lo dicho, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 1. 3. 4: Si *f* es una función continua o continua por tramos en el intervalo $[0, \infty[$ y si es de orden exponencial, entonces existe la transformada de Laplace para *f(x)*.

Nótese que el teorema no es un “si y sólo si”, sólo un “si ..., entonces ...”. Esto significa que una función puede tener transformada de Laplace, aún cuando no cumpla los requisitos de continuidad o de orden exponencial, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. 3. 5: Demostrar que $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ no cumple las condiciones del teorema 1. 3. 4, pero que aún así existe su transformada de Laplace.

Solución:

f(x) tiene una discontinuidad infinita en *x = 0*, lo que implica que no es continua ni continua por tramos en el intervalo $[0,\infty[$. Es decir, no cumple las condiciones del teorema 1. 3. 4.

Para hallar su transformada de Laplace, aplicamos la definición:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx\, .$$

Hacemos el cambio de variable: *px = t*, y obtenemos:

$$F(p) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-t} \cdot \left(\frac{t}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{p}}\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\, dt\, .$$

Hacemos otro cambio de variable: $s = t^{\frac{1}{2}}$ y queda:

$$F(p) = \frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \frac{2}{\sqrt{p}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, .$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}\left[x^{-\frac{1}{2}}\right](p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, .$

El valor de la última integral se demostrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. 3. 6: Demostrar que: $I = \int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, .$

Solución:

Primero calcularemos el valor de I^2:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx\, dy\, .$$

Cambiamos a coordenadas polares y queda:

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr\ d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \left. \frac{e^{-r^2}}{-2} \right|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Sacamos raíz y llegamos al resultado: $I = \int_0^{\infty} e^{-s^2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En los siguientes ejemplos, calcularemos las transformadas de Laplace para algunas funciones que tendrán utilidad más adelante.

Ejemplo 1. 3. 7: Hallar la transformada de Laplace para: $f(x) = u(x-a)$,

donde *a >0* y *u(x)* es la **función paso** o **función escalón**: $u(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

Solución:

Si usamos la definición de *u(x)*, resulta que: $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ 1 & si\ x \geq a \end{cases}$.

Aplicamos la definición de la transformada de Laplace a esta función y queda:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px}\, dx = \int_a^{\infty} e^{-px}\, dx = \left. \frac{e^{-px}}{-p} \right|_a^{\infty} = \frac{e^{-pa}}{p}.$$

La figura 1.3 muestra la función *f(x)*.

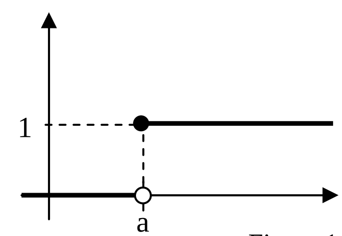


Figura 1.3

Ejemplo 1. 3. 8: Hallar la Transformada de Laplace para la función parte entera: $f(x) = [x]$.

Solución:

La figura 1.4 muestra la función *f(x)*.

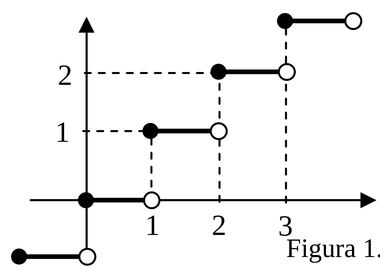


Figura 1.4

Aplicamos la definición de la Transformada de Laplace a esta función y queda:

$$F(p)=\int_0^{\infty}[x]\cdot e^{-px}\,dx=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_i^{i+1}[x]e^{-px}\,dx\right).$$

Sin embargo, en el intervalo $[i,i+1[$ se cumple: $[x]=i$, por lo que la transformada de Laplace queda:

$$F(p)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_i^{i+1}i\cdot e^{-px}\,dx\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot\int_i^{i+1}e^{-px}\,dx\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(i\cdot\left.\frac{e^{-px}}{-p}\right|_i^{i+1}\right)=\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\left(e^{-pi}-e^{-p(i+1)}\right).$$

La serie que resulta es una especie de "serie telescópica". Calculando algunos términos es posible darse cuenta que:

$$F(p)=\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{\infty}e^{-pi}=\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{\infty}\left(e^{-p}\right)^i .$$

Esta serie, finalmente, es una serie geométrica de razón $r=e^{-p}$, por lo tanto:

$$F(p)=\frac{1}{p}\cdot\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}=\frac{1}{p\left(e^{p}-1\right)} .$$

Ejemplo 1. 3. 9: Hallar la transformada de Laplace para la función parte decimal (también conocida como "función diente de sierra"): $f(x)=x-[x]$.

Solución:

La figura 1.5 muestra la función *f(x)*.

En este caso usaremos los resultados que ya conocemos y la linealidad de la Transformada de Laplace:

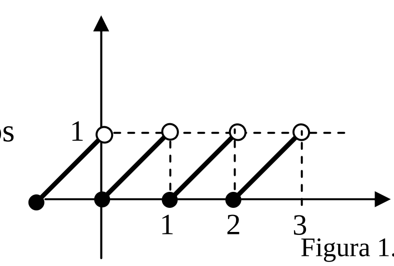


Figura 1.5

$$\mathcal{L}[f(x)]=\mathcal{L}[x]-\mathcal{L}[[x]]=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p\left(e^{p}-1\right)}=\frac{e^{p}-1-p}{p^2\left(e^{p}-1\right)} .$$

Ejemplo 1. 3. 10: Hallar la transformada de Laplace para:

$$f(x)=\begin{cases} sen\,x & si\ 0\le x\le \pi \\ 0 & si\ \ x>\pi \end{cases}.$$

Solución:

La figura 1.6 muestra la función *f(x)*, que puede considerarse como un "pulso".

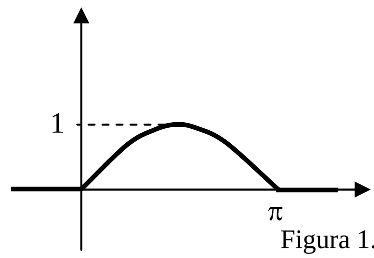


Figura 1.6

Aplicamos la definición de la transformada de Laplace a esta función y queda: $F\left(p\right)=\int_0^{\pi} sen\,x\cdot e^{-px}\,dx$.

Usamos integración por partes dos veces, para llegar a la ecuación:

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p}\left[\frac{e^{-p\pi}}{p}+\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p^2}F\left(p\right)$$

Finalmente despejamos F(p) para obtener: $F\left(p\right)=\dfrac{e^{-p\pi}+1}{p^2+1}$.

A continuación, veremos dos ejemplos de funciones básicas, que, sin embargo no tienen transformadas de Laplace.

Ejemplo 1. 3. 11: Probar que $\mathcal{L}\left[e^{x^2}\right]$ no existe.

Solución:

Si aplicamos la definición de la Transformada de Laplace, llegamos a:

$$\mathcal{L}\left[e^{x^2}\right]=\int_0^{\infty} e^{-px}\cdot e^{x^2}\,dx=\int_0^{\infty} e^{x^2-px}\,dx\ .$$

Completamos cuadrado de binomio en el exponente:

$$\mathcal{L}\left[e^{x^2}\right]=\int_0^\infty e^{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}}\,dx\ .$$

Ahora hacemos el cambio de variable: $u=x-\dfrac{p}{2}$ $\left(p\in\mathbb{R}\right)$, lo que nos conduce a:

$$\mathcal{L}\left[e^{x^2}\right]=\int_{-\frac{p}{2}}^\infty e^{u^2-\frac{p^2}{4}}\,du\ .$$

Pero si $u\geq-\dfrac{p}{2}$, entonces: $u^2-\dfrac{p^2}{4}\geq 1$ y, en consecuencia: $e\leq e^{u^2-\frac{p^2}{4}}$.

Y como $\displaystyle\int_{-\frac{p}{2}}^\infty e\,du$ diverge, por el criterio de comparación también lo hace $\displaystyle\int_{-\frac{p}{2}}^\infty e^{u^2-\frac{p^2}{4}}\,du$

En consecuencia, no existe la transformada de Laplace.

Ejemplo 1. 3. 12: Probar que $L\left[x^{-1}\right]$ no existe.

Solución:

Si aplicamos la definición de la Transformada de Laplace, llegamos a:

$$\mathcal{L}\left[x^{-1}\right]=\int_0^\infty\frac{e^{-px}}{x}dx=\underbrace{\int_0^1\frac{e^{-px}}{x}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^\infty\frac{e^{-px}}{x}dx}_{I_2}$$

La integral I_2 converge, ya que:

Si $x\geq 1$, entonces $\dfrac{1}{x}\leq 1$, lo cual a su vez implica que: $\dfrac{e^{-px}}{x}\leq e^{-px}$,

y como $\displaystyle\int_1^\infty e^{-px}\,dx$ converge, también lo hace I_2 (por el criterio de comparación).

Sin embargo, I_1 diverge, ya que:

Si $x \in [0,1]$, entonces: $e^{-px} \geq e^{-p}$,

y por lo tanto: $\dfrac{e^{-px}}{x} \geq \dfrac{e^{-p}}{x}$.

Pero: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-p}}{x}dx = e^{-p}\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, y esta última integral diverge.

Luego, por el criterio de comparación, I_1 diverge.

En consecuencia: $L\left[x^{-1}\right]$ no existe.

Finalizaremos esta sección con un ejemplo que utilizaremos en la sección 2.4.

Ejemplo 1. 3. 13: Sea $\varepsilon > 0$ y $f_\varepsilon(x)$ la función definida por: $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & si\ 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & si\ x > \varepsilon \end{cases}$.

Probar que: $\mathcal{L}\left[f_\varepsilon(x)\right] = \dfrac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$ y que: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}\left[f_\varepsilon(x)\right] = 1$

Solución:

La figura 1.7 muestra la función $f_\varepsilon(x)$.

Aplicamos la definición de la transformada de Laplace

a esta función obtenemos el primer resultado:

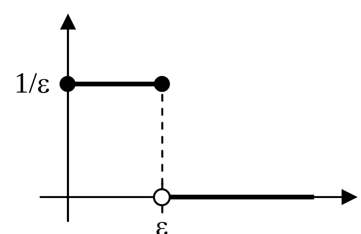


Figura 1.7

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \cdot f_\varepsilon(x)dx = \int_0^\varepsilon \frac{e^{-px}}{\varepsilon}dx = -\frac{e^{-px}}{p\varepsilon}\Bigg|_0^\varepsilon = \frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}.$$

Usando la regla de L'Hôpital, obtenemos la segundo expresión:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}\left[f_\varepsilon(x)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{pe^{-p\varepsilon}}{p} = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-p\varepsilon} = 1.$$

1. 4 Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales: Transformadas de Laplace para derivadas de una función.

Ahora que ya conocemos la transformada de Laplace para las funciones más relevantes (para una lista más completa, remítase al Anexo A o [6]), veremos la aplicación más directa de esta transformada: la resolución de ecuaciones diferenciales. Para eso, es necesario primero saber cómo calcular la transformada de Laplace de la derivada de una función. Es lo que estudiaremos en los siguientes teoremas.

Teorema 1. 4. 1:

Si *f* una función de orden exponencial y diferenciable para $x > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = p\mathcal{L}\left[f(x)\right] - f(0). \qquad \textbf{(1. 4. 2)}$$

Demostración:

Primero aplicamos la definición de la Transformada de Laplace y obtenemos:

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = \int_0^\infty e^{-px} \cdot f'(x)\,dx .$$

Integramos por partes para llegar a:

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = f(x) \cdot e^{-px}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} \cdot f(x)\,dx \qquad (*)$$

Para evaluar la primera expresión, fijémonos que, dado que *f(x)* es de orden exponencial, (esto es: $\left|f(x)\right| \leq M \cdot e^{cx}\ \forall x > 0$) , se tiene:

$$\lim_{b\to\infty}\left|f(b)\cdot e^{-pb}\right| = \lim_{b\to\infty}\left|f(b)\right|\cdot e^{-\mathrm{Re}(p)b} \leq M \cdot \lim_{b\to\infty} e^{cb}\cdot e^{-\mathrm{Re}(p)b} = M \cdot \lim_{b\to\infty} e^{(c-\mathrm{Re}(p))b} = 0 \quad (\mathrm{Re}(p) > c)$$

Por lo tanto: $\lim_{b\to\infty}\left(f(b)\cdot e^{-pb}\right)=0$.

Reemplazamos en (*) y obtenemos finalmente:

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = -f(0) + p\mathcal{L}\left[f(x)\right],\text{ para } Re(p) > c. \qquad \blacklozenge$$

Teorema 1. 4. 3:

Si *f(x)* es una función de orden exponencial y que admite segunda derivada para $x > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\left[f''(x)\right] = p^2\mathcal{L}\left[f(x)\right] - p\cdot f(0) - f'(0). \qquad \textbf{(1. 4. 4)}$$

Demostración:

Usamos el teorema 1. 4. 1 dos veces, para primero obtener:

$$\mathcal{L}\left[f''(x)\right] = \mathcal{L}\left[\left(f'(x)\right)'\right] = p\cdot\mathcal{L}\left[f'(x)\right] - f'(0),$$

y posteriormente:

$$\mathcal{L}\left[f''(x)\right] = p\cdot\left(p\cdot\mathcal{L}\left[f(x)\right] - f(0)\right) - f'(0) = p^2\cdot\mathcal{L}\left[f(x)\right] - p\cdot f(0) - f'(0). \qquad \blacklozenge$$

Ambos resultados son casos especiales de un teorema más general:

Teorema 1. 4. 5:

Si *f(x)* es una función de orden exponencial y que admite derivada hasta de orden *n* para $x > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] = p^n\mathcal{L}\left[f(x)\right] - p^{n-1}\cdot f(0) - p^{n-2}\cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \qquad \textbf{(1. 4. 6)}$$

Demostración: (Por inducción)

El caso $n = 1$ ya fue demostrado (Teorema 1. 4. 1).

Si la fórmula es válida para $n - 1$, entonces:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] = \mathcal{L}\left[\left(f^{(n-1)}(x)\right)'\right] = p\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}(x)\right] - f^{(n-1)}(0)$$

y usando la hipótesis de inducción:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] = p\mathcal{L}\left[p^{n-1}\mathcal{L}\left[f(x)\right] - p^{n-2} \cdot f(0) - p^{n-3} \cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-2)}(0)\right] - f^{(n-1)}(0).$$

Simplificamos y obtenemos el resultado:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] = p^{n}\mathcal{L}\left[f(x)\right] - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$ ♦

La transformación de Laplace es inyectiva. La demostración de este hecho escapa a los objetivos de este texto, por lo cual lo usaremos sin demostración. La transformada inversa, que también es lineal, se denomina **Transformada Inversa de Laplace** y el operador $\mathcal{L}^{-1}$ se denomina **Operador de la Transformada Inversa de Laplace**.

La transformada de Laplace transforma una función *f(x)* en otra función *F(p)*. Si asumimos que estamos trabajando con funciones continuas, la inyectividad de $\mathcal{L}$ permite “devolvernos”, es decir transformar *F(p)* en la función original *f(x)*. Para poder hacer esto, el siguiente teorema nos será de mucha utilidad, sobre todo a la hora de resover ecuaciones diferenciales.

Teorema 1. 4. 7: (Fórmula de desplazamiento)

Si *f(x)* es una función que admite transformada de Laplace, y $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(p)$,

entonces:

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\cdot f(x)\right]=F(p-a)\,. \qquad \textbf{(1. 4. 8)}$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\cdot f(x)\right]=\int_0^{\infty}e^{-px}\cdot e^{ax}f(x)dx=\int_0^{\infty}e^{-(p-a)x}\cdot f(x)dx=F(p-a)\,. \qquad \blacklozenge$$

Los cuatro teoremas enunciados, permiten aplicar la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales con valores iniciales.

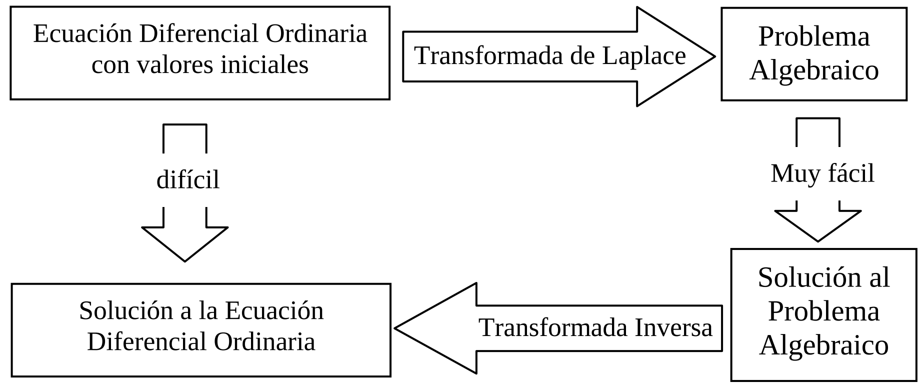
Supongamos que queremos resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$ay''+by'+cy=f(x) \text{ con valores iniciales: } y(0)=y_0,\; y'(0)=y'_0\,.$$

El método funciona de la siguiente manera:

1. Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial y usamos la linealidad de la transformada.
2. Utilizamos las fórmulas **(1. 4. 2)** y **(1. 4. 4)**, de manera que quede una sola incógnita: $\mathcal{L}[y]$
3. Despejamos $\mathcal{L}[y]$, usando álgebra.
4. Aplicamos la transformada inversa para obtener *y(x)*.

Este método es el que mostramos en el esquema de la introducción.



Antes de pasar a los ejemplos, son necesarias algunas observaciones acerca del método.

1. Aún cuando el método está presentado para una ecuación diferencial de segundo orden, la fórmula **(1. 4. 6)** permite extender el método a ecuaciones de orden *n*.
2. Lo que hace este método atractivo, es que si la función *f(x)* no es muy simple, resolver la ecuación con métodos tradicionales puede ser muy complicada. Al aplicar la Transformada de Laplace (paso 1.), debemos calcular $\mathcal{L}\left[f(x)\right]$, lo cual podría ser difícil. Sin embargo, existen tablas de Transformadas de Laplace para una amplia gama de funciones (ver Anexo A), por lo que en muchos casos será preferible este método al método tradicional.
3. Las fórmulas **(1. 4. 2)**, **(1. 4. 4)** y **(1. 4. 6)** (paso 2.), ya incluyen las condiciones iniciales, por lo que este método entregará la solución a la ecuación diferencial con los valores iniciales incluidos. No es necesario, como en el método tradicional, tener que calcular la solución general y luego una solución particular. Esto también es un punto a favor de este método.

4. Aplicar la Transformada Inversa (paso 4.) puede ser engorroso y muchas veces se requiere de métodos tediosos como el método de fracciones parciales. Esto se verá en los ejemplos que presentaremos. Aunque esto podría ser una desventaja para este método, creemos que las ventajas son mayores. Además fórmulas como la fórmula **(1. 4. 8)** y otras que veremos a continuación, amplían mucho las posibilidades de aplicar la Transformada Inversa.

Ejemplo 1. 4. 9: Resolver la ecuación diferencial con valores iniciales:

$y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x$, con valores iniciales: $y(0)=0,\ y'(0)=3$.

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación $y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x$, y queda:

$$\mathcal{L}[y'']+2\mathcal{L}[y']+5\mathcal{L}[y]=3\mathcal{L}\left[e^{-x}sen\,x\right].$$

Ahora aplicamos las fórmulas **(1. 4. 2)** y **(1. 4. 4)** en las expresiones de la izquierda, y la fórmula **(1. 4. 8)** en la expresión de la derecha, de manera de obtener:

$$p^2\cdot\mathcal{L}[y]-p\cdot y(0)-y'(0)+2\big(p\cdot\mathcal{L}[y]-y(0)\big)+5\mathcal{L}[y]=\frac{3}{(p+1)^2+1}.$$

Usamos los valores iniciales y simplificamos:

$$p^2\cdot\mathcal{L}[y]-3+2p\mathcal{L}[y]+5\mathcal{L}[y]=\frac{3}{(p+1)^2+1}.$$

Si despejamos $\mathcal{L}[y]$ y simplificamos, llegamos a:

$$\mathcal{L}[y]=\frac{3\left(p^2+2p+3\right)}{\left(p^2+2p+5\right)\left(p^2+2p+2\right)}.$$

Para poder aplicar la transformada Inversa, necesitamos escribir esta última expresión de manera de poder reconocer transformadas básicas. Para eso usamos fracciones parciales:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{3\left(p^2+2p+3\right)}{\left(p^2+2p+5\right)\left(p^2+2p+2\right)} = \frac{Ap+B}{p^2+2p+5} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+2}$$

Lo cual implica que:

$$3\left(p^2+2p+3\right) = (Ap+B)\left(p^2+2p+2\right) + (Cp+D)\left(p^2+2p+5\right) \quad \forall p\,.$$

Dándole valores a *p*, obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lllll} si\ \ p=0 & : & 9= & & 2B+ \quad\quad 5D \\ si\ \ p=1 & : & 18= & 5A & +5B+\ \ 8C+8D \\ si\ \ p=-1 & : & 6= & -A & +\ \ B-\ \ 4C+4D \\ si\ \ p=-2 & : & 9= & -4A & +2B-10C+5D \end{array}\right| \Rightarrow A=C=0;\ B=2;\ D=1$$

Es decir: $\mathcal{L}[y] = \dfrac{2}{p^2+2p+5} + \dfrac{1}{p^2+2p+2} = \dfrac{2}{(p+1)^2+2^2} + \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$.

