

ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM:
UNA INTRODUCCIÓN

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencias, en cumplimiento parcial de los requisitos exigidos para optar al grado de Licenciado en Educación Matemáticas y Computación.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO-CHILE

2005

ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM:
UNA INTRODUCCIÓN

DANIELA ARAYA BASTIAS - SEBASTIÁN CALZADILLAS NIECHI

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Carlos Lizama del Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, de los , candidatos, Sra. Verónica Poblete y Dr. Humberto Prado.

Profesor Informante

Profesor Informante

Profesor Guía

Director

Agradecimientos

Al finalizar esta linda etapa de mi vida, miro hacia atrás y veo a todas las personas que me acompañaron en este lindo y difícil sendero, personas que por diferentes motivos no están a mi lado y personas que siguen a mi lado, que han tenido paciencia y el amor de enseñarme y soportar mi difícil carácter, mi familia, mi novio Carlos y mi amigo Sebastián.

Agradezco también a todos los profesores que me hicieron clases, ya que cada uno de ellos me enseñó diferentes cosas, en especial al profesor Carlos Lizama que con su paciencia y consejos nos ayudó a realizar nuestro trabajo. También agradezco a la familia de Sebastián por los ricos almuerzos y onces que compartimos juntos. Por último a Dios que me ha dado todo para poder estar en esta etapa.

Daniela Araya Bastias

Vayan siempre mis infinitas gracias y alabanzas a mi Dios Jehová, el cual me dio apoyo, sustento y cuidado amoroso durante toda mi vida y en especial en mis años de carrera universitaria.

Mis queridos padres se merecen más que yo el título que obtengo, fueron participes activos en mi formación y en mis valores, los amo a ustedes y a mis hermanos. Gracias Daniela por dejarme ser tu compañero de Trabajo, de Tesis y mi gran amiga, por darme apoyo y consuelo al momento apropiado. Profesor Lizama a usted le debemos la realización de este escrito, gracias por darnos el tiempo y de su propio esfuerzo junto con increíble paciencia para que hoy cobre vida.

Gracias, eternamente gracias, a todos.

Sebastián Calzadillas Niechi

Índice general

1. Ecuaciones de Fredholm	9
1.1. Introducción	9
1.2. Núcleos Separables	11
1.2.1. Núcleos Separables	11
1.2.2. Núcleo Resolvente	14
1.2.3. Condiciones sobre la Existencia de Soluciones	18
1.2.4. Condiciones de Fredholm	23
1.3. Núcleos No Separables	29
1.3.1. Normas	29
1.3.2. Método de Schmidt	32
1.3.3. Métodos de aproximación por Núcleos Separables	33
1.3.4. Iteración por medio de Series de Neumann	35
1.3.5. Convergencia Uniforme de la serie de Neumann	40
1.3.6. Condiciones para la Existencia y Unicidad de la solución de la ecuación con Núcleos Pequeños	44
2. Teoría de Fredholm en espacios de Lebesgue	48
2.1. Funciones Absolutamente Integrables	49
2.2. Funciones de Cuadrado Integrable	51

2.2.1. Descomposición de Núcleos	54
2.3. Funciones Propias	58
2.4. Teoría en L^p	61

Introducción

La teoría de Ecuaciones Integrales fue ampliamente desarrollada por el matemático sueco Erik Ivar Fredholm quien desde temprana edad tuvo acceso a una de las mejores escuelas de Estocolmo, donde obtuvo con honores su Bachillerato el 16 de Mayo de 1885. Después de un año de estudiar en el Royal Technological Institute ingresa a la Universidad de Uppsala donde obtiene el grado de Magister en Ciencias el 28 de Mayo de 1888. Para obtener el grado de Doctor en Ciencias trabaja bajo la tutela del profesor Mittag-Leffler de la Universidad de Estocolmo, esto lo logra inscribiendo el Doctorado en Uppsala, pero realizando sus estudios en Estocolmo. Recibe el grado de Doctor el 31 de Mayo de 1898. Su tesis doctoral abordó el estudio de Ecuaciones Diferenciales Parciales que fue motivado por un problema de equilibrio en elasticidad dentro del área de la Física. Esto dio origen a una de las investigaciones más trascendentales para la vida de Fredholm y para la matemática de la primera cuarta parte del siglo 20, a saber, Ecuaciones Integrales y la Teoría Espectral. Ésta fue utilizada por matemáticos de renombre como Schwarz, Neumann y Poincaré. Cabe destacar que Hilbert complementó el trabajo de Fredholm incluyendo la teoría de valores propios para la Ecuación Integral de Fredholm.