Usamos la fórmula **(1. 4. 8)** y el hecho que: $\mathcal{L}[\sin ax] = \dfrac{a}{p^2+a^2}$ para encontrar la solución a la ecuación diferencial:

$$y(x) = e^{-x}\sin\ 2x + e^{-x}\sin x = (\sin\ 2x + \sin x)e^{-x}\,.$$

Aparte de la fórmula de desplazamiento (fórmula **(1. 4. 8)**), existen otras fórmulas que permiten calcular la transformada Inversa. Mostraremos dos, antes de seguir con los ejemplos.

Teorema 1. 4. 10: (Integral para la Transformada de Laplace)

Si *f(x)* es una función que admite transformada de Laplace, y $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$, entonces:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(s)ds\right] = \frac{F(p)}{p} \qquad \textbf{(1. 4. 11)}$$

Demostración:

Sea $y(x) = \int_0^x f(s)ds$.

Esta función cumple que: $y'(x) = f(x)$ y además tiene la condición inicial: *y(0) = 0.*

Por el Teorema 1. 4. 1, sabemos que: $\mathcal{L}[y'] = p\mathcal{L}[y] - y(0)$.

Reemplazamos los datos anteriores en esta fórmula y queda:

$$\mathcal{L}[f(x)] = p \cdot \mathcal{L}\left[\int_0^x f(s)ds\right] - 0.$$

Dividimos por *p* para obtener finalmente la expresión buscada:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(s)ds\right] = \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{p} = \frac{F(p)}{p}. \qquad \blacklozenge$$

Teorema 1. 4. 12: (Segunda Fórmula de Desplazamiento)

Si *f(x)* es una función que admite Transformada de Laplace, y $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$, y si

además $g(x) = \begin{cases} f(x-a) & si\ x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$, entonces:

$$\mathcal{L}[g(x)] = e^{-ap}F(p) \qquad \textbf{(1. 4. 13)}$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\left[g(x)\right]=\int_0^{\infty} e^{-px} g(x)\,dx=\int_a^{\infty} e^{-px} f(x-a)\,dx\,.$$

Hacemos el cambio de variable $u = x - a$ y queda:

$$\mathcal{L}\left[g(x)\right]=\int_o^{\infty} e^{-p(u+a)} f(u)\,du=e^{-pa}\int_o^{\infty} e^{-pu} f(u)\,du=e^{-pa}F(p)\,. \qquad \blacklozenge$$

Nota: Este teorema es una generalización del ejemplo 1. 3. 7 de la sección anterior.

Ejemplo 1. 4. 14: Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p+1)}\right]$.

Solución:

Resolveremos este ejercicio de dos maneras.

1ª Forma:

Al igual que en el ejemplo anterior, podemos usar fracciones parciales y llegamos a que: $\dfrac{1}{p(p+1)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}$.

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]=1-e^{-x}$$

2ª Forma:

Fijémonos que: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p+1)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]$, con $F(p)=\dfrac{1}{p+1}$.

La fórmula **(1. 4. 11)**, dice que: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]=\displaystyle\int_0^{x} f(s)\,ds$.

En nuestro caso, como $F(p)=\dfrac{1}{p+1}$, entonces: $f(x)=e^{-x}$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right]=\int_0^x e^{-s}ds=-e^{-s}\Big|_0^x=1-e^{-x}.$$

Ejemplo 1. 4. 15: Resolver la ecuación: $y'+4y+5\int_0^x y(s)\,ds=e^{-x}$, con: $y(0)=0$.

Solución:

Hay dos maneras de enfrentar este problema, que desarrollaremos en paralelo para evidenciar las ventajas o desventajas de cada uno:

1ª Forma:

Derivaremos a ambos lados, para transformar la ecuación en una ecuación diferencial de segundo orden. Sin embargo, necesitamos otro valor inicial, que calcularemos primero:

1. Evaluamos en x = 0:

   $$y'(0)+4y(0)+5\int_0^0 y(s)\,ds=e^{-0}$$

   Usamos el valor inicial dado y llegamos a: $y'(0)=1$.

2ª Forma:

1. Aplicamos directamente la transformada de Laplace a ambos lados:

   $$\mathcal{L}[y']+4\mathcal{L}[y]+5\mathcal{L}\left[\int_0^x y\,dx\right]=\mathcal{L}\left[e^{-x}\right]$$

2. Usamos las fórmulas **(1. 4. 2), (1. 4. 4)** y **(1. 4. 11)**, para simplificar la expresión anterior y obtenemos:

   $$p\mathcal{L}[y]+4\mathcal{L}[y]+5\frac{\mathcal{L}[y]}{p}=\frac{1}{p+1}.$$

2. Derivamos la ecuación con respecto a x y obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 4y' + 5y = -e^{-x}$$

con valores iniciales:

$$y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1$$

3. Aplicamos la transformada de Laplace, tal como hicimos en el ejemplo 1:

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = -\mathcal{L}\left[e^{-x}\right],$$

usamos las fórmulas **(1. 4. 2)** y **(1. 4. 4)**:

$$p^2\mathcal{L}[y] - 1 + 4p\mathcal{L}[y] + 5\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{p+1},$$

y despejamos $\mathcal{L}[y]$:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{p}{\left(p^2 + 4p + 5\right)(p+1)}$$

3. Multiplicamos por p y despejamos $\mathcal{L}[y]$, de manera que:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{p}{\left(p^2 + 4p + 5\right)(p+1)}$$

Por ambos métodos se llega a lo mismo, pero es evidente cuán poderosa es la transformada de Laplace con fórmulas como **(1. 4. 11)**.

El resto del ejercicio es similar al ejemplo 1. 4. 9.

Para poder aplicar la transformada Inversa, necesitamos escribir la última expresión obtenida, dejando transformadas básicas. Para eso se usan fracciones parciales:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{p}{\left(p^2 + 4p + 5\right)(p+1)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 4p + 5} + \frac{C}{p+1}.$$

Lo cual implica que:

$$p=(Ap+B)(p+1)+C\left(p^2+4p+5\right)\ \ \forall p\ .$$

Dándole valores a *p*, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{array}{lll} si\ \ p=-1: & -1=2C & \Rightarrow\ C=-\tfrac{1}{2} \\ si\ \ p=0\ \ : & 0=B-\tfrac{5}{2} & \Rightarrow B=\tfrac{5}{2} \\ si\ \ p=1\ \ : & 1=2A+5-5 & \Rightarrow\ A=\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \frac{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{5}{2}}{p^2+4p+5}+\frac{-\tfrac{1}{2}}{p+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(p+2)+3}{(p+2)^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(p+2)}{(p+2)^2+1}+3\frac{1}{(p+2)^2+1}\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

Aplicamos la Transformada Inversa, usando la fórmula **(1. 4. 8)** para encontrar la solución a la ecuación diferencial:

$$y(x)=\tfrac{1}{2}\left[e^{-2x}\cos x+3e^{-2x}\sin x\right]-\tfrac{1}{2}e^{-x}=\tfrac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x+3\sin x\right)-\tfrac{1}{2}e^{-x}\ .$$

1.5 Más aplicaciones a las ecuaciones diferenciales: Derivadas e integrales de la Transformada de Laplace

En la sección anterior, vimos cómo funciona la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales. En particular, resolvimos ecuaciones del tipo $ay'' + by' + cy = f(x)$, en donde los coeficientes *a, b* y *c* eran constantes. Sin embargo, si estos coeficientes son polinomios en vez de constantes, también es posible aplicar la transformada de Laplace. La complicación está en que si aplicamos la transformada de Laplace en estos casos, inevitablemente llegaremos a expresiones, por ejemplo, del tipo $\mathcal{L}\left[x^2 y\right]$ o $\mathcal{L}[xy']$.

En esta sección veremos justamente fórmulas que serán de gran utilidad para enfrentar casos como esos.

Teorema 1. 5. 1:

Si *f(x)* es una función que admite transformada de Laplace, y $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(p)$,

entonces:

$$\mathcal{L}\left[xf(x)\right] = -F'(p) \qquad \textbf{(1. 5. 2)}$$

$$\mathcal{L}\left[x^2 f(x)\right] = F''(p) \qquad \textbf{(1. 5. 3)}$$

y en general:

$$\mathcal{L}\left[x^n f(x)\right] = (-1)^n \cdot F^{(n)}(p) \qquad \textbf{(1. 5. 4)}$$

Demostración:

Por definición: $F(p)=\int_0^{\infty} e^{-px} f(x)\,dx$.

Si derivamos a ambos lados con respecto a *p*, obtenemos:

$$F'(p)=\int_0^{\infty} e^{-px}\cdot(-x)\cdot f(x)\,dx\ ,$$

es decir: $\mathcal{L}\left[xf(x)\right]=-F'(p)$.

Derivando otra vez se obtiene **(1. 5. 3)** e inductivamente la fórmula general **(1. 5. 4)**. ♦

Teorema 1. 5. 5:

Si *f(x)* es una función que admite transformada de Laplace, y $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(p)$,

entonces:
$$\mathcal{L}\left[x\cdot f'(x)\right]=-\frac{d}{dp}\left(p\cdot F(p)\right) \qquad \textbf{(1. 5. 6)}$$

$$\mathcal{L}\left[x\cdot f''(x)\right]=-\frac{d}{dp}\left(p^2F(p)-p\cdot f(0)\right) \qquad \textbf{(1. 5. 7)}$$

y en general:
$$\mathcal{L}\left[x\cdot f^{(n)}(x)\right]=-\frac{d}{dp}\left(p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n-1}p^k f^{(n-1-k)}(0)\right) \qquad \textbf{(1. 5. 8)}$$

Demostración:

Sabemos, por el teorema anterior, que: $\mathcal{L}\left[xf(x)\right]=-F'(p)$ (fórmula **(1. 5. 2)**).

Por otra parte, por el teorema 1. 4. 1 sabemos que: $\mathcal{L}\left[f'(x)\right]=p\mathcal{L}\left[f(x)\right]-f(0)$

(fórmula **(1. 4. 2)**).

Usando la primera de estas fórmulas (fórmula **(1. 5. 2)**), obtenemos:

$$\mathcal{L}\left[x\cdot f'(x)\right]=-\frac{d}{dp}\left(\mathcal{L}\left[f'(x)\right]\right)$$

Ahora usamos la segunda fórmula (fórmula **(1. 4. 2)**) y simplificamos:

$$\mathcal{L}\left[x\cdot f'(x)\right]=-\frac{d}{dp}\Big(p\cdot\mathcal{L}\left[f(x)\right]-f(0)\Big)=-\frac{d}{dp}\Big(p\cdot\mathcal{L}\left[f(x)\right]\Big).$$

Los otros dos resultados se demuestran análogamente. La única diferencia es que para demostrar la segunda expresión se debe usar la fórmula **(1. 4. 4)**, en vez de la fórmula **(1. 4. 2)**, y para el resultado general, la fórmula **(1. 4. 6)**. ♦

Ejemplo 1. 5. 9: Probar que: $\mathcal{L}\left[x\cos ax\right]=\dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

Solución:

Aplicamos la fórmula **(1. 5. 2)** ($\mathcal{L}\left[xf(x)\right]=-F'(p)$):

$$\mathcal{L}\left[x\cos ax\right]=-\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[\cos ax\right]=-\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{p^2+a^2}\right)=\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}.$$

Ejemplo 1. 5. 10: Hallar: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right]$.

Solución:

Observemos que: $\dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}=\dfrac{1}{p^2+a^2}-\dfrac{2a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

Si aplicamos la transformada inversa a ambos lados de esta expresión, y usamos el resultado del ejemplo anterior, obtenemos:

$$x\cos ax=\tfrac{1}{a}\sin ax-2a^2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right].$$

Despejamos $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right]$, para llegar a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right]=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{\sin ax}{a}-x\cos ax\right].$$

Ejemplo 1. 5. 11: Resolver la siguiente ecuación diferencial con valores iniciales:

$$xy''+(3x-1)y'-(4x+9)y=0\text{, con: } y(0)=0.$$

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}[xy'']+3\mathcal{L}[xy']-\mathcal{L}[y']-4\mathcal{L}[xy]-9\mathcal{L}[y]=0.$$

Ahora usamos las fórmulas **(1. 5. 8), (1. 5. 6), (1. 4. 2)** y **(1. 5. 2)** en las cuatro primeras transformadas respectivamente, además de la condición inicial, de manera de obtener:

$$-\frac{d}{dp}\left(p^2\cdot\mathcal{L}[y]\right)+3\cdot-\frac{d}{dp}\left(p\cdot\mathcal{L}[y]\right)-p\mathcal{L}[y]+4\frac{d}{dp}\mathcal{L}[y]-9\mathcal{L}[y]=0.$$

Calculamos las derivadas de los productos. Para simplificar, haremos $\mathcal{L}[y]=Y$.

$$-2pY-p^2\frac{dY}{dp}-3Y-3p\frac{dY}{dp}-pY+4\frac{dY}{dp}-9Y=0$$

$$\Rightarrow\left(p^2+3p\text{-}4\right)\frac{dY}{dp}+\left(2p+3+p+9\right)Y=0.$$

Separamos variables:

$$\frac{1}{Y}dY=-\frac{3p+12}{p^2+3p\text{-}4}dp$$

$$\Rightarrow\frac{1}{Y}dY=-\frac{3}{p\text{-}1}dp.$$

Integramos a ambos lados:

$$\ln Y = -3\ln(p-1) + \ln c \ ,$$

lo cual implica finalmente que:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{c}{(p-1)^3} \ .$$

Usamos la fórmula de desplazamiento **(1. 4. 8)** y el hecho que: $\mathcal{L}\left[x^2\right] = \dfrac{2}{p^3}$ para

encontrar la solución a la ecuación diferencial: $y(x) = \dfrac{c}{2} x^2 e^x$.

Ejemplo 1. 5. 12.: Resolver la ecuación diferencial con valores iniciales:

$$xy'' + (2x+3)\,y' + (x+3)\,y = 3e^{-x} \text{, con: } y(0) = 0 \ .$$

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}[xy''] + 2\mathcal{L}[xy'] + 3\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[xy] + 3\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}\left[e^{-x}\right].$$

Usamos las fórmulas y la condición inicial, de manera de obtener:

$$-\frac{d}{dp}\left(p^2 Y\right) - 2(pY) + 3pY - \frac{dY}{dp} + 3Y = \frac{3}{p+1}, \text{ donde } \mathcal{L}[y] = Y \ .$$

Calculamos las derivadas de los productos:

$$-2pY - p^2\frac{dY}{dp} - 2Y - 2p\frac{dY}{dp} + 3pY - \frac{dY}{dp} + 3Y = \frac{3}{p+1}$$

$$\Rightarrow (p+1)^2\frac{dY}{dp} - (p+1)Y = -\frac{3}{p+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dp} - \frac{1}{p+1}Y = -\frac{3}{(p+1)^3}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal, cuya solución es:

$$Y = \frac{1}{(p+1)^2} + c(p+1).$$

Sabemos que $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$, y para eso es indispensable que c = 0. Por lo tanto:

$$Y = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Y de esto se deduce finalmente que: $y(x) = xe^{-x}$.

Aunque la transformada de Laplace es una muy buena herramienta para resolver ecuaciones diferenciales, hay que señalar que el método mostrado anteriormente no siempre es útil.

Por ejemplo, si la ecuación diferencial es: $y'' + x^2 y = 0$, con: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, y aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados, obtendremos:

$p^2Y - py_0 - y_0' + y'' = 0$, o, equivalentemente: $y'' + p^2Y = -py_0 - y_0'$, que es, en esencia, la misma ecuación diferencial de la que partimos. El método no sirve en este caso.

Los teoremas anteriores, así como los ejemplos, tienen que ver con la derivada de la transformada de Laplace y también con la transformada de Laplace de una derivada. De la misma manera, analizaremos la transformada de Laplace de una integral y la integral de una transformada de Laplace.

Teorema 1. 5. 13:

Si *f(x)* es una función que admite Transformada de Laplace, y $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(p)$,

entonces: $$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_p^\infty F(s)\,ds \qquad \textbf{(1. 5. 14)}$$

Demostración:

Sea $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=G(p)$.

Si aplicamos la fórmula **(1. 5. 2)**, obtenemos: $G'(p)=-\mathcal{L}\left[x\cdot\frac{f(x)}{x}\right]=-\mathcal{L}\left[f(x)\right]=-F(p)$

y en consecuencia: $G(p)-G(a)=-\int_a^p F(s)\,ds=\int_p^a F(s)\,ds$, $\forall\, a.$ **(*)**

Recordemos que el corolario 1. 3. 3 establece que: $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$. Por lo tanto, si aplicamos límite a **(*)**, obtendremos: $\lim_{a\to\infty}G(a)=0$, y esto nos lleva finalmente a la

expresión buscada: $$G(p)=\int_p^\infty F(s)\,ds\,.$$ ♦

Teorema 1. 5. 15:

Si *f(x)* es una función que admite transformada de Laplace, y $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(p)$, y si

además $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ existe, entonces: $$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}dx=\int_0^\infty F(p)\,dp \qquad \textbf{(1. 5. 16)}$$

Demostración:

Sabemos que $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_p^\infty F(s)\,ds$ y que, por definición: $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_0^\infty e^{-px}\frac{f(x)}{x}dx$.

Igualando ambas expresiones y haciendo tender *p* a *0*, se demuestra el teorema. ♦

Ejemplo 1. 5. 17: Calcular la integral: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ (*a*, *b* > *0*).

Solución:

Aplicamos directamente la fórmula **(1. 5. 16)** del teorema anterior para obtener:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^\infty \mathcal{L}\left[e^{-ax}-e^{-bx}\right]dp\ .$$

Usamos ahora la fórmula para la transformada de Laplace de la exponencial e integramos. (No es necesario usar valor absoluto al integrar, dado que *a* y *b* son positivos por hipótesis.)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^\infty \frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}dp=\ln\frac{p+a}{p+b}\bigg|_0^\infty=\ln 1-\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{b}{a}\ .$$

Ejemplo 1. 5. 18: Calcular la integral: $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx$ (*a*, *b* > *0*).

Solución:

Aplicamos directamente la fórmula **(1. 5. 16)** del teorema anterior para obtener:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx=\int_0^\infty \mathcal{L}\left[e^{-ax}\sin bx\right]dp\ .$$

Usamos ahora la fórmula para la transformada de Laplace de “sin x” desplazada (ver fórmula **(1. 5. 16)**) e integramos:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx=\int_0^\infty \frac{b}{(p+a)^2+b^2}dp=\arctan\left(\frac{p+a}{b}\right)\bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{a}{b}=\arctan\frac{b}{a}\ .$$

(En la última igualdad usamos la identidad trigonométrica: $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.)

Ejemplo 1. 5. 19: Demostrar que: $f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt=\frac{\pi}{2}$ ($x > 0$).

Solución:

Usamos nuevamente la fórmula **(1. 5. 16)**: $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt=\int_0^\infty \mathcal{L}\left[\sin xt\right]dp$.

Usamos ahora la fórmula para la transformada de Laplace de "sin t" (nótese que la variable es *t*, no *x*) e integramos:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dx=\int_0^\infty \frac{x}{p^2+x^2}dp=\arctan\left(\frac{p}{x}\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{2}\ .$$

Ejemplo 1. 5. 20: Demostrar que: $f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-x}$ ($x > 0$).

Solución:

Sea: $f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt$. Esta función cumple varias propiedades:

$$f'(x)=\int_0^\infty \frac{sen\, xt}{\left(1+t^2\right)t}dt-\frac{\pi}{2}\ ,\quad f''(x)=f(x) \text{ y además } f(0)=\frac{\pi}{2} \text{ y } f'(0)=-\frac{\pi}{2}\ .$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=-\int_0^\infty \frac{t\, sen\, xt}{1+t^2}dt\\
&=-\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2}\frac{sen\, xt}{t}dt\\
&=-\int_0^\infty \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{sen\, xt}{t}dt\\
&=-\int_0^\infty \frac{sen\, xt}{t}dt+\int_0^\infty \frac{sen\, xt}{\left(1+t^2\right)t}dt=\int_0^\infty \frac{sen\, xt}{\left(1+t^2\right)t}dt-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$f''(x) = f(x)$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ y $f'(0) = -\frac{\pi}{2}$ se demuestran fácilmente.

Con todo lo anterior vemos que *f(x)* cumple la ecuación diferencial con valores iniciales:

$$y'' - y = 0 \text{, con } y(0) = \frac{\pi}{2},\ y'(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Pero la solución (única) a esta ecuación es: $y = \frac{\pi}{2}e^{-x}$, por lo tanto:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-x}.$$

Las ***funciones de Bessel*** son muy importantes en el estudio de vibración de membranas circulares, por ejemplo parlantes o tambores, o en la conducción de calor en un objeto cilíndrico.

Sin embargo, y al igual que en el caso de la transformada de Laplace, fue Euler quien primero definió estas funciones y aparecen también en la obra de Lagrange, de donde aparentemente Bessel sacó la idea para utilizarlas en su trabajo.

Fig. 1.8: Sello postal con la imagen de F. W. Bessel

Bessel usó estas funciones en el estudio de un problema debido a Kepler, de determinar el movimiento de tres cuerpos cuyas fuerzas gravitatorias se influyen mutuamente. Las funciones de Bessel aparecen, en este contexto, como coeficientes de una expansión en serie. Bessel estudió estas funciones más en profundidad y publicó un tratado completo acerca de ellas en Berlin en 1824.

Las funciones de Bessel forman una familia de funciones denominadas J_0, J_1, J_2, ... que surgen del estudio de la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 .$$

En el caso en que $n = 0$ se obtiene la función de Bessel de orden 0: $J_0(x)$.

Se puede demostrar que J_0 es la única solución a la ecuación diferencial con valores iniciales: $xy'' + y' + xy = 0$ con: $y(0) = 1$.

Además, aplicando las técnicas vistas en ejemplos anteriores, no es difícil demostrar que:

$$\mathcal{L}\left[J_0(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \qquad \text{(ver [7]).}$$

Los siguientes ejemplos demuestran algunas propiedades de la función $J_0(x)$, asumiendo conocidas las mencionadas anteriormente.

Ejemplo 1. 5. 21: Demostrar que: $\int_0^\infty J_0(x)\,dx = 1$.

Solución:

Fijémonos primero que: $\int_0^\infty J_0(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x \cdot J_0(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \mathcal{L}\left[x \cdot J_0(x)\right] dp$.

En la última integral podemos usar la fórmula **(1. 5. 2)** y se obtiene:

$$\int_0^\infty J_0(x)\,dx = \int_0^\infty -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\left[J_0(x)\right] dp = \int_0^\infty -\frac{d}{dp}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,dp = \int_0^\infty \frac{p}{\sqrt{\left(p^2+1\right)^3}}\,dp .$$

Hacemos ahora el cambio de variables: $u = p^2 + 1$ y se llega a:

$$\int_0^\infty J_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}}\,du = 1.$$

Ejemplo 1. 5. 22: Demostrar que: $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos t)\,dt$.

Solución:

Sea: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos t)\,dt$.

Demostraremos que *f(x)* cumple la misma ecuación diferencial que $J_0(x)$ y que, en consecuencia, deben ser iguales.

En efecto:

Si $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos t)\,dt$, entonces:

$f'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\cos t)\cdot\cos t\,dt$ y también: $f''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos t)\cdot\cos^2 t\,dt$

Usamos integración por partes en $f'(x)$, para obtener:

$$f'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos t)\cdot x\sin^2 t\,dt .$$

Si denominamos $h(x,t)=\cos(x\cos t)$, podemos escribir:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x,t)\,dt,\quad f'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x,t)\cdot x\sin^2 t\,dt,\quad f''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x,t)\cdot\cos^2 t\,dt .$$

Ahora podemos comprobar que *f(x)* cumple $xy''+y'+xy=0$, ya que:

$$xy''+y'+xy=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x,t)\,x\cos^2 t\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x,t)\,x\sin^2 t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x,t)\,x\,dt$$

y si agrupamos y simplificamos obtenemos:

$$xy''+y'+xy=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(x,t)\left[-x\cos^2 t-x\sin^2 t+x\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}0\,dt=0$$

Además, se cumple la condición inicial: $f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(0)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\,dt=1$

Finalizaremos con un teorema que permite calcular la transformada de Laplace de funciones periódicas:

Teorema 1. 5. 23:

Si *f(x)* es una función periódica con período *a*, i. e.: *f(x + a) = f(x),* que admite Transformada de Laplace, y $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(p)$, entonces:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a e^{-px}f(x)\,dx. \qquad \textbf{(1. 5. 24)}$$

Demostración:

Primero aplicamos la definición de la transformada de Laplace:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx=\int_0^a e^{-px}f(x)\,dx+\int_a^\infty e^{-px}f(x)\,dx.$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variables: $x = t + a$ y queda:

$$F(p)=\int_0^a e^{-px}f(x)\,dx+\int_0^\infty e^{-p(t+a)}f(t+a)\,dt.$$

Usamos la periodicidad de *f(x)* :

$$\begin{aligned}F(p)&=\int_0^a e^{-px}f(x)\,dx+e^{-ap}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt\\ &=\int_0^a e^{-px}f(x)\,dx+e^{-ap}F(p).\end{aligned}$$

Despejamos *F(p)*, lo cual completa la demostración:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a e^{-px}f(x)\,dx. \qquad \blacklozenge$$

Ejemplo 1. 5. 25: Hallar *F(p)*, si *f(x) = 1* en los intervalos de *0* a *1*, de *2* a *3*, de *4* a *5*. etc. y *f(x) = 0* en los restantes intervalos.

Solución:

La función *f(x)* así definida, es una función periódica con período *a = 2*. Por lo tanto, si aplicamos la fórmula **(1. 5. 24)** obtenemos:

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2p}} \int_0^2 e^{-px} f(x)\,dx = \frac{1}{1-e^{-2p}} \int_0^1 e^{-px}\,dx \,.$$

Integrando, se llega al resultado:

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-e^{-p}} \,.$$

Capítulo 2: El Teorema de Convolución

2. 1 Convolución

La convolución es un operador matemático que representa, en cierto sentido, la cantidad en que se superponen dos funciones y tiene diferentes aplicaciones a la estadística, la óptica (una sombra es una superposición entre la fuente lumínica y el objeto que proyecta la sombra), la acústica (un eco es la superposición entre el sonido original y los objetos que lo reflejan), la ingeniería eléctrica, entre otras disciplinas.

Definición 2. 1. 1:

Dadas dos funciones f y g, se define la **convolución de f y g**, y se anota $f * g$, como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

Ejemplo 2. 1. 2: Hallar la convolución de los siguientes pares de funciones:

a) $f(t) = 1$, $g(t) = \sin at$

b) $f(t) = e^{at}$, $g(t) = e^{bt}$, donde $a \neq b$

c) $f(t) = t$, $g(t) = e^{at}$

d) $f(t) = \sin at$, $g(t) = \sin bt$.

Solución:

a) $(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin\big(a(t-\tau)\big)\, d\tau = \frac{1}{a}\cos\big(a(t-\tau)\big)\Big|_0^t = \frac{1}{a}(1-\cos at)$.

b) $\left(f*g\right)(t)=\int_0^t e^{a\tau}\cdot e^{b(t-\tau)}d\tau=\int_0^t e^{bt+(a-b)\tau}d\tau=\frac{1}{a-b}e^{bt+(a-b)\tau}\Big|_0^t=\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right).$

c) $\left(f*g\right)(t)=\int_0^t \tau\cdot e^{a(t-\tau)}d\tau$.

Integrando por partes, se llega a:

$$\begin{aligned}\left(f*g\right)(t)&=-\frac{1}{a}\tau\cdot e^{a(t-\tau)}\Big|_0^t+\frac{1}{a}\int_0^t e^{a(t-\tau)}d\tau\\&=-\frac{1}{a}t-\frac{1}{a^2}e^{a(t-\tau)}\Big|_0^t\\&=-\frac{1}{a}t-\frac{1}{a^2}\left(1-e^{at}\right)\\&=\frac{1}{a^2}\left(e^{at}-1-at\right).\end{aligned}$$

d) $\left(f*g\right)(t)=\int_0^t \sin a\tau\cdot\sin\left(b(t-\tau)\right)d\tau$.

Usamos la fórmula trigonométrica para transformar productos a sumas y obtenemos:

$$\begin{aligned}\left(f*g\right)(t)&=\frac{1}{2}\int_0^t \cos\left(a\tau-b(t-\tau)\right)-\cos\left(a\tau+b(t-\tau)\right)d\tau\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+b}\sin\left((a+b)\tau-bt\right)-\frac{1}{a-b}\sin\left((a-b)\tau+bt\right)\right]_0^t\\&=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{a+b}\sin at-\frac{1}{a-b}\sin at\right]-\left[\frac{1}{a+b}\sin\left(-bt\right)-\frac{1}{a-b}\sin bt\right]\right)\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\sin bt-b\sin at\right).\end{aligned}$$

En los cuatro ejemplos anteriores, se consideró la primera función como *f(t)* y la segunda como *g(t)*. ¿Daría resultados distintos, si elegimos la primera función como *g* y la segunda como *f*? La respuesta es no, ya que la convolución es conmutativa como demostraremos a continuación.

Teorema 2. 1. 3:

Dadas dos funciones, *f* y *g*, se cumple: $(f*g)(t)=(g*f)(t)$.

Demostración:

Por definición: $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Si se hace el cambio de variables: $u=t-\tau$, se obtiene:

$$f(t)*g(t)=-\int_t^0 f(t-u)g(u)du=\int_0^t g(u)f(t-u)du=g(t)*f(t). \qquad \blacklozenge$$

La convolución cumple además otras propiedades, que se enunciarán a continuación sin demostración.

Teorema 2. 1. 4:

Dadas tres funciones, *f* , *g* y *h* y una constante *a*, entonces se cumplen:

(i) $f*(g*h)=(f*g)*h$.

(ii) $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$.

(iii) $(a\cdot f)*g=f*(a\cdot g)=a\cdot(f*g)$.

2. 2 El Teorema de Convolución

Estudiaremos ahora el importante teorema de la convolución, que relaciona la convolución de dos funciones con la transformada de Laplace.

Teorema 2. 2. 1:

Supongamos que *f* y *g* poseen transformada de Laplace. Si $\mathcal{L}\left[f(x)\right](p) = F(p)$ y $\mathcal{L}\left[g(x)\right](p) = G(p)$, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(p)G(p)\right] = f * g$$

o, equivalentemente: $\mathcal{L}\left[f * g\right](p) = F(p)G(p)$.

Demostración:

Sabemos que $F(p) = \int_0^\infty e^{-ps} f(s)\,ds$ y que $G(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)\,dt$.

Por lo tanto:

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty e^{-ps} f(s)\,ds \cdot \int_0^\infty e^{-pt} g(t)\,dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s) g(t)\,ds\,dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s)\,ds\right] g(t)dt .$$

Hacemos el cambio de variables $u = s + t$, en el que consideraremos t constante y queda:

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-pu} f(u-t)\,du\right] g(t)dt = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-pu} f(u-t)\, g(t)\,du\,dt .$$

Hemos llegado a una integral de la forma: $\int_0^\infty \int_t^\infty ....\,du\,dt$.

La región sobre la que estamos integrando se ve en la siguiente figura y la integral señalada barre esta región horizontalmente.

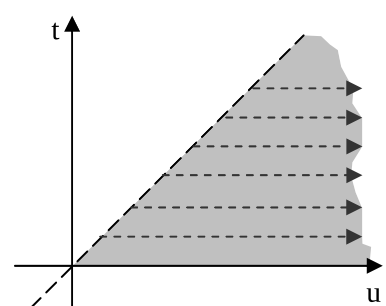


Fig. 2. 1: $\int_0^\infty \int_t^\infty ....\,du\,dt$

Sin embargo, esta misma región también se puede barrer verticalmente como se muestra en la figura 2. 2.

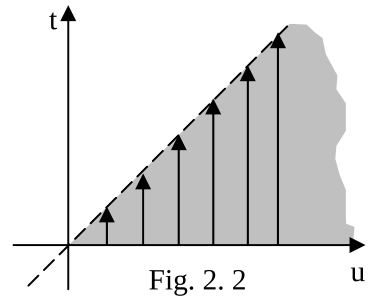


Fig. 2. 2

Este barrido corresponde a una integral del tipo: $\int_0^\infty \int_0^u ....dt\,du$.

Es decir:

$$
\begin{aligned}
F(p)G(p) &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-pu} f(u-t)g(t)\,dt\,du \\
&= \int_0^\infty e^{-pu} \left(\int_0^u f(u-t)g(t)\,dt \right) du \\
&= \int_0^\infty e^{-pu} \left(f * g \right)(u)\,du \ .
\end{aligned}
$$

Pero esta última integral corresponde precisamente a la transformada de Laplace de la convolución. Hemos demostrado, pues, que:

$$\mathcal{L}\left[f * g \right](p) = F(p)G(p) \qquad \blacklozenge$$

Ejemplo 2. 2. 2: Verificaremos el teorema de la convolución en cada uno de los pares de funciones del ejemplo 2. 1. 2.

Solución:

a) Sabemos que: $f(t) = 1 \Rightarrow F(p) = \dfrac{1}{p}$ y que: $g(t) = \sin at \Rightarrow G(p) = \dfrac{a}{a^2 + p^2}$.

Calculamos que: $\left(f * g \right)(t) = \dfrac{1}{a}\left(1 - \cos at\right)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g](p) &= \frac{1}{a}\mathcal{L}[1-\cos at](p)\\ &= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{p}-\frac{p}{a^2+p^2}\right]\\ &= \frac{1}{a}\frac{a^2}{p\left(a^2+p^2\right)}\\ &= \frac{1}{p}\frac{a}{a^2+p^2} = F(p)G(p).\end{aligned}$$

b) Recordemos que: $f(t)=e^{kt} \Rightarrow F(p)=\dfrac{1}{p-k}$.

En el ejemplo 2. 1. 2 se calculó que: $(f*g)(t)=\dfrac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$.

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g](p) &= \frac{1}{a-b}\mathcal{L}\left[e^{at}-e^{bt}\right](p)\\ &= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-b}\right]\\ &= \frac{1}{(p-a)(p-b)} = F(p)G(p).\end{aligned}$$

c) Sabemos que: $f(t)=t \Rightarrow F(p)=\dfrac{1}{p^2}$ y que: $g(t)=e^{at} \Rightarrow G(p)=\dfrac{1}{p-a}$.

Sabemos, además que: $(f*g)(t)=\dfrac{1}{a^2}\left(e^{at}-1-at\right)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g](p) &= \frac{1}{a^2}\mathcal{L}\left[e^{at}-1-at\right](p)\\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}-\frac{a}{p^2}\right]\\ &= \frac{1}{a^2}\frac{p^2-p(p-a)-a(p-a)}{p^2(p-a)}\\ &= \frac{1}{p^2(p-a)} = F(p)G(p).\end{aligned}$$

d) Recordemos que: $(f*g)(t)=\frac{1}{a^2-b^2}(a\sin bt-b\sin at)$.

Por lo tanto, para este último ejemplo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g](p)&=\frac{1}{a^2-b^2}\mathcal{L}[a\sin bt-b\sin at](p)\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{ab}{p^2+b^2}-\frac{ab}{p^2+a^2}\right]\\&=\frac{ab}{a^2-b^2}\frac{a^2-b^2}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)}\\&=\frac{a}{\left(p^2+a^2\right)}\frac{b}{\left(p^2+b^2\right)}=F(p)G(p).\end{aligned}$$

Ejemplo 2. 2. 3: En el ejemplo 1. 5. 6 demostramos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right](x)=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{\sin ax}{a}-x\cos ax\right] .$$

Llegaremos a este resultado, ahora usando el teorema de convolución.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right](x)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{p^2+a^2}\right](x)\\&=\int_0^x\frac{1}{a}\sin\left(a(x-t)\right)\cdot\frac{1}{a}\sin(at)\,dt\\&=\frac{1}{a^2}\int_0^x-\frac{1}{2}\left[\cos(ax)-\cos(ax-2at)\right]dt\\&=-\frac{1}{2a^2}\left[\cos(ax)\,t\Big|_{t=0}^{t=x}-\frac{\sin(2at-ax)}{2a}\Bigg|_{t=0}^{t=x}\right]\\&=-\frac{1}{2a^2}\left[x\cos(ax)-\frac{\sin(ax)}{2a}-\frac{\sin(ax)}{2a}\right]\\&=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{\sin(ax)}{a}-x\cos(ax)\right].\end{aligned}$$

2. 3 El Problema Mecánico de Abel y la Curva Tautócrona.

Supongamos que tenemos un hilo cuyos extremos se encuentran a diferentes alturas, y que un objeto de masa *m* situado en el extremo superior parte desde el reposo y se desliza hasta el extremo inferior por acción de la gravedad.

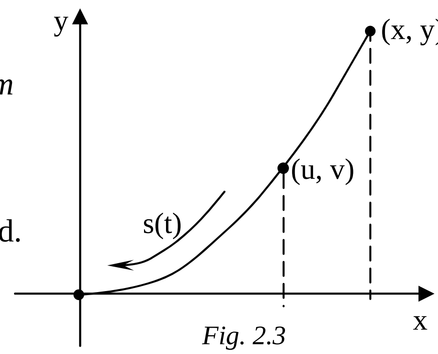


Fig. 2.3

Vamos a establecer los siguientes supuestos:

1. El punto de partida (extremo superior) es (x, y).
2. El extremo inferior se encuentra en el origen.
3. El objeto que se desliza se encuentra luego de un instante *t*, en el punto *(u, v)*.
4. La forma del hilo se modela según la función $y = y(x)$.
5. La distancia que le falta por recorrer al objeto (es decir, la longitud de la curva *y(x)*), se modela según la función $s = s(t)$.

Hay dos preguntas fundamentales con respecto a esta situación:

1. Si conocemos la forma del hilo, es decir, si conocemos *y(x)*, ¿cuánto demora el objeto en caer?
2. Si sabemos cuánto demora el objeto en caer o si queremos que caiga en un cierto tiempo, ¿qué forma debe tener el hilo? En otras palabras, ¿cuál debe ser *y(x)*?

El primer problema es relativamente sencillo de resolver, en cambio el segundo problema es mucho más difícil y se conoce como el **Problema Mecánico de Abel**, en honor al matemático noruego Niels Henrik Abel.

Fig. 2.4: Retrato de Neils Abel

Para poder determinar *y(t)*, usaremos el principio de conservación de energía. El principio de conservación de energía establece que a medida que el objeto cae, pierde energía potencial y gana energía cinética, pero que la suma de esas dos energías permanece constante. Este hecho es independiente de dónde se encuentre el objeto.

En términos matemáticos diríamos: $E_{cinética} + E_{potencial} = Constante$. (**2. 3. 1**)

Analizaremos esta igualdad para el punto inicial y para el punto (u, v).

En el punto inicial tenemos que:

- La energía cinética es cero, ya que el objeto parte desde el reposo.
- La energía potencial es: $E_{potencial} = m \cdot g \cdot y$.

  Recuérdese que la energía potencial de un objeto se calcula mediante la fórmula: $E_{potencial} = m \cdot g \cdot h$, en donde m es la masa del objeto, g es la constante gravitacional y h es la altura a la que se encuentra el objeto.

En resumen, para el punto inicial la igualdad (**2. 3. 1**) se transforma en:

$$m \cdot g \cdot y = C. \qquad \textbf{(2. 3. 2)}$$

En el punto *(u, v)* tenemos que:

- La energía cinética es: $E_{cinética} = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

  La energía cinética para un objeto en movimiento se calcula mediante la fórmula:

  $E_{cinética} = \frac{1}{2}mv^2$, en donde *m* es la masa y *v* es la velocidad del objeto.

  En este caso $v = \frac{ds}{dt}$.

- La energía potencial es: $E_{potencial} = m \cdot g \cdot v$, según lo que se explicó anteriormente.

En resumen, la igualdad (**2. 3. 1**) se transforma en:

$$m \cdot g \cdot v + \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C. \qquad \textbf{(2. 3. 3)}$$

Como la constante *C* no cambia, según el principio de conservación de energía, podemos igualar las expresiones (**2. 3. 2**) y (**2. 3. 3**), para llegar a que: $\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg\left(y-v\right)$, de donde finalmente se deduce que: $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g\left(y-v\right)}$, o equivalentemente:

$$-\frac{ds}{\sqrt{2g\left(y-v\right)}} = dt\ . \qquad \textbf{(2. 3. 4)}$$

El signo "–" indica que el objeto se mueve hacia el origen.

El problema mecánico de Abel asume conocido el tiempo de descenso. Este tiempo, que depende de la altura inicial *y*, lo denominaremos *T(y)* y cumple: $T\left(y\right) = \int_{v=y}^{v=0} dt = -\int_{v=0}^{v=y} dt$.

Si remplazamos la expresión (**2. 3. 4**) obtenemos: $T(y)=\int_{v=0}^{v=y}\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}$.

Pero como deseamos que aparezca la variable de integración *v*, usamos el hecho que:

$s'(v)=\frac{ds}{dv}$ para escribir: $T(y)=\int_0^y\frac{s'(v)}{\sqrt{2g(y-v)}}dv=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y(y-v)^{-\frac{1}{2}}s'(v)dv$.

Esta última integral es precisamente la convolución de dos funciones, por lo que:

$$T(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\left(y^{-\frac{1}{2}}*s'(y)\right).$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados y usamos el teorema de convolución:

$$\mathcal{L}\left[T(y)\right]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}}\right]\mathcal{L}\left[s'(y)\right]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\mathcal{L}\left[s'(y)\right].$$

Finalmente reordenamos y llegamos a:

$$\mathcal{L}\left[s'(y)\right]=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}\left[T(y)\right]. \qquad \textbf{(2. 3. 5)}$$

Mediante esta fórmula es posible calcular la curva *y(x)*, ya que a partir de ella obtenemos, en teoría, $s'(y)$ y luego, usando la fórmula de longitud de una curva:

$s'(y)=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ llegamos a una ecuación diferencial, mediante la cual se puede determinar *y(x)*.

Una aplicación concreta del problema mecánico de Abel lo constituye el problema de la curva tautócrona. El problema de la curva tautócrona fue de importancia en el estudio de los relojes de péndulo o de los péndulos, en general: ¿con qué trayectoria debería oscilar un péndulo de tal manera que su período fuese siempre el mismo, independientemente de la amplitud de oscilación? Esto es equivalente a encontrar la trayectoria por la que un objeto caerá en un tiempo constante, sin importar de qué altura caiga. Según el modelo que acabamos de presentar, esto significa que *T(y) = constante*.

El problema de la curva tautócrona fue resuelto por el astrónomo y matemático holandés Christiaan Huygens en 1659 usando métodos geométricos y publicado en su libro "*Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum*" (*el reloj de péndulo y el movimiento pendular*) en 1673.

Fig. 2.5: Retrato de Christiaan Huygens

Huygens requería de una forma de medir el tiempo de manera precisa para sus estudios astronómicos y fue así que abordó este problema. En 1656, Huygens patentó el reloj de péndulo, que mejoraba sustancialmente la forma de medir el tiempo.

Ejemplo 2. 3. 6: La curva tautócrona.

Hallar la forma del hilo, es decir *y(x)*, si el tiempo de descenso es constante, independientemente de la altura del punto inicial.

Esta curva se denomina curva tautócrona.

Solución:

En este caso $T(y)=T_0$, y por lo tanto, $\mathcal{L}\left[T(y)\right]=\dfrac{T_0}{p}$.

Reemplazamos esto en la fórmula (**2. 3. 5**) y obtenemos:

$$\mathcal{L}\left[s'(y)\right]=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}T_0\,p^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}T_0\sqrt{\frac{\pi}{p}}=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}T_0\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Aplicando la transformada inversa, llegamos a que:

$$s'(y)=\sqrt{\frac{2gT_0^{\,2}}{\pi^2 y}}\ .$$

Como $s'(y)=\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$, se deduce que:

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{K}{y},\ \text{con}\ K=\frac{2gT_0^{\,2}}{\pi^2}\ .$$

Eliminamos el cuadrado, separamos variables y obtenemos:

$$dx=\sqrt{\frac{K}{y}-1}\ dy=\sqrt{\frac{K-y}{y}}\ dy\ .$$

Integramos: $x=\displaystyle\int\sqrt{\frac{K-y}{y}}\ dy$.

Hacemos el cambio de variables $y=K\,sen^2\theta$ y se llega a que:

$$x=2K\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{K}{2}\left(2\theta+sen2\theta\right)+C\ .$$

Pero como la curva debe pasar por el origen, $C = 0$.

En resumen, la curva tautócrona tiene coordenadas paramétricas:

$$x = \frac{K}{2}\left(2\theta + sen2\theta\right) \qquad \text{e} \qquad y = K\, sen^2\theta = \frac{K}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right)$$

Ambas expresiones se pueden simplificar. Si hacemos: $a = \frac{K}{2}$ y $2\theta = \phi$,

obtenemos las coordenadas parámetricas de la curva tautócrona:

$$\begin{cases} x = a\left(\phi + sen\phi\right) \\ y = a\left(1 - \cos\phi\right) \end{cases}$$

Esta curva es también conocida como *cicloide*.

La siguiente imagen muestra cuatro estados de un péndulo que usa la cicloide tanto como delimitación como para el trayecto del extremo del péndulo.

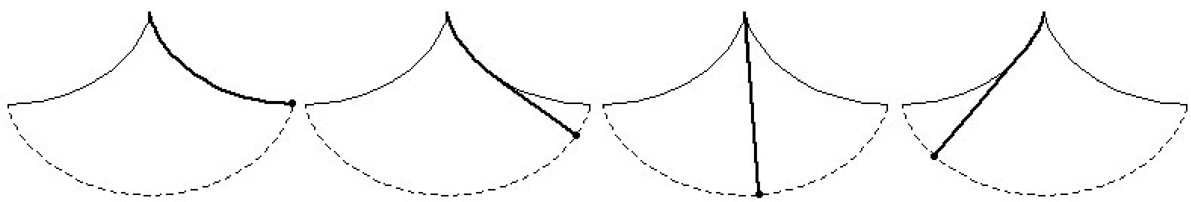


Fig. 2.6: Cuatro estados de un pendulo acotado por dos cicloides

Huygens de hecho construyó un reloj usando un péndulo como el que se muestra. Sin embargo, desafortunadamente el roce del péndulo con las paredes con forma de cicloide introducen un error y a la larga se pierde más de lo que se gana con usar la forma de cicloide. En la figura 2.7, se puede ver arriba a la derecha un péndulo acotado por dos paredes con forma de cicloide.

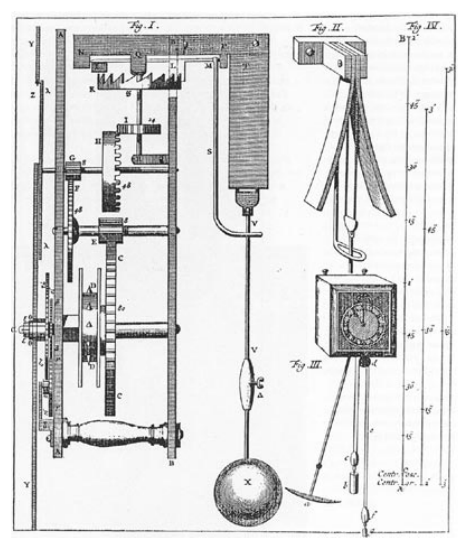


Fig. 2.7: Diagramas del Horologium oscillatorium de Huygens

Veamos una forma diferente de resolver este problema

Ejemplo 2. 3. 7:

La fórmula **(2. 3. 5)**, $\mathcal{L}\left[s'(y)\right]=\sqrt{\frac{2g}{\pi}}p^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}\left[T(y)\right]$, se puede escribir también como:

$$\mathcal{L}\left[s'(y)\right]=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\,p\,\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot\mathcal{L}\left[T(y)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\,p\,\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\mathcal{L}\left[T(y)\right].$$

$$=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\,p\,\mathcal{L}\left[y^{-\frac{1}{2}}*T(y)\right]$$

Sabemos que: $p\mathcal{L}\left[f(x)\right]=\cdot\mathcal{L}\left[f'(x)\right]+f(0)$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}\left[s'(y)\right]=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\left(\mathcal{L}\left[\frac{d}{dy}\left(y^{-\frac{1}{2}}*T(y)\right)\right]+\left(y^{-\frac{1}{2}}*T(y)\right)(0)\right).$$

Pero $\left(y^{-\frac{1}{2}}*T(y)\right)(0)=0$, por lo que:

$$\mathcal{L}\left[s'(y)\right]=\mathcal{L}\left[\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\left(y^{-\frac{1}{2}}*T(y)\right)\right].$$

Aplicamos la transformada inversa y obtenemos:

$$s'(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\left(y^{-\frac{1}{2}}*T(y)\right),$$

o equivalentemente:

$$s'(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{T(t)}{\sqrt{y-t}}dt\,. \qquad \textbf{(2. 3. 8)}$$

Esta fórmula nos permite resolver el problema de la curva tautócrona de una manera alternativa.

En efecto, si $T(y)=T_0$, entonces:

$$\int_0^y\frac{T_0}{\sqrt{y-t}}dt=-2T_0\left(y-t\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^y=2T\sqrt{y}\,.$$

Si reemplazamos en la fórmula (**2. 3. 8**), obtenemos:

$$s'(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\left(2T_0\sqrt{y}\right)=\sqrt{\frac{2gT_0{}^2}{\pi^2 y}}\ .$$

Esta expresión es idéntica a la que habíamos llegado en el ejemplo anterior y de aquí se resuelve como ya se vio.

Ejemplo 2. 3. 9: Resolver el problema mecánico de Abel, es decir hallar la curva de descenso, si el tiempo de descenso es $T(y)=k\sqrt{y}$, con *k*: constante.

Solución:

Al igual que en ejemplo anterior, usaremos la fórmula (**2. 3. 8**):

$$s'(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{T(t)}{\sqrt{y-t}}dt\ .$$

Haciendo los cambios de variables: $u=\sqrt{t}$ y posteriormente $u=\sqrt{y}\sin z$, la integral $I=\int_0^y\frac{T(t)}{\sqrt{y-t}}dt$ se transforma en:

$$I=2yk\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,dz=yk\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}ky\ \ .$$

Reemplazamos en la fórmula (**2. 3. 8**) y obtenemos:

$$s'(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\left(\frac{k\pi}{2}y\right)=\frac{\sqrt{2g}k}{2}\ .$$

Y como $s'(y)=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, llegamos a que:

$$\frac{gk^2}{2}=1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{gk^2}{2}-1}\Rightarrow dx=\sqrt{\frac{gk^2}{2}-1}\ dy.$$

Integrando a ambos lados, y haciendo $\frac{1}{\sqrt{\frac{gk^2}{2}-1}}=c$ llegamos a que la curva de descenso es la recta: $y = cx$.

Es interesante notar que si $k=\sqrt{\frac{2}{g}}$, entonces $c=\infty$, lo cual significa que la curva de descenso es una recta vertical y por lo tanto hablamos de caída libre. Y efectivamente es un hecho conocido que el tiempo que demora un cuerpo en caer desde una altura inicial y es $T=\sqrt{\frac{2}{g}y}$.

Ejemplo 2. 3. 10: Probar que la ecuación diferencial $y''+a^2y=f$, con $y(0)=y'(0)=0$ tiene a $y(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\,dt$ como solución.

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados y obtenemos:

$$\mathcal{L}[y'']+a^2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[f].$$

Usamos las fórmulas (**1. 4. 4**) y (**1. 4. 2**) y las condiciones iniciales y queda:

$$p^2\mathcal{L}[y]+a^2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[f] \;.$$

Esto se puede rescribir como:

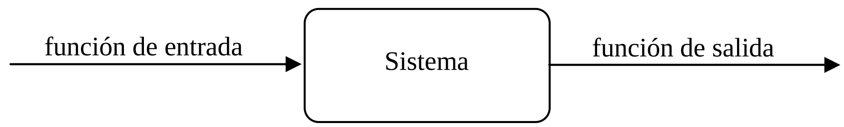
$$\mathcal{L}[y]=\frac{1}{p^2+a^2}\mathcal{L}[f]=\mathcal{L}\left[\frac{\sin ax}{a}\right]\mathcal{L}[f(x)]=\frac{1}{a}\mathcal{L}[\sin ax * f(x)].$$

Aplicamos la transformada inversa y obtenemos el resultado deseado:

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\,dt\,.$$

2. 4 Convolución: Respuesta de un sistema a un estímulo.

Cualquier sistema físico puede pensarse como un dispositivo que transforma una función (o señal) de entrada (*estímulo* o *input*) en una función (o señal) de salida (*respuesta* o *output*). Así por ejemplo la fuerza del viento (función de entrada) actúa sobre un edificio (sistema) y este empieza a oscilar (función de salida).



Tanto la función de entrada como la de salida y como las características del sistema pueden ser desconocidas. A veces se conoce la función de entrada y se desea obtener (o se conoce) una cierta respuesta a ese estímulo. El problema entonces es diseñar o determinar el sistema que responde de esa manera.

En otros casos se conoce el sistema y la respuesta y se desea obtener información acerca del estímulo que causó dicha respuesta. Por ejemplo, en accidentes de tránsito se conoce la respuesta (el auto chocado, las huellas dejadas al frenar, etc.), se conocen también algunas características del sistema (el tiempo, el estado de la calle, la hora del día, etc.) y se desea inferir, por ejemplo, con qué velocidad viajaba el auto.

Sacar información acerca de un terremoto, analizando el registro de un sismógrafo y conociendo, por supuesto, las características del sismógrafo es otro ejemplo.

Por último, puede que se desee conocer la respuesta de un sistema ante un cierto estímulo. En estos casos la convolución puede ser de utilidad.

Pero lo interesante del uso de la convolución es que no es necesario conocer las características del sistema. Basta conocer cómo responde el sistema ante un estímulo en particular para poder predecir cómo responderá ante cualquier otro estímulo.

Para entender cómo esto es posible, supongamos que el sistema se puede representar mediante la ecuación diferencial: $y'' + ay' + by = f(t)$ con condiciones iniciales: $y(0) = y'(0) = 0$. Aquí *f(t)* es la función de entrada (o estímulo), *a* y *b* son constantes que representan las características del sistema e *y(t)* es la respuesta que deseamos calcular.

La función de entrada particular podría ser cualquiera, sin embargo se suele elegir la *función de paso* $u(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t \geq 0 \end{cases}$, por su simpleza y por su utilidad en ingeniería eléctrica, ya que representa el concepto de apagado – encendido. La respuesta a la función de paso la designaremos por *A(t)* y se conoce como *respuesta indicial* o *respuesta a la función de paso*.

Tenemos entonces que: $A'' + aA' + bA = u(t)$.

Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados, usamos las condiciones iniciales y la fórmula del ejemplo 1. 3. 7, llegamos a:

$$p^2\mathcal{L}[A] + ap\mathcal{L}[A] + b\mathcal{L}[A] = \frac{1}{p}.$$

Despejamos $\mathcal{L}[A]$ y obtenemos:

$$\mathcal{L}[A]=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+ap+b}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{Z(p)}. \quad \textbf{(2. 4. 1)}$$

Si hacemos lo mismo con la ecuación original, se llega a que:

$$\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[f(t)]\cdot\frac{1}{Z(p)}.$$

La función *Z(p)* depende de los parámetros del sistema. Como aparece en ambas fórmulas, podemos usarla para obtener la siguiente igualdad:

$$\mathcal{L}[y]=p\mathcal{L}[A]\mathcal{L}[f(t)].$$

En este punto es interesante notar dos cosas: primero, la fórmula anterior no depende de los parámetros del sistema (es decir, y como ya señalamos, no es necesario conocer las características del sistema), pero sí se requiere conocer la respuesta a una función particular, en este caso la función paso. Segundo, en la parte derecha de la igualdad aparece la multiplicación de dos transformadas, y por lo tanto, usando el teorema de convolución la fórmula se puede escribir como:

$$\mathcal{L}[y]=p\mathcal{L}[A*f].$$

Pero usando $\mathcal{L}[f'(x)]=p\mathcal{L}[f(x)]-f(0)$ (fórmula (**1. 4. 2**)) y las condiciones iniciales, podemos rescribir el lado derecho de esta nueva igualdad y llegar a:

$$\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}\left[(A*f)'\right].$$

Por lo tanto, aplicando la transformada inversa y recordando que *A*f = f*A*, es posible llegar a las siguientes dos expresiones que permiten calcular la función respuesta:

$$y(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau \qquad \text{y} \qquad y(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t f(t-\tau)\,A(\tau)\,d\tau .$$

Para simplificar aún más estas expresiones, usamos la Regla de Leibnitz:

$$\frac{d}{dt}\int_u^v G(t,x)\,dx = \int_u^v \frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\,dx + G(t,v)\frac{dv}{dt} - G(t,u)\frac{du}{dt}$$

y ambas expresiones se transforman con poco cálculo en:

$$y(t) = \int_0^t A'(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \qquad \textbf{(2. 4. 2)}$$

$$y(t) = \int_0^t A(t-\tau)\, f'(\tau)\, d\tau + f(0)A(t) \qquad \textbf{(2. 4. 3)}$$

Estas dos fórmulas permiten encontrar la función de respuesta de un sistema ante un estímulo, conociendo cómo se comporta ese sistema ante la función paso.

Como dijimos anteriormente, la función particular que usamos (la función de paso en el ejemplo) no es la única que se puede usar. Podemos utilizar cualquier función de la cual sepamos su respuesta. La función de paso es una opción bastante lógica debido a lo simple de su transformada de Laplace.

Otra elección posible es la *función delta de Dirac*, $\delta(x)$. En el ejemplo 1. 3. 13 demostramos que si $\varepsilon > 0$ y $f_\varepsilon(x)$ la función definida por: $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & si\ 0 \le x \le \varepsilon \\ 0 & si\ x > \varepsilon \end{cases}$,

entonces: $\mathcal{L}\left[f_\varepsilon(x)\right] = \dfrac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$ y $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\left[f_\varepsilon(x)\right] = 1$. La función delta de Dirac se define como $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$ y cumple entre otras, la siguiente propiedad: $\mathcal{L}\left[\delta(x)\right] = 1$.

Así como la respuesta a la función de paso *u(t)* se denota por *A(t)* y se llama respuesta indicial, de manera análoga para la función delta de Dirac la respuesta se denota por *h(t)* y se llama *respuesta de impulso*.

Y así como al aplicar la transformada de Laplace a ambos lados obtuvimos:

$$\mathcal{L}[A](p)=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{Z(p)},$$

análogamente, para la función delta de Dirac se llega a:

$$\mathcal{L}[h](p)=\frac{1}{Z(p)}. \qquad \textbf{(2. 4. 4)}$$

Ambas fórmulas se pueden combinar para llegar a la igualdad:

$$\mathcal{L}[A]=\frac{\mathcal{L}[h]}{p}.$$

Pero según la fórmula (**1. 4. 11**) se tiene que: $\mathcal{L}\left[\int_0^x f(s)ds\right]=\frac{F(p)}{p}$, por lo que

$$\mathcal{L}[A]=\mathcal{L}\left[\int_0^x h(s)ds\right].$$

Eliminando la transformada de Laplace, obtenemos: $A(t)=\int_0^t h(s)ds$.

Y derivando obtenemos: $A'(t)=h(t)$.

Con todo lo anterior, la fórmula (2. 4. 2) puede escribirse como:

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad \textbf{(2. 4. 5)}$$

o en términos de la convolución:

$$y(t)=(h*f)(t). \qquad \textbf{(2. 4. 6)}$$

En resumen:

Si se desea resolver la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = f(t)$ se pueden utilizar los siguientes pasos:

Alternativa 1:

1. Calcular *A(t)* usando la fórmula (**2. 4. 1**).
2. Calcular *y(t)* usando (**2. 4. 2**) ó (**2. 4. 3**).

Alternativa 2:

1. Calcular *h(t)* usando la fórmula (**2. 4. 4**).
2. Calcular *y(t)* usando (**2. 4. 5**).

Ejemplo 2. 4. 7: Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 5y' + 6y = 5e^{3t}, \quad y(0) = y'(0) = 0 .$$

Solución: Usando la alternativa 1:

Paso 1: $\mathcal{L}[A] = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 + 5p + 6} = \frac{1}{p(p+2)(p+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{p} - \frac{\frac{1}{2}}{p+2} + \frac{\frac{1}{3}}{p+3}$.

Aplicamos la transformada inversa:

$$A(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} .$$

Derivamos: $A'(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$.

Paso 2: Como $f(t)=5e^{3t}$, la fórmula (**2. 4. 3**) queda:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t A'(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \\
&= \int_0^t \left(e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}\right) 5e^{3\tau}\, d\tau \\
&= 5\int_0^t e^{5\tau-2t} - e^{6\tau-3t}\, d\tau \\
&= 5\left(\frac{e^{5\tau-2t}}{5} - \frac{e^{6\tau-3t}}{6}\right)\Bigg|_o^t \\
&= 5\left[\left(\frac{e^{3t}}{5} - \frac{e^{3t}}{6}\right) - \left(\frac{e^{-2t}}{5} - \frac{e^{-3t}}{6}\right)\right] \\
&= \frac{1}{6}e^{3t} - e^{-2t} + \frac{5}{6}e^{-3t}.
\end{aligned}$$

Solución: Usando la alternativa 2:

Paso 1: $\mathcal{L}[h] = \dfrac{1}{p^2+5p+6} = \dfrac{1}{(p+2)(p+3)} = \dfrac{1}{p+2} - \dfrac{1}{p+3}$.

Aplicamos la transformada inversa:

$$h(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \text{ .}$$

Paso 2: Como $f(t)=5e^{3t}$, la fórmula (**2. 4. 5**) queda:.

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = \int_0^t \left(e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}\right) 5e^{3\tau}\, d\tau \text{ .}$$

Esto es exactamente a lo que llegamos usando el método anterior, por lo que con los mismos cálculos se llega a:

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{3t} - e^{-2t} + \frac{5}{6}e^{-3t}.$$

El ejemplo anterior muestra que es levemente mejor la segunda alternativa. Por un lado, la descomposición en fracciones parciales del paso 1 es más fácil y por otro lado se evita tener que derivar.

Ejemplo 2. 4. 8: Resolver la ecuación diferencial: $y'' + y' - 6y = t,\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

Solución: (Usando la alternativa 2)

Paso 1: $\mathcal{L}[h] = \dfrac{1}{p^2 + p - 6} = \dfrac{1}{(p-2)(p+3)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{p-2} - \dfrac{\frac{1}{5}}{p+3}$.

Aplicamos la transformada inversa:

$$h(t) = \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right).$$

Paso 2: Como $f(t) = t$, la fórmula (**2. 4. 5**) queda:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{5}\int_0^t \tau e^{2(t-\tau)} - \tau e^{-3(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{e^{2t-2\tau}}{4}(-2\tau - 1) - \frac{e^{3\tau-3t}}{9}(3\tau - 1)\right)\Bigg|_o^t \\ &= \frac{1}{5}\left[-\frac{2t+1}{4} - \frac{3t-1}{9} - \left(-\frac{e^{2t}}{4} + \frac{e^{3t}}{9}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36} + \frac{e^{2t}}{20} - \frac{e^{-3t}}{45}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. 4. 9: Resolver la ecuación diferencial: $y'' - y' = t^2,\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

Solución: Usando la alternativa 2:

Paso 1: $\mathcal{L}[h] = \dfrac{1}{p^2 - p} = \dfrac{1}{p(p-1)} = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}$.

Aplicamos la transformada inversa:

$$h(t) = e^t - 1.$$

Paso 2: Como $f(t) = t^2$, la fórmula (**2. 4. 5**) queda:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \tau^2 e^{t-\tau} - \tau^2 d\tau \\ &= \left(-e^{t-\tau}\left(\tau^2 + 2\tau + 2\right) - \frac{\tau^3}{3} \right)\Bigg|_o^t \\ &= -\left(t^2 + 2t + 2\right) - \frac{t^3}{3} + 2e^t \\ &= -\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t - 2 + 2e^t. \end{aligned}$$

Nota: En los dos últimos ejemplos no se da el detalle de algunos cálculos, pero el lector podrá comprobarlos sin mayor esfuerzo.

Finalizaremos con dos aplicaciones muy estudiadas en la física: el sistema masa- resorte y los circuitos eléctricos.

Ejemplo 2. 4. 10: La vibración de un sistema masa-resorte no amortiguado sobre el cual actúa una fuerza externa, se puede modelar con la ecuación diferencial:

$$Mx'' + kx = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

M es la masa del resorte, *k* la constante de rigidez del resorte, *x(t)* es el desplazamiento del resorte y *f(t)* es la fuerza externa que actúa sobre el resorte.

a) Si *f(t)* es la función paso *u(t)* y resolvemos aplicando la fórmula (**2. 4. 1**), queda:

$$\mathcal{L}[A] = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{Mp^2 + k}.$$

Para separar esta expresión usando fracciones parciales, hay que tener en cuenta que tanto la masa M como la constante k son magnitudes positivas, por lo que el denominador de la segunda fracción no es factorizable en $\mathbb{R}$. Considerando esto, obtenemos:

$$\mathcal{L}[A] = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{p} - \frac{Mp}{Mp^2 + k}\right).$$

Aplicando la transformada inversa:

$$A(t) = \frac{1}{k}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right)\right).$$

b) Si, en cambio, *f(t)* es la función delta de Dirac, $\delta(x)$ y usamos la fórmula (**2. 4. 4**), queda:

$$\mathcal{L}[h](p) = \frac{1}{Mp^2 + k},$$

de donde:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{Mk}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right).$$

c) Para una función *f(t)* cualquiera las fórmulas, (**2. 4. 3**) y (**2. 4. 5**) quedan, respectivamente:

$$x(t) = \frac{1}{k}\left[\int_0^t \left(t - \tau + \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}(t-\tau)\right)\right) f'(\tau)\,d\tau + f(0)\left(t + \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)\right)\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{Mk}}\int_0^t \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}(t-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau$$

Ejemplo 2. 4. 11: La corriente *I(t)* en un circuito eléctrico, con inductancia *L* y resistencia *R* y sobre el que actúa una fuerza electromotriz *E(t)* se modela con la ecuación diferencial: $L\frac{dI}{dt}+RI=E(t),\ I(0)=0$.

a) Si $E(t) = E_0\, u(t)$ y aplicamos los métodos ya estudiados, queda:

$$\mathcal{L}[I]=\frac{E_0}{p}\cdot\frac{1}{Lp+R}=\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{L}{Lp+R}\right).$$

Aplicando la transformada inversa:

$$I(t)=\frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

b) Si, en cambio, $E(t) = E_0\,\delta(t)$, queda:

$$\mathcal{L}[I]=\frac{E_0}{Lp+R},$$

de donde: $$I(t)=\frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

c) Supongamos, finalmente, que: $E(t)=E_0 sen\,\omega t$.

Sabemos por la fórmula (**2. 4. 6**) que: $y(t)=(h*f)(t)$, pero no conocemos *h(t)*.

Sin embargo, *h(t)* se puede calcular fácilmente: en la parte b) demostramos que si $E(t) = E_0\,\delta(t)$, entonces $I(t)=\frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$.

Esto implica que si: $E(t) = \delta(t)$, entonces $I(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$.

Así: $$I(t)=\frac{E_0}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\sin(\omega\tau)\,d\tau\,.$$

Si usamos la siguiente fórmula: $\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$,

obtenemos:

$$\begin{aligned}
I(t)&=\frac{E_0e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin(\omega\tau)\,d\tau\\
&=\frac{E_0e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\left(\frac{e^{\frac{R}{L}\tau}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega\tau-\omega\cos\omega\tau\right)\right)\Bigg|_0^t\\
&=\frac{E_0e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\left(\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right)+\frac{\omega}{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}\right)\\
&=\frac{LE_0}{R^2+L^2\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t+\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right).
\end{aligned}$$

Capítulo 3: Ecuaciones de Volterra

3. 1 Ecuaciones integrales.

Una ecuación en que la incógnita es una función $\phi(x)$ que aparece dentro de una integral, se denomina **ecuación integral**.

Existen diferentes clasificaciones de las ecuaciones integrales.

Fig. 3.1: Fotografía de Erik Fredholm

Si los límites de integración de la integral son constantes, la ecuación se denomina **Ecuación Integral de Fredholm**, en honor al matemático sueco Erik Ivar Fredholm (1866 – 1927) quien estableció las bases de las ecuaciones integrales al estudiar la electroestática y la teoría de potencial.

Fig. 3.2: Fotografía de Vito Volterra

Si uno de los límites de integración de la integral es variable, la ecuación se denomina **Ecuación Integral de Volterra**, en honor al matemático italiano Vito Volterra (1860 – 1940) y sus estudios acerca de estas ecuaciones publicadas a fines del siglo XIX.

Si la función incógnita aparece solamente dentro de la integral, la ecuación se denomina **Ecuación Integral del primer tipo**. Si, en cambio, aparece tanto dentro como fuera de la integral, la ecuación se denomina **Ecuación Integral del segundo tipo**.

Estas definiciones no son acuciosas, por lo que formalizaremos:

Definición 3. 1. 1:

Una **ecuación integral de Fredholm del primer tipo** es una ecuación de la forma:

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)\phi(t)\,dt\ .$$

Una **ecuación integral de Fredholm del segundo tipo** es una ecuación de la forma:

$$f(x)=\phi(t)+\int_a^b k(x,t)\phi(t)\,dt\ .$$

Análogamente definimos las ecuaciones de Volterra:

Definición 3. 1. 2:

Una **ecuación integral de Volterra del primer tipo** es una ecuación de la forma:

$$f(x)=\int_a^x k(x,t)\phi(t)\,dt\ .$$

Una **ecuación integral de Volterra del segundo tipo** es una ecuación de la forma:

$$f(x)=\phi(t)+\int_a^x k(x,t)\phi(t)\,dt\ .$$

Observaciones:

1. En ambos casos, las funciones $f(x)$ y $k(x, t)$ son funciones conocidas. $k(x, t)$ se conoce como el **kernel** o **núcleo** de la ecuación integral.

2. Si $f(x) = 0$, la ecuación integral se dice **homogénea**.

3. 2 Ecuaciones de Volterra del segundo tipo.

Comenzaremos estudiando primero este tipo de ecuaciones, ya que los métodos que permiten resolver algunas de ellas, pueden posteriormente adaptarse a las de primer tipo.

Si el kernel en una ecuación de Volterra del segundo tipo es de la forma *k(x – t)*, entonces la ecuación se dice “**del tipo convolución**”. Este tipo de ecuaciones se puede resolver usando el teorema de convolución, ya que una ecuación del tipo convolución se puede escribir como:

$$f = \phi + k * \phi . \qquad \textbf{(3. 2. 1)}$$

Suponiendo además que f, ϕ y k admiten transformada de Laplace (que denominaremos F, Φ y K respectivamente) podemos aplicar la transformada a ambos lados, y se llega a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\phi] + \mathcal{L}[k * \phi] \\
&\Rightarrow F(p) = \Phi(p) + K(p)\Phi(p) \\
&\Rightarrow \Phi(p) = \frac{F(p)}{1+K(p)},\ si\ K(p) \neq -1.
\end{aligned}$$

Esto explica que, en teoría, es posible calcular $\phi(x)$, si se conocen *f(x)* y *k(x)* y si la ecuación es del tipo convolución. Veremos algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo 3. 2. 2: Resolver la ecuación $y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,y(t)dt$.

Solución:

Usaremos el método, en vez de la fórmula. Esto es, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación $y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,y(t)dt$, y obtenemos:

$$\mathcal{L}[y]=\frac{1}{p}-\mathcal{L}[x]\cdot\mathcal{L}[y]=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\cdot\mathcal{L}[y].$$

Despejamos $\mathcal{L}[y]$ y llegamos a: $\mathcal{L}[y]=\frac{p}{1+p^2}$.

Finalmente, aplicamos la transformada inversa para obtener: *y(x) = cos x.*

Ejemplo 3. 2. 3: Resolver la ecuación $y(x)=e^x\left[1+\int_0^x e^{-t}y(t)dt\right]$.

Solución:

Fijémonos que la integral que aparece no es la convolución entre dos funciones. Para que aparezca la convolución, debemos rescribir el ejercicio:

$$y(x)=e^x\left[1+\int_0^x e^{-t}y(t)dt\right]=e^x+e^x\int_0^x e^{-t}y(t)dt=e^x+\int_0^x e^{x-t}y(t)dta\ .$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación para obtener:

$$\mathcal{L}[y]=\frac{1}{p-1}+\mathcal{L}\left[e^x\right]\cdot\mathcal{L}[y]=\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-1}\mathcal{L}[y].$$

Despejamos $\mathcal{L}[y]$ y llegamos a: $\mathcal{L}[y]=\frac{1}{p-2}$.

Finalmente, aplicamos la transformada inversa para obtener: $y(x) = e^{2x}$.

Ejemplo 3. 2. 4: Resolver la ecuación $e^{-x} = y(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$.

Solución:

Al igual que en los dos ejercicios anteriores, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\frac{1}{p+1} = \mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[\cos x]\cdot \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[y] + \frac{2p}{p^2+1}\cdot \mathcal{L}[y] = \frac{(p+1)^2}{p^2+1}\cdot \mathcal{L}[y].$$

Despejamos $\mathcal{L}[y]$ y llegamos a: $\mathcal{L}[y](p) = \dfrac{p^2+1}{(p+1)^3}$.

Para poder aplicar la transformada inversa, es necesario descomponer la fracción de la derecha, mediante fracciones parciales. Así encontramos que:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{2}{(p+1)^3} .$$

Cada una de las fracciones se reconoce como transformada de Laplace. Es decir:

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}\left[e^{-x}\right] - 2\mathcal{L}\left[xe^{-x}\right] + \mathcal{L}\left[x^2e^{-x}\right].$$

Finalmente, aplicamos la transformada inversa para obtener: $y(x) = (x\text{-}1)^2 \cdot e^{-x}$.

Ejemplo 3. 2. 5: Resolver la ecuación $3sen(2x) = y(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt$.

Solución:

Nuevamente aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$3\frac{2}{p^2+4} = \mathcal{L}[y] + \frac{1}{p^2}\cdot \mathcal{L}[y] = \frac{p^2+1}{p^2}\cdot \mathcal{L}[y].$$

Al despejar $\mathcal{L}[y]$ obtenemos: $\mathcal{L}[y]=\dfrac{6p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$, y usando fracciones parciales

llegamos a la expresión: $\mathcal{L}[y]=\dfrac{8}{p^2+4}-\dfrac{2}{p^2+1}$.

Aplicamos la transformada inversa, obtenemos la solución:

$$y(x)=4\sin 2x-2\sin x.$$

Queremos dejar en claro que el método utilizado funcionó en los ejemplos anteriores, porque fuimos capaces de aplicar la transformada inversa de manera exitosa. Sin embargo, esto no siempre es posible. En estos casos, existe la siguiente alternativa: Calculamos anteriormente que si $f=\phi+k*\phi$, entonces: $\Phi(p)=F(p)\dfrac{1}{1+K(p)}$.

Si $\dfrac{1}{1+K(p)}$ fuese la transformada de Laplace de alguna función, resolver la ecuación sería muy fácil, ya que el lado derecho de la ecuación sería la transformada de la convolución.

Desgraciadamente dicha fracción <u>no puede ser</u> la transformada de ninguna función, ya que según el teorema 1. 3. 2, si *F(p)* es la transformada de una función *f*, entonces $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$. Pero como ya sabemos que: $\lim_{p\to\infty}K(p)=0$, entonces: $\lim_{p\to\infty}\dfrac{1}{1+K(p)}=1\neq 0$ por lo tanto la fracción no puede ser la transformada de ninguna función.

Sin embargo con un pequeño truco algebraico es posible escribir:

$$\Phi(p) = F(p)\frac{1}{1+K(p)} = F(p) - F(p)\frac{K(p)}{1+K(p)}.$$

La fracción que aparece ahora, tiende a 0 cuando *p* tiende a infinito, por lo que podría ser la transformada de alguna función *q(x)*. De ser así, podemos escribir:

$$\Phi(p) = F(p) - F(p)Q(p).$$

Y si aplicamos la transformada inversa queda:

$$\phi = f - q * f. \qquad \textbf{(3. 2. 6)}$$

Esto quiere decir que, si somos capaces de calcular q(x), hemos resuelto la ecuación. Fijémonos que la fórmula (**3. 2. 6**) es otra ecuación de Volterra del segundo tipo. Es decir hemos demostrado:

Teorema 3. 2. 7:

Si una ecuación integral de Volterra del segundo tipo es del tipo convolución, es decir si:

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^x k(x-t)\phi(t)\,dt,$$

entonces su solución es: $\phi(x) = f(x) - \int_0^x q(x-t) f(t)\,dt,$

siempre y cuando: $Q(p) = \dfrac{K(p)}{1+K(p)}$ sea la transformada de alguna función *q(x)*.

La función q(x) se denomina **kernel recíproco (o resolvente)** de la ecuación.

Es interesante notar que, a partir de $Q(p) = \dfrac{K(p)}{1+K(p)}$, se puede escribir:

Q(p) + Q(p)K(p) = K(p), y que si aplicamos la transformada inversa llegamos a que:

$$k = q + q * k. \qquad \textbf{(3. 2. 8)}$$

Es decir, el kernel y el kernel recíproco también se relacionan mediante una ecuación de Volterra del segundo tipo, llamada **ecuación resolvente**.

Ejemplo 3. 2. 9: Resolvamos nuevamente la ecuación

$$3\sin(2x) = y(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt \ .$$

Solución:

En este caso $Q(p) = \dfrac{K(p)}{1+K(p)} = \dfrac{\frac{1}{p^2}}{1+\frac{1}{p^2}} = \dfrac{1}{1+p^2}$, por lo que: *q(x)* = sin *x*.

En segundo lugar, $\int_0^x q(x-t)\, f(x)dt = 3\int_0^x \sin(x-t)\sin(2t)dt = 2\sin x - \sin 2x$

Finalmente, usando el teorema 3. 2. 7,

$$y(t) = 4\sin 2x - 2\sin x \ .$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación, tuvimos que usar fracciones parciales; usando el teorema 3. 2. 7 tuvimos que resolver una integral trigonométrica. A primera vista pareciera que ambos métodos son equivalentes en cuanto a dificultad algebraica, sin embargo, el teorema 3. 2. 7 es más general, ya que las fracciones parciales sólo sirven si hay una función racional. Esto, siempre y cuando encontrar *q(x)* sea simple, como lo fue en el ejemplo.

Resolveremos a continuación algunas ecuaciones integrales de Volterra de segundo tipo. Obtendremos así algunas fórmulas muy conocidas en el estudio de estas ecuaciones. Para un listado más completo, remítase al Anexo C o a [6].

Ejemplo 3. 2. 10: Resolver la ecuación $f(x) = y(x) + \int_0^x y(t)dt$.

Solución:

En este caso $Q(p) = \frac{K(p)}{1+K(p)} = \frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}} = \frac{1}{1+p}$, por lo que: $q(x) = e^{-x}$.

Según el teorema 3. 2. 7: $y(x) = f(x) - \int_0^x e^{-(x-t)} f(t)dt$.

Ejemplo 3. 2. 11: Resolver la ecuación $f(x) = y(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt$.

Solución:

En este caso $Q(p) = \frac{K(p)}{1+K(p)} = \frac{\frac{1}{p^2}}{1+\frac{1}{p^2}} = \frac{1}{1+p^2}$, por lo que: $q(x) = \sin x$.

Según el teorema 3. 2. 7: $y(x) = f(x) - \int_0^x \sin(x-t) f(t)dt$.

Ejemplo 3. 2. 12: Resolver la ecuación $f(x) = y(x) + \int_0^x (x-t)^2 y(t)dt$.

Solución:

En este caso $Q(p) = \frac{K(p)}{1+K(p)} = \frac{\frac{2}{p^3}}{1+\frac{2}{p^3}} = \frac{2}{2+p^3}$.

Usando fracciones parciales: $Q(p)=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{p+\sqrt[3]{2}}-\frac{p-2a}{p^2-ap+a^2}\right)$, $con\ a=\sqrt[3]{2}$.

Reordenamos y obtenemos:

$$Q(p)=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{p+\sqrt[3]{2}}-\frac{p-\frac{a}{2}}{\left(p-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}}+\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\left(p-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}}\right),\ con\ a=\sqrt[3]{2}\ .$$

Por lo tanto: $q(x)=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\left(e^{-\sqrt[3]{2}x}-e^{-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}x}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}x\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}x\right)\right]\right)$.

Según el teorema 3. 2. 7: $y(x)=f(x)-\int_0^x q(x-t)\,f(t)\,dt$.

Ejemplo 3. 2. 13: Resolver la ecuación $f(x)=y(x)+\int_0^x (x-t)^3\, y(t)dt$.

Solución:

En este caso $Q(p)=\frac{\frac{3!}{p^4}}{1+\frac{3!}{p^4}}=\frac{6}{p^4+6}$.

Usando fracciones parciales y bastante álgebra:

$$Q(p)=\frac{3}{a\sqrt{2a}}\left(\frac{p+\sqrt{2a}}{\left(p+\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2+\frac{a}{2}}-\frac{p-\sqrt{2a}}{\left(p-\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2+\frac{a}{2}}\right),\quad con\ a=\sqrt{6}\ .$$

Reordenamos y obtenemos:

$$Q(p)=\frac{3}{a\sqrt{2a}}\left(\frac{p+\frac{\sqrt{2a}}{2}}{\left(p+\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2+\frac{a}{2}}+\frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{\left(p+\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2+\frac{a}{2}}-\left[\frac{p-\frac{\sqrt{2a}}{2}}{\left(p-\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2+\frac{a}{2}}-\frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{\left(p-\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2+\frac{a}{2}}\right]\right)$$

Por lo tanto:

$$q(x)=\frac{3}{a\sqrt{2a}}\left(e^{-\frac{\sqrt{2a}}{2}x}\cos\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2a}}{2}x}\sin\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)-e^{\frac{\sqrt{2a}}{2}x}\cos\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)+e^{\frac{\sqrt{2a}}{2}x}\sin\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)\right)$$

$$=\frac{3}{a\sqrt{2a}}\left(2\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)\sin\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)-2\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)\cos\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)\right).$$

Si hacemos: $k=\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$, obtenemos finalmente:

$$q(x)=k\left(\cosh(kx)\sin(kx)-\sinh(kx)\cos(kx)\right).$$

Según el teorema 3. 2. 7: $y(x)=f(x)-\int_0^x q(x-t)f(t)dt$.

Ejemplo 3. 2. 14: Resolver la **ecuación integral de Abel de segundo tipo**:

$$f(x)=y(x)+\int_0^x\frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt.$$

Solución:

En este caso, recurriremos a un truco algebraico, ya que el método utilizado en los ejemplos anteriores no conduce a ningún resultado satisfactorio.

Sabemos, según el ejemplo (1. 3. 5), que: $\mathcal{L}\left[x^{-\frac{1}{2}}\right](p)=\sqrt{\frac{\pi}{p}}$.

Por lo tanto, si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, obtendremos: $F(p)=Y(p)+\sqrt{\frac{\pi}{p}}Y(p)$, de donde: $Y(p)=F(p)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\frac{\pi}{p}}}$.

Si racionalizamos llegamos a:

$$Y(p)=F(p)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)\frac{1}{1-\frac{\pi}{p}}=F(p)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)\frac{p}{p-\pi}=F(p)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)\left(1+\frac{\pi}{p-\pi}\right).$$

Distribuimos:

$$Y(p)=F(p)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)+\pi\frac{1}{p-\pi}F(p)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)$$
$$=\Psi(p)+\pi\frac{1}{p-\pi}\Psi(p),\ \ con\ \Psi(p)=F(p)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right).$$

Fijémonos ahora que $\Psi(p)=F(p)-F(p)\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ es la transformada de $\psi = f - f * x^{-\frac{1}{2}}$.

Por lo tanto: $y(x)=\psi(x)+\pi e^{\pi x} * \psi(x)$.

Ejemplo 3. 2. 15: Resolver la ecuación $f(x)=y(x)+\int_0^x e^{k(x-t)}y(t)dt$.

Solución:

En este caso $Q(p)=\dfrac{\frac{1}{p-k}}{1+\frac{1}{p-k}}=\dfrac{1}{p-(k-1)}$. Por lo tanto: $q(x)=e^{(k-1)x}$.

Según el teorema 3. 2. 7: $y(x)=f(x)-\int_0^x e^{(k-1)(x-t)}f(t)\,dt$.

Ejemplo 3. 2. 16: Resolver la ecuación $f(x)=y(x)+\int_0^x\left[e^{k(x-t)}-1\right]y(t)dt;\ \ con\ \ k\neq 0$.

Solución:

En este caso $Q(p)=\dfrac{\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p}}=\dfrac{k}{p^2-kp+k}$.

Para determinar *q(x)*, necesitamos saber si el polinomio de segundo grado es factorizable o no. Existen tres casos:

Caso 1: si k = 4

En este caso, el discriminante es: $\Delta = k^2 - 4k = 0$ y por lo tanto

$$Q(p) = \frac{4}{(p-2)^2}.$$

En consecuencia: $q(x) = 4xe^{2x}$.

Caso 2: si $k \in \left]0,4\right[$

En este caso, el discriminante es: $\Delta = k^2 - 4k < 0$ y por lo tanto el polinomio $p^2 - kp + k$ es irreductible. Si completamos cuadrado de binomio lo podemos escribir como: $\left(p - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$.

Entonces tenemos que: $$Q(p) = \frac{k}{\left(p - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}} = \frac{2k}{\sqrt{-\Delta}} \frac{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}{\left(p - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}}.$$

En consecuencia: $q(x) = \dfrac{2k}{\sqrt{-\Delta}} e^{\frac{k}{2}x} \sin\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right)$.

Caso 3: si $k \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]4, \infty\right[$

En este caso, el discriminante es: $\Delta = k^2 - 4k > 0$ y por lo tanto el polinomio $p^2 - kp + k$ se puede factorizar como: $\left(p - \dfrac{k+\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(p - \dfrac{k-\sqrt{\Delta}}{2}\right)$.

Si usamos fracciones parciales, obtendremos:

$$Q(p) = \frac{k}{\left(p - \frac{k+\sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(p - \frac{k-\sqrt{\Delta}}{2}\right)} = \frac{k}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{p - \frac{k+\sqrt{\Delta}}{2}} - \frac{1}{p - \frac{k-\sqrt{\Delta}}{2}}\right).$$

En consecuencia: $q(x) = \dfrac{k}{\sqrt{\Delta}}\left(e^{\frac{k+\sqrt{\Delta}}{2}x} - e^{\frac{k-\sqrt{\Delta}}{2}x}\right) = \dfrac{2k}{\sqrt{\Delta}} e^{\frac{k}{2}x} \sinh\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} x\right)$.

En resumen, según el teorema 3. 2. 7: $y(x) = f(x) - \int_0^x q(x-t) f(t)\,dt$, donde:

$$q(x) = \begin{cases} 4xe^{2x} & si\ k = 4 \\ \dfrac{2k}{\sqrt{|\Delta|}} e^{\frac{k}{2}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2} x\right) & si\ k \in \left]0, 4\right[\\ \dfrac{2k}{\sqrt{|\Delta|}} e^{\frac{k}{2}} \sinh\left(\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2} x\right) & si\ k \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]4, \infty\right[\end{cases} \quad \text{, con } \Delta = k^2 - 4k .$$

Ejemplo 3. 2. 17: Resolver la ecuación $f(x) = y(x) + \int_0^x (x-t) e^{k(x-t)} y(t)\,dt$.

Solución:

En este caso $Q(p) = \dfrac{\dfrac{1}{(p-k)^2}}{1 + \dfrac{1}{(p-k)^2}} = \dfrac{1}{(p-k)^2 + 1}$. Por lo tanto: $q(x) = e^{kx} \sin x$.

Según el teorema 3. 2. 7: $y(x) = f(x) - \int_0^x e^{k(x-t)} \sin(x-t) f(t)\,dt$.

Ejemplo 3. 2. 18: Resolver la ecuación $f(x) = y(x) + \int_0^x \cosh\left[k(x-t)\right] y(t)\,dt$.

Solución:

En este caso $Q(p) = \dfrac{\dfrac{p}{p^2 - k^2}}{1 + \dfrac{p}{p^2 - k^2}} = \dfrac{p}{p^2 + p - k^2}$.

El discriminante del polinomio de segundo grado es $\Delta = 4k^2 + 1 > 0$.

Esto significa que dicho polinomio es factorizable. Aplicamos fracciones parciales y obtenemos: $Q(p)=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\sqrt{\Delta}-1}{p-\frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}}+\frac{\sqrt{\Delta}+1}{p-\frac{-1-\sqrt{\Delta}}{2}}\right)$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
q(x)&=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left(\left(\sqrt{\Delta}-1\right)e^{\frac{\sqrt{\Delta}-1}{2}x}+\left(\sqrt{\Delta}+1\right)e^{-\frac{\sqrt{\Delta}+1}{2}x}\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sqrt{\Delta}\left(e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}+e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}\right)-\left(e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}-e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x}\right)\right).\\
&=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\sqrt{\Delta}\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right)-\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right)\right)
\end{aligned}$$

Según el teorema 3. 2. 7: $y(x)=f(x)-\int_0^x q(x-t)\,f(t)\,dt$.

Ejemplo 3. 2. 19: Resolver la ecuación $f(x)=y(x)+\int_0^x \sinh\left[k(x-t)\right]y(t)dt$.

Solución:

En este caso $Q(p)=\frac{\frac{k}{p^2-k^2}}{1+\frac{k}{p^2-k^2}}=\frac{k}{p^2+k-k^2}$.

Para determinar *q(x)*, necesitamos saber si el polinomio de segundo grado es factorizable o no. Existen tres casos:

Caso 1: si k = 1

En este caso: $Q(p)=\frac{1}{p^2}$.

En consecuencia: $q(x)=x$.

Caso 2: si $k \in \left]0,1\right[$

Si $k \in \left]0,1\right[$, entonces: $k - k^2 > 0$ y por lo tanto el polinomio $p^2 + k - k^2$ es

irreductible. En consecuencia: $q(x) = \frac{k}{A}\sin(Ax),\ con\ A = \sqrt{k - k^2}$.

Caso 3: si $k \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, \infty\right[$

En este caso, $k - k^2 < 0$ y por lo tanto el polinomio $p^2 + k - k^2$ se puede

factorizar como: $(p + A)(p - A),\ con\ A = \sqrt{k - k^2}$.

Si usamos fracciones parciales, obtendremos:

$$Q(p) = \frac{k}{(p + A)(p - A)} = \frac{k}{2A}\left(\frac{1}{p - A} - \frac{1}{p + A}\right).$$

En consecuencia: $q(x) = \frac{k}{2A}\left(e^{Ax} - e^{-Ax}\right) = \frac{k}{A}\sinh(Ax)$.

En resumen, según el teorema 3. 2. 7: $y(x) = f(x) - \int_0^x q(x - t)\, f(t)\, dt$, donde:

$$q(x) = \begin{cases} x & si\ k = 1 \\ \frac{k}{A}\sin(Ax) & si\ k \in \left]0,1\right[\\ \frac{k}{A}\sinh(Ax) & si\ k \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, \infty\right[\end{cases} \quad \text{, con } A = \sqrt{k - k^2} .$$

3. 3 Ecuaciones de Volterra del primer tipo.

Analicemos ahora las ecuaciones de Volterra del primer tipo.

Un primer método para resolverlas es el que usamos anteriormente, es decir, aplicar de inmediato la transformada de Laplace a la ecuación. Así, la ecuación de Volterra de primer tipo: $f(x) = \int_0^x k(x-t)\phi(t)\,dt$, quedará: $F(p) = K(p)\Phi(p)$, de donde:

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{K(p)}. \qquad \textbf{(3. 3. 1)}$$

Ejemplo 3. 3. 2: Resolver la ecuación $x^2 = \int_0^x (x-t)\,y(t)dt$.

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\frac{2}{p^3} = \mathcal{L}[x]\cdot\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p^2}\cdot\mathcal{L}[y].$$

Despejamos $\mathcal{L}[y]$ y llegamos a: $\mathcal{L}[y] = \frac{2}{p}$.

Por lo tanto, la solución a $x^2 = \int_0^x (x-t)\,y(t)dt$ es: *$y(x) = 2$.*

Debemos aclarar sin embargo, que lo más probable es que este método no funcione. La explicación de por qué el método en general fallará, es porque, para que $\frac{F(p)}{K(p)}$ sea efectivamente la transformada de alguna función, debe converger a *0* a medida que *p* tiende a infinito y eso no es necesariamente claro ni cierto.

Una segunda forma de resolver una ecuación de Volterra del primer tipo es usando el mismo método que usamos en la sección 2. 4 para determinar la fórmula 2. 4. 3. De esa manera podremos transformar, bajo ciertas condiciones del kernel, una ecuación del primer tipo en una del segundo tipo, que ya hemos analizado.

En efecto, si derivamos a ambos lados de la ecuación $f(x)=\int_0^x k(x-t)\phi(t)\,dt$ con respecto a *x*, obtenemos: $f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x k(x-t)\phi(t)\,dt$.

Si aplicamos la Regla de Leibnitz, se llega a:

$$f'(x)=k(0)\phi(x)+\int_0^x k'(x-t)\phi(t)\,dt . \qquad \textbf{(3. 3. 3)}$$

Si $k(0)\neq 0$, la ecuación (3. 3. 3) es una ecuación de Volterra del segundo tipo.

Si *k(0) = 0*, la ecuación (3. 3. 3) queda: $f'(x)=\int_0^x k'(x-t)\phi(t)\,dt$, es decir queda nuevamente una ecuación del primer tipo. En este caso, volvemos a usar el procedimiento: derivamos a ambos lados y aplicamos la regla de Leibnitz. Esto se repite hasta que en alguna iteración del procedimiento quede una ecuación del segundo tipo.

Sin embargo, dejamos claro que lo anterior es sólo un esquema que puede funcionar en muchos casos, pero en otros no es posible. Por ejemplo, si $k(x)=x^{-\frac{1}{2}}$, al aplicar la regla de Leibnitz queda una división por 0, ya que *k(0)* no está definido.

Formalizaremos lo anterior en un teorema:

Teorema 3. 3. 4:

Supongamos que una ecuación integral de Volterra del primer tipo es del tipo convolución, es decir: $f(x)=\int_0^x k(x-t)\phi(t)\,dt$.

Supongamos además que *f* y *k* admiten derivadas hasta de orden *n + 1*, que $k^{(i)}(0)=0,\ \forall i\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ y que $k^{(n)}(0)\neq 0$.

Entonces la ecuación de Volterra del primer tipo es equivalente a la ecuación del segundo tipo:

$$f^{(n+1)}(x)=k^{(n)}(0)\phi(x)+\int_0^x k^{(n+1)}(x-t)\phi(t)\,dt\,. \qquad \textbf{(3. 3. 5)}$$

Ejemplo 3. 3. 6: Resolver la ecuación $x=\int_0^x e^{x-t}y(t)dt$.

Solución:

Independientemente que esta ecuación puede resolverse con el primer método, lo resolveremos con el teorema 3. 3. 4 para mostrar cómo funciona.

En este caso: $k(x)=e^x$, $k(0)\neq 0$.

Por lo tanto, usamos la fórmula 3. 3. 5 con *n = 0*. La fórmula queda:

$$1 = y(x) + \int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt \,.$$

Según el ejemplo 3. 2. 15, sabemos que la solución a esta ecuación es:

$$y(x) = 1 - \int_0^x e^{(1-1)(x-t)}\,dt = 1 - x \,.$$

Dijimos que por ejemplo, si $k(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, no es posible usar el teorema 3. 3. 4. En estos casos existe un tercer método. En vez de resolver la ecuación $f(x) = \int_0^x k(x-t)\phi(t)\,dt$, resolveremos la ecuación $f(x) = \int_0^x k(x-t)\,y(t)\,dt$, con la condición: $y(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt$.

En realidad estamos resolviendo la misma ecuación, pero para una primitiva de la función buscada. Sin embargo, la condición impuesta nos llevara a un nuevo resultado. En efecto, si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de esta condición y usamos la fórmula **(1. 4. 11)**, nos damos cuenta que:

$$Y(p) = \mathcal{L}\left[y(x)\right](p) = \mathcal{L}\left[\int_0^x \phi(s)\,ds\right] = \frac{\Phi(p)}{p} \,.$$

Pero como la fórmula (3. 3. 1) establece que: $\Phi(p) = \frac{F(p)}{K(p)}$, obtenemos que:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p\,K(p)} \,. \qquad \textbf{(3. 3. 7)}$$

Si $\frac{F(p)}{K(p)}$ no es la transformada de alguna función, $\frac{F(p)}{p\,K(p)}$ bien podría serlo y de ser así, podemos calcular *y(x)*. Una vez calculada *y(x)*, basta derivar $y(x)=\int_0^x \phi(t)\,dt$ a ambos lados para obtener la función buscada.

Podemos generalizar esta idea, ya que la fórmula **(1. 4. 11. 2)** señala que $\mathcal{L}\left[\int_0^x \cdots \int_0^x f(s)(ds)^n\right]=\frac{F(p)}{p^n}$, de manera que, en vez de llegar a: $Y(p)=\frac{F(p)}{p\,K(p)}$, llegaremos a $Y(p)=\frac{F(p)}{p^n\,K(p)}$.

Es decir, primero probamos con $\Phi(p)=\frac{F(p)}{K(p)}$. Si falla el método, buscamos el primer valor de *n*, tal que $Y_n(p)=\frac{F(p)}{p^n\,K(p)}$ se pueda resolver. Luego calculamos $y_n(x)$ y finalmente lo derivamos *n* veces para encontrar la función buscada.

En este método hay que tener cuidado en lo siguiente: al hacer $y(x)=\int_0^x \phi(t)\,dt$, la función *y(x)* cumple la condición *y(0) = 0*. Por lo tanto, al usar un valor de *n* mayor que 1, hay que analizar si se debe cumplir: $y(0)=y'(0)=...=y^{(n-1)}(0)=0$.

Resolveremos a continuación algunas ecuaciones integrales de Volterra de primer tipo.

Ejemplo 3. 3. 8: Resolver la ecuación $f(x) = \int_0^x (x-t)y(t)dt$.

Solución:

En este caso $F(p) = \frac{Y(p)}{p^2}$, por lo que: $Y(p) = p^2 F(p)$.

No sabemos si esta última expresión es la transformada de alguna función.

Sin embargo, $Y_2(p) = \frac{p^2 F(p)}{p^2} = F(p)$, por lo que: $y_2(x) = f(x)$.

Derivando 2 veces, obtenemos la solución a la ecuación de Volterra:

Si $f(x) = \int_0^x (x-t)y(t)dt$, entonces: $y(x) = f''(x)$, siempre y cuando: $f(0) = f'(0) = 0$.

Observemos que la ecuación del ejemplo 3. 3. 2 era de la forma de este tipo de ecuaciones, con $f(x) = x^2$. Y efectivamente, la solución era $y(x) = 2$, que es la segunda derivada de $f(x)$.

Ejemplo 3. 3. 9: Resolver la ecuación $f(x) = \int_0^x (x-t)^n y(t)dt$.

Solución:

En este caso $F(p) = \frac{n!Y(p)}{p^{n+1}}$, por lo que: $Y(p) = \frac{p^{n+1}F(p)}{n!}$.

No sabemos si esta última expresión es la transformada de alguna función.

Sin embargo, $Y_{n+1}(p) = \frac{p^{n+1}F(p)}{n!\,p^{n+1}} = \frac{F(p)}{n!}$, por lo que: $y_{n+1}(x) = \frac{f(x)}{n!}$.

Derivando $n+1$ veces, obtenemos la solución a la ecuación de Volterra:

$y(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}$, siempre y cuando: $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$.

Ejemplo 3. 3. 10: Resolver la ecuación $f(x)=\int_0^x \sqrt{x-t}\,y(t)dt$.

Solución:

La transformada de Laplace de $f(x)=\sqrt{x}$ es $F(p)=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{1}{2p}$, por lo que la ecuación queda: $F(p)=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{1}{2p}Y(p)$, y, en consecuencia: $Y(p)=\frac{2pF(p)}{\sqrt{\frac{\pi}{p}}}=\frac{2}{\pi}p^2\sqrt{\frac{\pi}{p}}F(p)$.

Dividiendo por p^2, obtenemos:, $Y_2(p)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{p}}F(p)$, por lo que: $y_2(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt$.

Derivando, obtenemos la solución a la ecuación de Volterra:

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \text{, siempre y cuando: } f(0)=0 .$$

En este caso, no es necesaria la condición $f'(0)=0$, ya que como $y_2(x)$ es una integral, la condición se requiere sólo a partir de y_1.

Por ejemplo, si $f(x) = x$ (que no cumple $f'(0)=0$), es fácil comprobar que

$y(x)=\frac{8}{3\pi}x^{\frac{3}{2}}$ es la solución a la ecuación de Volterra y que cumple la fórmula

$y(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt$.

Al estudiar el problema mecánico de Abel en el capítulo anterior, llegamos a la expresión:

$$T(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y (y-v)^{-\frac{1}{2}}s'(v)dv .$$

Esta es una ecuación de Volterra del primer tipo, que resolveremos a continuación.

Ejemplo 3. 3. 11: Resolver la ecuación integral de Abel: $f\left(x\right)=\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$.

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace queda: $F(p)=\sqrt{\frac{\pi}{p}}Y(p)$, por lo que:

$$Y(p)=\frac{F\left(p\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{p}}}=\frac{p}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{p}}F(p)\,.$$

Dividiendo por *p*, obtenemos:, $Y_1(p)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{p}}F(p)$, por lo que: $y_1\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f\left(t\right)}{\sqrt{x-t}}\,dt$.

Derivando, obtenemos la solución a la ecuación de Volterra:

$$y\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f\left(t\right)}{\sqrt{x-t}}\,dt\,.$$

Usando la regla de Leibnitz y la conmutatividad de la convolución, podemos escribir:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f\left(t\right)}{\sqrt{x-t}}\,dt=\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f\left(x-t\right)}{\sqrt{t}}\,dt=\int_0^x \frac{f'\left(x-t\right)}{\sqrt{t}}\,dt+\frac{f\left(0\right)}{\sqrt{x}}=\int_0^x \frac{f'\left(t\right)}{\sqrt{x-t}}\,dt+\frac{f\left(0\right)}{\sqrt{x}}\,.$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación integral de Abel se puede escribir también

como: $$y\left(x\right)=\frac{f\left(0\right)}{\pi\sqrt{x}}+\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f'\left(t\right)}{\sqrt{x-t}}\,dt\,.$$

Nótese que la expresión a la que habíamos llegado en el capítulo anterior se puede escribir como: $T\left(y\right)=\int_0^y \left(y-v\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{s'\left(v\right)}{\sqrt{2g}}\,dv$. Si aplicamos ahora la fórmula que acabamos de calcular, obtenemos que: $\frac{s'\left(y\right)}{\sqrt{2g}}=\frac{T_0}{\pi\sqrt{y}}+\frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{T'\left(t\right)}{\sqrt{y-t}}\,dt$.

En el problema de la curva tautócrona, T*(y) = constante*, por lo que su derivada es cero, de manera que sólo queda $s'(y)=\sqrt{\frac{2gT_0^{\ 2}}{\pi^2 y}}$, que es la expresión que encontramos en el ejemplo 2. 3. 6.

Ejemplo 3. 3. 12: Resolver la ecuación $f(x)=\int_0^x (x-t)^\lambda y(t)dt$, con $0<\lambda<1$.

Solución:

La transformada de Laplace de $f(x)=x^\lambda$, con λ > -1 es: $F(p)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}$, por lo que la ecuación queda: $F(p)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}Y(p)$, y, en consecuencia: $Y(p)=\frac{p^{\lambda+1}F(p)}{\Gamma(\lambda+1)}$.

Como λ está entre 0 y 1, λ + 1 está entre 1 y 2. Por lo tanto, dividimos por p^2 y obtenemos:

$$Y_2(p)=\frac{p^{\lambda-1}F(p)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

Como λ - 1 está entre -1 y 0, podemos escribir: $Y_2(p)=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}F(p)\frac{1}{p^{1-\lambda}}$, en donde 1 - λ está nuevamente entre 0 y 1.

Para poder aplicar la transformada inversa necesitamos modificar esta última expresión como:

$$Y_2(p)=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(1-\lambda)}F(p)\frac{\Gamma(1-\lambda)}{p^{1-\lambda}} .$$

Ahora, aplicamos la transformada inversa para llegar a:

$$y_2(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(1-\lambda)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\lambda}dt .$$

Derivando 2 veces, obtenemos la solución a la ecuación de Volterra:

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(1-\lambda)}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\lambda}dt, \text{ siempre y cuando: } f(0)=0 .$$

La función gamma cumple muchas propiedades, entre ellas:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ y } \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen(\pi x)}.$$

Combinando estas propiedades, podemos escribir la solución como:

$$y(x) = \frac{sen(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\lambda}}\,dt \text{, siempre y cuando: } f(0)=0.$$

Ejemplo 3. 3. 13: Resolver la ecuación integral de Abel generalizada:

$$f(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\lambda}}\,dt \text{, con } 0<\lambda<1.$$

Solución:

Al aplicar la transformada de Laplace queda: $F(p) = \dfrac{\Gamma(1-\lambda)}{p^{1-\lambda}}Y(p)$, y, en consecuencia: $Y(p) = \dfrac{p^{1-\lambda}F(p)}{\Gamma(1-\lambda)}$.

Como λ está entre 0 y 1, 1 - λ también lo está. Por lo tanto, dividimos por *p* y obtenemos:

$$Y_1(p) = \frac{p^{-\lambda}F(p)}{\Gamma(1-\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}F(p)\frac{1}{p^{\lambda}} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)}F(p)\frac{\Gamma(\lambda)}{p^{\lambda}}.$$

Aplicamos la transformada inversa para llegar a:

$$y_1(x) = \frac{sen(\pi\lambda)}{\pi}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\lambda}}\,dt.$$

Derivamos y obtenemos la solución a la ecuación de Volterra:

$$y(x) = \frac{sen(\pi\lambda)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\lambda}}\,dt.$$

Nuevamente podemos aplicar la regla de Leibnitz para simplificar esta expresión, ya que como:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\lambda}}dt = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(x-t)}{t^{1-\lambda}}dt = \int_0^x \frac{f'(x-t)}{t^{1-\lambda}}dt + \frac{f(0)}{x^{1-\lambda}} = \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\lambda}}dt + \frac{f(0)}{x^{1-\lambda}}$$

La solución queda: $$y(x) = \frac{sen(\pi\lambda)}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\lambda}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\lambda}}dt\right].$$

Ejemplo 3. 3. 14: Resolver la ecuación $f(x) = \int_0^x e^{k(x-t)} y(t)dt$.

Solución:

En este caso $F(p) = \frac{Y(p)}{p-k}$, por lo que: $Y(p) = (p-k)F(p)$.

Dividimos por p^2 y obtenemos: $Y_2(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{k}{p^2}\right)F(p)$, por lo que:

$$y_2(x) = \int_0^x \left(1 - k(x-t)\right) f(t)dt .$$

Derivamos una vez y aplicamos la regla de Leibnitz para obtener:

$$y_1(x) = f(x) - k\int_0^x f(t)dt \text{, siempre y cuando: } f(0) = 0 .$$

Derivamos otra vez y obtenemos:

$$y(x) = f'(x) - k\, f(x) \text{, siempre y cuando: } f(0) = 0 .$$

Para este problema, hubiéramos llegado al mismo resultado, si hubiésemos usado la fórmula 3. 3. 3, es decir si hubiésemos transformado la ecuación en una del segundo tipo. Queda al lector verificar cuál de los dos métodos es más eficiente.

Ejemplo 3. 3. 15: Resolver la ecuación $f\left(x\right)=\int_{0}^{x}\cosh\left[k\left(x-t\right)\right]y(t)dt$.

Solución:

En este caso $F(p)=\dfrac{p}{p^{2}-k^{2}}Y(p)$, por lo que: $Y(p)=\dfrac{p^{2}-k^{2}}{p}F\left(p\right)$.

Dividimos por p^2 y obtenemos: $Y_{2}(p)=\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{k}{p^{3}}\right)F\left(p\right)$, por lo que:

$$y_{2}\left(x\right)=\int_{0}^{x}\left(1-\frac{k^{2}}{2}\left(x-t\right)^{2}\right)f\left(t\right)dt .$$

Derivamos una vez y aplicamos la regla de Leibnitz para obtener:

$$y_{1}\left(x\right)=f\left(x\right)-k^{2}\int_{0}^{x}\left(x-t\right)f\left(t\right)dt .$$

Derivamos una segunda vez, volvemos a usar la regla de Leibnitz y obtenemos la solución:

$$y\left(x\right)=f'\left(x\right)-k^{2}\int_{0}^{x}f\left(t\right)dt \text{, siempre que: } f\left(0\right)=0 .$$

3. 4 Integrales fraccionarias y Derivadas fraccionarias.

Finalizaremos el capítulo con la generalización del concepto de derivada e integral a los reales positivos.

El cálculo fraccional nace de las definiciones tradicionales del cálculo diferencial e integral, de la misma manera como en las potencias se generaliza la definición en los naturales, para obtener potencias de exponente racional. Y así como las potencias de exponente racional son básicamente raíces y su uso hoy es indiscutible, de la misma manera el cálculo fraccional tiene aplicaciones en muchos problemas modernos.

Se puede decir que el 30 de septiembre de 1695 es el día en que nació el cálculo fraccional. Esa es la fecha que aparece en una carta de l'Hôpital a Leibnitz, en donde aparece la pregunta: ¿qué pasaría en la notación $\frac{D^n x}{Dx^n}$ si n = 1/2? Leibnitz respondió: "Una contradicción aparente, de la que algún día se sacarán consecuencias útiles".

La mayor parte de la teoría del cálculo fraccional fue desarrollada a fines del siglo XIX, sin embargo la mayor cantidad de aplicaciones a la ingeniería y a la ciencia es de los últimos 100 años.

Para entender el cálculo fraccional, es necesario conocer la función gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du \quad (x \in \mathbb{R})$$

que es la generalización del concepto del factorial a los reales.

De hecho, si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Fig. 3.3: Fotografía de Bernhard Riemann

El método para extender el concepto de la integral a una integral fraccionaria, se conoce como Método de Riemann-Liouville

Observemos primero que $\int_0^x f(t)\,dt = (1 * f)(x)$, es decir que, bajo ciertas condiciones, una integral es igual a la convolución entre la función y 1.

Fig. 3.4: Fotografía de Joseph Liouville

¿Qué pasa si hacemos nuevamente la convolución y 1?

Obtendremos: $\int_0^x \int_0^\alpha f(t)\,dt\,d\alpha = (1 * (1 * f))(x)$.

Análogamente obtendremos la expresión más general:

$$\underbrace{\int_0^x \dots \int_0^\alpha}_{n \text{ veces}} f(t)\,dt\,d\alpha = (\underbrace{1 * \dots (1}_{n \text{ veces}} * f))(x).$$

Si llamamos I^n, a las n integrales consecutivas y 1^{*n} a las n convoluciones con 1, podemos escribir:

$$I^n f(x) = f * 1^{*n}. \qquad \textbf{(3. 4. 1)}$$

Analicemos las n convoluciones 1^{*n}:

$$1^{*2}=\int_0^x dt = x\,.$$

$$1^{*3}=\int_0^x t\;dt=\frac{x^2}{2}\,.$$

$$1^{*4}=\frac{1}{2}\int_0^x t^2\;dt=\frac{x^3}{3!}\,.$$

De manera que inductivamente se llega a que: $1^{*n}=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

Por lo tanto, remplazando esto en (3. 4. 1), podemos escribir las n integrales como una sola:

$$I^n f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\;dt\,. \qquad \textbf{(3. 4. 2)}$$

Esta última expresión, atribuida a Cauchy, tiene que ver con la ecuación de Volterra de primer tipo que resolvimos en los ejemplos 3. 3. 8 y 3. 3. 9. Efectivamente, en esos ejemplos demostramos que las soluciones a dichas ecuaciones tienen que ver con la n-ésima derivada, por lo que I^n tiene sentido con las definiciones habituales del cálculo.

En los ejemplos 3. 3. 12 y 3. 3. 13 resolvimos ecuaciones similares pero para valores de n entre 0 y 1 y entre -1 y 0 respectivamente. Por lo tanto, ya que dichas ecuaciones pueden ser resueltas para esos valores, es bastante lógico generalizar (3. 4. 2) y definir la μ-integral como:

$$I^\mu f(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t)\;dt\,. \qquad \textbf{(3. 4. 3)}$$

Ahora podemos definir la μ-derivada, ya que de la fórmula (3. 4. 3) tenemos que, si $I^{\mu} f(x)$ es la μ-integral, entonces *f(x)* es su μ-derivada.

Ahora bien, si conocemos $I^{\mu} f(x)$, (3. 4. 3) se transforma en la ecuación de Volterra de primer tipo: $g(x) = \int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t)\ dt$, donde: $g(x) = \Gamma(\mu) I^{\mu} f(x)$.

Si $0 < \mu < 1$, la ecuación anterior se transforma en la ecuación integral de Abel generalizada del ejemplo 3. 3. 13, con $\lambda = 1 - \mu$, cuya solución permite definir la μ-derivada como:

$$f^{(\mu)} = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(0)}{x^{\mu}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\mu}} dt \right].$$

Definición 3. 4. 4:

Sea *f* una función y $0 < \mu < 1$. Definimos la **derivada fraccionaria** $f^{(\mu)}(x)$ por:

$$f^{(\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(0)}{x^{\mu}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\mu}} dt \right].$$

Si $1 \le n < \mu < n+1$, con *n* natural, usamos la regla de Leibnitz en (3. 4. 3) *n* veces, para obtener nuevamente una ecuación del tipo (3. 4. 3), pero para un exponente entre 0 y 1, que acabamos de explicar. De esta manera es posible definir la μ-derivada para una función *f* para todo μ > 0.

Como dijimos, el método presentado aquí es el introducido por Riemann y Liouville. Sin embargo, esta no es la única forma de definir el cálculo fraccional. Existe otra opción que se conoce como el método de Grunwald-Letnikov.

Como sea, una vez definidas la integral y la derivada fraccionaria, se abren variados campos de investigación, como las ecuaciones integrales fraccionarias o las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Las aplicaciones han aparecido en métodos numéricos, en procesamiento de señales, en mecánica de sólidos y en termodinámica, muchas veces demostrándose que modelos de orden fraccional capturan fenómenos y propiedades que los modelos clásicos de orden entero simplemente pasan por alto.

El cálculo fraccional abre una cantidad de líneas de investigación y llena los huecos del cálculo tradicional de maneras que aún no se es capaz de comprender a cabalidad.

Referencias

[1] Carl B. Boyer, "**Historia de la Matemática**", Manuales / Ciencia y Tecnología, 1ª Edición, Alianza Editorial, Madrid, 1999.

[2] G. Gripenberg, S.-O. Londen, O. Staffans; "**Volterra Integral and Functional Equations**", Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1990.

[3] Erwin Kreiszig, **"Matemáticas Avanzadas para Ingeniería"**, Vol. 1; 2ª Edición, Limusa, 1996.

[4] Adam Loverro, 2004, "**Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer**"; http://www.nd.edu/~msen/Teaching/UnderRes/FracCalc.pdf (2006).

[5] John J. O'Connor, Edmund F. Robertson, 2006, "**The MacTutor History of Mathematics Archive**", http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk (2006).

[6] Andrei D. Polyanin (Ed.), 2004 – 2006, "**EqWorld: The World of Mathematical Equations**", http://eqworld.ipmnet.ru (2006).

[7] George F. Simmons, "**Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y notas históricas**"; 2ª Edición, McGraw-Hill; Madrid, 1991.

[8] Eric Weisstein, 2006, "**Wolfram Mathworld**", http://mathworld.wolfram.com (2006)

Anexo A: Tabla de Transformadas de Laplace

Nota: Entre paréntesis se encuentra el número del ejercicio en el texto (si corresponde).
Γ(x) es la función gamma.

Transformada de Laplace de expresiones que contienen potencias:

1. $f(x)=1 \quad F(p)=\dfrac{1}{p}$ (1.2.3)
2. $f(x)=x \quad F(p)=\dfrac{1}{p^2}$ (1.2.3)
3. $f(x)=x^n \quad F_n(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}}\left(n\in\mathbb{N}_0\right)$ (1.2.3)
4. $f(x)=x^{-\frac{1}{2}} \quad F(p)=\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$ (1.3.5)
5. $f(x)=x^{n-\frac{1}{2}}$

   $F_n(p)=\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n p^{n+\frac{1}{2}}}\left(n\in\mathbb{N}\right)$
6. $f(x)=x^{\lambda}\ (\lambda>-1) \quad F_\lambda(p)=\Gamma(\lambda+1)\,p^{-(\lambda+1)}$

Transformada de Laplace de expresiones que contienen funciones exponenciales:

7. $f(x)=e^{ax} \quad F(p)=\dfrac{1}{p-a}$ (1.2.4)
8. $f(x)=xe^{ax} \quad F(p)=\dfrac{1}{(p-a)^2}$
9. $f(x)=x^{\lambda-1}e^{ax}\ (\lambda>0) \quad F(p)=\dfrac{\Gamma(\lambda)}{(p-a)^{\lambda}}$
10. $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(e^{ax}-e^{bx}\right) \quad F(p)=\ln\dfrac{p-b}{p-a}$
11. $f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{a}{x}}$

    $F(p)=\dfrac{1}{2p}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\left(1+2\sqrt{ap}\right)e^{-2\sqrt{ap}}$
12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{a}{x}} \quad F(p)=\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}e^{-2\sqrt{ap}}$
13. $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}e^{-\frac{a}{x}} \quad F(p)=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ap}}$

Transformada de Laplace de expresiones que contienen funciones hiperbólicas:

14. $f(x)=\sinh ax \quad F(p)=\dfrac{a}{p^2-a^2}$ (1.2.8)
15. $f(x)=\sinh^2 ax \quad F(p)=\dfrac{2a^2}{p^3-4a^2p}$
16. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sinh ax \quad F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+a}{p-a}$
17. $f(x)=x^{\lambda-1}\sinh ax\,(\lambda>-1)$

    $F(p)=\frac{1}{2}\Gamma(\lambda)\left[(p-a)^{-\lambda}-(p+a)^{-\lambda}\right]$
18. $f(x)=\cosh ax \quad F(p)=\dfrac{p}{p^2-a^2}$ (1.2.9)
19. $f(x)=\cosh^2 ax \quad F(p)=\dfrac{p^2-2a^2}{p^3-4a^2p}$
20. $f(x)=x^{\lambda-1}\cos ax\,(\lambda>0)$

    $F(p)=\frac{1}{2}\Gamma(\lambda)\left[(p-a)^{-\lambda}+(p+a)^{-\lambda}\right]$

Transformada de Laplace de expresiones que contienen funciones trigonométricas:

21. $f(x)=\sin ax \quad F(p)=\dfrac{a^2}{a^2+p^2}$ (1.2.5)
22. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin ax \quad F(p)=\arctan\left(\dfrac{a}{p}\right)$
23. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin^2 ax \quad F(p)=\dfrac{\ln\left(1+4a^2p^{-2}\right)}{4}$
24. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin^2 ax$

    $F(p)=a\arctan\left(2ap^{-1}\right)-\frac{1}{4}p\ln\left(1+4a^2p^{-2}\right)$
25. $f(x)=\sin\left(2\sqrt{ax}\right) \quad F(p)=\dfrac{1}{p}\sqrt{\dfrac{a\pi}{p}}\,e^{-\frac{a}{p}}$
26. $f(x)=\cos ax \quad F(p)=\dfrac{p}{a^2+p^2}$ (1.2.6)

27. $f(x)=\cos^2 ax \qquad F(p)=\dfrac{p^2+2a^2}{p^3+4a^2p}$

28. $f(x)=\dfrac{1}{x}[1-\cos ax]$

$F(p)=\frac{1}{2}\ln\left(1+a^2p^{-2}\right)$

29. $f(x)=\dfrac{1}{x}[\cos ax-\cos bx]$

$F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+b^2}{p^2+a^2}$

30. $f(x)=\sqrt{x}\cos\left(2\sqrt{ax}\right)$

$F(p)=\dfrac{1}{2p^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}(p-2a)e^{-\frac{a}{p}}$

31. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(2\sqrt{ax}\right) \qquad F(p)=\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}e^{-\frac{a}{p}}$

32. $f(x)=\sin(ax)\sin(bx)$

$F(p)=\dfrac{2abp}{\left[(a+b)^2+p^2\right]\left[(a-b)^2+p^2\right]}$

33. $f(x)=\cos(ax)\sin(bx)$

$F(p)=\dfrac{b\left(p^2-a^2+b^2\right)}{\left[(a+b)^2+p^2\right]\left[(a-b)^2+p^2\right]}$

34. $f(x)=\cos(ax)\cos(bx)$

$F(p)=\dfrac{p\left(p^2+a^2+b^2\right)}{\left[(a+b)^2+p^2\right]\left[(a-b)^2+p^2\right]}$

35. $f(x)=\begin{cases} sen\, x & si\ 0\le x\le\pi \\ 0 & si\ x>\pi \end{cases}$

$$F(p)=\frac{e^{-p\pi}+1}{p^2+1} \qquad (1.3.10)$$

Transformada de Laplace de expresiones que contienen funciones de Bessel:

36. $f(x)=J_0(ax) \qquad F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$

37. $f(x)=J_\lambda(ax)\ (\lambda>-1)$

$F(p)=\dfrac{a^\lambda}{\sqrt{p^2+a^2}\left(p+\sqrt{p^2+a^2}\right)^\lambda}$

38. $f(x)=x^nJ_n(ax)\ \left(n\in\mathbb{N}\right)$

$F(p)=\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots\cdot(2n-1)a^n}{\left(p^2+a^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}$

39. $f(x)=x^\lambda J_\lambda(ax)\ \left(\lambda>-\frac{1}{2}\right)$

$F(p)=\dfrac{2^\lambda\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)a^\lambda}{\sqrt{\pi}\left(p^2+a^2\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}$

40. $f(x)=x^{\lambda+1}J_\lambda(ax)\ (\lambda>-1)$

$F(p)=\dfrac{2^{\lambda+1}\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)a^\lambda p}{\sqrt{\pi}\left(p^2+a^2\right)^{\lambda+\frac{3}{2}}}$

41. $f(x)=J_0\left(2\sqrt{ax}\right) \quad F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\frac{a}{p}}$

42. $f(x)=\sqrt{x}J_1\left(2\sqrt{ax}\right)\ F(p)=\dfrac{\sqrt{a}}{p^2}e^{-\frac{a}{p}}$

43. $f(x)=x^{\frac{\lambda}{2}}J_\lambda\left(2\sqrt{ax}\right)\ (\lambda>-1)$

$F(p)=\dfrac{a^{\frac{\lambda}{2}}}{p^{\lambda+1}}e^{-\frac{a}{p}}$

44. $f(x)=J_0\left(a\sqrt{x^2+bx}\right)$

$F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}e^{b\left(p-\sqrt{p^2+a^2}\right)}$

Transformada de Laplace de otras funciones:

45. $f(x)=u(x-a)$ donde $a>0$ y

$u(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ 1 & si\ x\ge 0\end{cases}\ F(p)=\dfrac{e^{-pa}}{p} \qquad (1.3.7)$

46. $f(x)=[x] \quad F(p)=\dfrac{1}{p\left(e^p-1\right)} \qquad (1.3.8)$

47. $f(x)=x-[x] \quad F(p)=\dfrac{e^p-1-p}{p^2\left(e^p-1\right)} \qquad (1.3.9)$

48. $f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & si\ 0\le x\le\varepsilon\\ 0 & si\ x>\varepsilon\end{cases} \qquad (\varepsilon>0)$

$F(p)=\dfrac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$

Anexo B: fórmulas relativas a la transformada de Laplace:

Nota: Entre paréntesis se encuentra el número del ejercicio en el texto (si corresponde).
Γ(x) es la función gamma.

Fórmulas generales:

1. $\mathcal{L}\left[af(x)+bg(x)\right]=aF(p)+bG(p)$ (1.2.2)
2. $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right]=aF(ap)$
3. $f(x)=x^n \quad F_n(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}(n\in\mathbb{N}_0)$ (1.2.3)
4. $f(x)=x^{-\frac{1}{2}} \quad F(p)=\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ (1.3.5)
5. $F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a e^{-px}f(x)\,dx$ (1.5.24)
   (*f(x)*: función periódica con período *a*)

Transformada de Derivadas

6. $\mathcal{L}\left[f'(x)\right]=pF(p)-f(0)$ (1.4.2)
7. $\mathcal{L}\left[f''(x)\right]=p^2F(p)-p\cdot f(0)-f'(0)$ (1.4.4)
8. $\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right]=p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)$ (1.4.6)

Derivadas de la Transformada:

9. $\mathcal{L}\left[xf(x)\right]=-F'(p)$ (1.5.2)
10. $\mathcal{L}\left[x^2f(x)\right]=F''(p)$ (1.5.3)
11. $\mathcal{L}\left[x^nf(x)\right]=(-1)^n\cdot F^{(n)}(p)$ (1.5.4)
12. $\mathcal{L}\left[x\cdot f'(x)\right]=-\frac{d}{dp}\left(p\cdot F(p)\right)$ (1.5.6)
13. $\mathcal{L}\left[x\cdot f''(x)\right]=-\frac{d}{dp}\left(p^2F(p)-p\cdot f(0)\right)$ (1.5.7)
14. $\mathcal{L}\left[x\cdot f^{(n)}(x)\right]$ (1.5.8)
    $=-\frac{d}{dp}\left(p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n-1}p^kf^{(n-1-k)}(0)\right)$

Transformada de la integral

15. $\mathcal{L}\left[\int_0^x f(s)\,ds\right]=\frac{F(p)}{p}$ (1.4.11)
16. $\mathcal{L}\left[\int_0^x\int_0^t f(s)\,ds\,dt\right]=\frac{F(p)}{p^2}$
17. $\mathcal{L}\left[\int_0^x\cdots\int_0^x f(s)(ds)^n\right]=\frac{F(p)}{p^n}$
18. $\mathcal{L}\left[\int_0^x (x-s)^{\lambda}f(s)\,ds\right]$
    $=\frac{\Gamma(\lambda+1)F(p)}{p^{\lambda+1}} \quad (\lambda>-1)$
19. $\mathcal{L}\left[\int_0^x e^{-a(x-s)}f(s)\,ds\right]=\frac{F(p)}{p+a}$
20. $\mathcal{L}\left[\int_0^x \sinh\left[a(x-s)\right]f(s)\,ds\right]=\frac{aF(p)}{p^2-a^2}$
21. $\mathcal{L}\left[\int_0^x \sin\left[a(x-s)\right]f(s)\,ds\right]=\frac{aF(p)}{p^2+a^2}$

Integral de la Transformada:

22. $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_p^{\infty}F(s)\,ds$ (1.5.14)
23. $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x^2}\right]=\int_p^{\infty}\int_p^{\infty}F(s)\,ds\,ds$
24. $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x^n}\right]=\int_p^{\infty}\cdots\int_p^{\infty}F(s)(ds)^n$
25. $\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^{\infty}F(p)\,dp$ (1.5.16)

Fórmulas de Desplazamiento:

26. $\mathcal{L}\left[g(x)\right] = e^{-ap}F(p)$, donde: $g(x) = \begin{cases} f(x-a) & si\ x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$ (1.4.13)

27. $\mathcal{L}\left[e^{ax} f(x)\right] = F(p-a)$ (1.4.8)

28. $\mathcal{L}\left[\sinh(ax) f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[F(p-a) - F(p+a)\right]$

29. $\mathcal{L}\left[\cosh(ax) f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[F(p-a) + F(p+a)\right]$

30. $\mathcal{L}\left[\sin(\omega x) f(x)\right] = -\frac{i}{2}\left[F(p-\omega i) - F(p+\omega i)\right]$

31. $\mathcal{L}\left[\cos(\omega x) f(x)\right] = \frac{1}{2}\left[F(p-\omega i) + F(p+\omega i)\right]$

Anexo C: Tabla de Ecuaciones de Volterra:

Nota: Las fórmulas que aquí aparecen incluyen ciertos parámetros (por ejemplo: a, λ). En el texto se eligieron valores simples para estos parámetros (normalmente: 1, 0, -1).
Entre paréntesis se encuentra el número del ejercicio relacionado con la fórmula (si corresponde).

Ecuaciones de Volterra del segundo tipo cuyo kernel contiene potencias:

1. $f(x)=y(x)-\lambda\int_a^x y(t)\,dt$ (3.2.10)

2. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x (x-t)\,y(t)\,dt$ (3.2.11)

3. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x (x-t)^2\,y(t)\,dt$ (3.2.12)

4. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x (x-t)^3\,y(t)\,dt$ (3.2.13)

5. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x (x-t)^n\,y(t)\,dt$ $(n\in\mathbb{N})$

6. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$ (3.2.14)

(ecuación integral de Abel de segundo tipo)

Ecuaciones de Volterra del segundo tipo cuyo kernel contiene funciones exponenciales:

7. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x e^{k(x-t)}y(t)\,dt$ (3.2.15)

8. $f(x)=y(x)+\lambda\int_0^x \left[e^{k(x-t)}-1\right]y(t)\,dt$ $(k\neq 0)$ (3.2.16)

9. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x (x-t)e^{k(x-t)}y(t)\,dt$ (3.2.17)

Ecuaciones de Volterra del segundo tipo cuyo kernel contiene funciones hiperbólicas:

10. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x \cosh\left[k(x-t)\right]y(t)\,dt$ (3.2.18)

11. $f(x)=y(x)+\lambda\int_a^x \sinh\left[k(x-t)\right]y(t)\,dt$ (3.2.19)

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene potencias:

12. $f(x)=\int_a^x (x-t)y(t)\,dt$ (3.3.8)

13. $f(x)=\int_a^x (x-t)^n\,y(t)\,dt$ (3.3.9)

14. $f(x)=\int_0^x \sqrt{x-t}\,y(t)\,dt$ (3.3.10)

15. $f(x)=\int_a^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$ (3.3.11)

(ecuación integral de Abel)

16. $f(x)=\int_a^x (x-t)^{\lambda}\,y(t)\,dt$, $(0<\lambda<1)$. (3.3.12)

17. $f(x)=\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\lambda}}\,dt$, $(0<\lambda<1)$. (3.3.13)

(ecuación integral de Abel generalizada)

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene funciones exponenciales:

18. $f(x)=\int_a^x e^{k(x-t)}y(t)\,dt$ (3.3.14)

19. $f(x)=\int_a^x e^{\alpha x+\beta t}y(t)\,dt$

20. $f(x)=\int_a^x \left[e^{k(x-t)}-1\right]y(t)\,dt$

21. $f(x)=\int_a^x \left[e^{k(x-t)}+b\right]y(t)\,dt$ $(b\neq -1)$

22. $f(x)=\int_a^x \left[e^{k(x-t)}-e^{m(x-t)}\right]y(t)\,dt$

23. $f(x)=\int_a^x \frac{y(t)}{\sqrt{e^{kx}-e^{kt}}}\,dt,\ k>0$

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene funciones hiperbólicas:

24. $f(x)=\int_a^x \cosh\left[k(x-t)\right]y(t)dt$ (3.3.15)

25. $f(x)=\int_a^x \left(\cosh\left[k(x-t)\right]-1\right)y(t)dt$

26. $f(x)=\int_a^x \left(\cosh\left[k(x-t)\right]+b\right)y(t)dt$,

    con: $b\neq 0,-1$.

27. $f(x)=\int_a^x \cosh^2\left[k(x-t)\right]y(t)dt$

28. $f(x)=\int_a^x \sinh\left[k(x-t)\right]y(t)dt$

29. $f(x)=\int_a^x \left(\sinh\left[k(x-t)\right]+b\right)y(t)dt$ ($b\neq 0$)

30. $f(x)=\int_a^x \sinh\left[k\sqrt{x-t}\right]y(t)dt$

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene funciones trigonométricas:

31. $f(x)=\int_a^x \cos\left[k(x-t)\right]y(t)dt$

32. $f(x)=\int_a^x \left(\cos\left[k(x-t)\right]-1\right)y(t)dt$

33. $f(x)=\int_a^x \left(\cos\left[k(x-t)\right]+b\right)y(t)dt$,

    con: $b\neq 0,-1$.

34. $f(x)=\int_a^x \sin\left[k(x-t)\right]y(t)dt$

35. $f(x)=\int_a^x \sin\left[k\sqrt{x-t}\right]y(t)dt$

Soluciones:

Ecuaciones de Volterra del segundo tipo cuyo kernel contiene potencias:

1. $y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x e^{\lambda(x-t)}f(t)dt$

2. $y(x)=f(x)-\operatorname{sgn}(\lambda)k\int_a^x \sin\left[k(x-t)\right]f(t)dt$, donde: $k=\sqrt{|\lambda|}$ y *sgn(x)* es la función signo

3. $y(x)=f(x)-\int_a^x q(x-t)f(t)dt$, donde:

$$q(x)=\frac{2}{3}k\left(e^{-2kx}-e^{kx}\left[\cos\left(\sqrt{3}kx\right)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}kx\right)\right]\right) \text{ y } k=\frac{\sqrt[3]{2\lambda}}{2}$$

4. $y(x)=f(x)-\int_a^x q(x-t)f(t)dt$, donde:

$$q(x)=\begin{cases} k\left(\cosh(kx)\sin(kx)-\sinh(kx)\cos(kx)\right) & k=\sqrt[4]{\dfrac{3\lambda}{2}} \quad \text{si } \lambda>0 \\ \dfrac{1}{2}k\left[\sin(kx)-\sinh(kx)\right] & k=\sqrt[4]{-6\lambda} \quad \text{si } \lambda<0 \end{cases}$$

5. $y(x) = f(x) - \int_a^x q(x-t)\, f(t)\, dt$, donde:

$q(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e^{\sigma_k x}\left[\sigma_k \cos(\beta_k x) - \beta_k \sin(\beta_k x)\right]$ y los coeficientes σ_k y β_k vienen dados por:

(Si $\lambda < 0$) $\quad \sigma_k = |\lambda n!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n+1}\right);\ \beta_k = |\lambda n!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\dfrac{2k\pi}{n+1}\right)$

(Si $\lambda > 0$) $\quad \sigma_k = |\lambda n!|^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{n+1}\right);\ \beta_k = |\lambda n!|^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{n+1}\right)$

6. $y(x) = \psi(x) + \pi\lambda^2 \int_a^x e^{\pi\lambda^2 (x-t)} \psi(t)\, dt$, con $\psi(x) = f(x) - \lambda \int_a^x \dfrac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt$

Ecuaciones de Volterra del segundo tipo cuyo kernel contiene funciones exponenciales:

7. $y(x) = f(x) - \lambda \int_a^x e^{(k-\lambda)(x-t)} f(t)\, dt$

8. $y(x) = f(x) - \int_a^x q(x-t)\, f(t)\, dt$, donde:

$$q(x) = \begin{cases} 4\lambda^2 x e^{2\lambda x} & si\ k = 4\lambda \\ \dfrac{2k\lambda}{\sqrt{|\Delta|}} e^{\frac{1}{2}k\lambda} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|\Delta|}x\right) & si\ k^2 - 4k\lambda < 0 \\ \dfrac{2k\lambda}{\sqrt{|\Delta|}} e^{\frac{1}{2}k\lambda} \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{|\Delta|}x\right) & si\ k^2 - 4k\lambda > 0 \end{cases}, \text{ con } \Delta = k^2 - 4k\lambda .$$

9. Si $\lambda > 0$: $y(x) = f(x) - \sqrt{|\lambda|} \int_a^x e^{k(x-t)} \sin\left[\sqrt{|\lambda|}(x-t)\right] f(t)\, dt$, con *sgn(x)* la función signo.

Si $\lambda < 0$: $y(x) = f(x) - \sqrt{|\lambda|} \int_a^x e^{k(x-t)} \sinh\left[\sqrt{|\lambda|}(x-t)\right] f(t)\, dt$,

Ecuaciones de Volterra del segundo tipo cuyo kernel contiene funciones hiperbólicas:

10. $y(x) = f(x) - \int_a^x q(x-t)\, f(t)\, dt$, donde:

$q(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda x}\left(\lambda \cosh\left(\sqrt{\Delta}x\right) - \dfrac{\lambda^2}{2\sqrt{\Delta}} \sinh\left(\sqrt{\Delta}x\right)\right)$, $\quad$ con: $\Delta = k^2 + \dfrac{1}{4}\lambda^2$.

11. $y(x) = f(x) - \int_a^x q(x-t)\, f(t)\, dt$, donde:

$$q(x) = \begin{cases} k^2 x & si\ k = \lambda \\ \dfrac{k\lambda}{A}\sin(Ax) & si\ k^2 - k\lambda > 0, \\ \dfrac{k\lambda}{A}\sinh(Ax) & si\ k^2 - k\lambda < 0 \end{cases} \qquad \text{con } A = \sqrt{\left|k^2 - k\lambda\right|}.$$

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene potencias:

12. $y(x) = f''(x)$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = 0$.

13. $y(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x)}{n!}$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n)}(a) = 0$.

14. $y(x) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{d^2}{dx^2}\int_a^x \dfrac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt$, siempre y cuando: $f(0) = 0$.

15. $y(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{dx}\int_a^x \dfrac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt = \dfrac{f(a)}{\pi\sqrt{x-a}} + \dfrac{1}{\pi}\int_a^x \dfrac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt$.

16. $y(x) = \dfrac{sen(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\dfrac{d^2}{dx^2}\int_a^x \dfrac{f(t)}{(x-t)^\lambda}\, dt$, siempre y cuando: $f(0) = 0$.

17. $y(x) = \dfrac{sen(\pi\lambda)}{\pi}\dfrac{d}{dx}\int_a^x \dfrac{f(t)}{(x-t)^{1-\lambda}}\, dt. = \dfrac{sen(\pi\lambda)}{\pi}\left[\dfrac{f(a)}{(x-a)^{1-\lambda}} + \int_a^x \dfrac{f'(t)}{(x-t)^{1-\lambda}}\, dt\right]$.

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene funciones exponenciales:

18. $y(x) = f'(x) - k\, f(x)$, siempre y cuando: $f(a) = 0$.

19. $y(x) = e^{-(\alpha+\beta)x}\left[f'(x) - \alpha\, f(x)\right]$, siempre y cuando: $f(a) = 0$.

20. $y(x) = \dfrac{1}{k} f''(x) - f'(x)$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = 0$.

21. $y(x) = \dfrac{f'(x)}{b+1} - \dfrac{k}{(b+1)^2}\int_a^x e^{\frac{kb}{b+1}(x-t)} f'(t)\, dt$, siempre y cuando: $f(a) = 0$.

22. $y(x) = \dfrac{1}{k-m}\left[f''(x) - (k+m)\, f'(x) + km\, f(x)\right]$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = 0$.

23. $y(x) = \dfrac{k}{\pi}\dfrac{d}{dx}\int_a^x \dfrac{e^{kt} f(t)}{\sqrt{e^{kx} - e^{kt}}}\, dt$

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene funciones hiperbólicas:

24. $y(x) = f'(x) - k^2 \int_a^x f(t)\,dt$, siempre que: $f(a) = 0$.

25. $y(x) = \frac{1}{k^2} f'''(x) - f'(x)$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = f''(x) = 0$.

26. $y(x) = \frac{f'(x)}{b+1} - \frac{k^2}{A(b+1)^2} \int_a^x R(A(x-t))\, f'(t)\,dt$, siempre que: $f(a) = 0$.

Además: $A = k\sqrt{\left|\frac{b}{b+1}\right|}$, $R(x) = \begin{cases} \sin x & \text{, si } b^2 + b < 0 \\ \sinh x & \text{, si } b^2 + b > 0 \end{cases}$

27. $y(x) = f'(x) - \sqrt{2}k \int_a^x \sinh\left[k\sqrt{2}(x-t)\right] f'(t)\,dt$, siempre que: $f(a) = 0$.

28. $y(x) = \frac{1}{k} f''(x) - kf(x)$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = 0$.

29. $y(x) = \frac{f'(x)}{b} + \frac{k}{b^2} e^{-\frac{kx}{2b}} \int_a^x \left[\frac{1}{\sqrt{1+4b^2}} \sinh(Ax) - \cosh(kx)\right] f'(t)\,dt$, siempre que: $f(a) = 0$.

Además: $A = \frac{k\sqrt{1+4b^2}}{2b}$

30. $y(x) = \frac{2}{\pi k} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\cos\left(k\sqrt{x-t}\right) f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$, siempre y cuando: $f(0) = 0$.

Ecuaciones de Volterra del primer tipo cuyo kernel contiene funciones trigonométricas:

31. $y(x) = f'(x) + k^2 \int_a^x f(t)\,dt$, siempre que: $f(a) = 0$.

32. $y(x) = -\frac{1}{k^2} f'''(x) - f'(x)$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = f''(0) = 0$.

33. $y(x) = \frac{f'(x)}{b+1} + \frac{k^2}{A(b+1)^2} \int_a^x R(A(x-t))\, f'(t)\,dt$, siempre que: $f(a) = 0$.

Además: $A = k\sqrt{\left|\frac{b}{b+1}\right|}$, $R(x) = \begin{cases} \sin x & \text{, si } b^2 + b > 0 \\ \sinh x & \text{, si } b^2 + b < 0 \end{cases}$

34. $y(x) = \frac{1}{k} f''(x) + kf(x)$, siempre y cuando: $f(a) = f'(a) = 0$.

35. $y(x) = \frac{2}{\pi k} \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{\cosh\left(k\sqrt{x-t}\right) f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$, siempre y cuando: $f(0) = 0$.