El presente trabajo de titulación comprende dos capítulos, el primero se titula *Ecuaciones de Fredholm* el cual presenta las ecuaciones generales de Fredholm a resolver y analiza en profundidad la existencia de la(s) solución(es) según el tipo de núcleo que la compongan, estos son: *núcleos separables ó núcleos no separables*.

Las secciones del capítulo 1 son:

Introducción; en esta se presentan las Ecuaciones Integrales de *primer* y *segundo* tipo, además se define el Operador Integral involucrado en las ecuaciones anteriores, así como también se da un pequeño ejemplo particular que ilustra las funciones que pertenecen al rango de este operador.

Caso Núcleos Separables; en esta sección se estudia los núcleos separables y de éstos se desprende un caso particular: *núcleos resolventes*. Además, se analizan las condiciones necesarias para la existencia de la(s) solución(es) de la ecuación matricial análoga de la Ecuación Integral de segundo tipo, esta herramienta fundamental se encuentra en el Teorema 1.2.9. La sección finaliza con el estudio del Teorema *Ecuación de Fredholm* y su contraparte para la Ecuación Integral de segundo tipo.

Caso Núcleos no Separables; en esta sección se define la función *norma* que es una herramienta necesaria para estudiar un nuevo método para resolver la Ecuación Integral de segundo tipo, cuando ésta se compone de un núcleo no separable. Este método recibe el nombre de *método de Schmidt*. Se muestran tres formas de lograr la descomposición que propone. El método de Schmidt requiere de la *serie de Neumann* para encontrar el inverso de un operador $(I - cK_0)$, por lo que además se estudian condiciones que debe poseer el operador cK_0 para que dicha serie converja. Asimismo, se estudian las condiciones para la existencia y unicidad de las soluciones sólo cuando los núcleos son *pequeños* en el sentido de la norma que se considere.

El capítulo dos, *Teoría de Fredholm en espacios de Lebesgue*, está dirigido al estudio de las condiciones que debe cumplir el núcleo -el cual pertenece a estos tipos de espacios- que compone la ecuación Integral de Fredholm de segundo tipo. Las secciones que componen este capítulo son:

Funciones absolutamente Integrables; se define el espacio de Lebesgue L^1 y las funciones que lo comprenden, además buscamos una cota adecuada para $\|K_0 u\|$ y lograr así que la serie de Neumann converja.

Funciones de Cuadrado Integrable; se realiza un estudio análogo a la sección anterior para el espacio de Lebesgue L^2 . Por otra parte se analizan características especiales de este espacio que permiten descomponer núcleos, así como lo propone el método de Schmidt. Se presenta el Teorema de *Fischer-Riesz* que permite utilizar la Teoría de Fredholm en espacios de vectores de dimensión infinita.

Funciones Propias; en esta sección se estudia el Teorema 2.3.2 que permite obtener una base ortonormal completa, de funciones propias, que es útil para la descomposición de núcleos que propone la sección anterior.

Teoría en L^p ; aquí se entrega una generalización de todos los espacios de Lebesgue cuando $1 \leq p < \infty$, y se dan las herramientas generales que permiten utilizar Fredholm en estos espacios.

Este trabajo de Titulación está escrito de tal manera que no profundiza en todos los tópicos matemáticos necesarios para el tema que se presenta, siguiendo el mismo espíritu del libro de Pipkin [5] que fué la base de esta tesis.

Capítulo 1

Ecuaciones de Fredholm

1.1. Introducción

Definimos dos ecuaciones integrales que llamaremos ecuaciones de Fredholm de primer y segundo tipo respectivamente.

$$\int_a^b k(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.1)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y)u(y) dy, \quad x \in [a, b]. \quad (1.2)$$

A la función k la llamamos núcleo y a la función f término no homogéneo, ambas son funciones dadas. Nuestro objetivo consiste en encontrar una función u que satisfaga la correspondiente ecuación.

Definimos el operador K_0 como

$$(K_0u)(x) = \int_a^b k(x, y)u(y) dy. \quad (1.3)$$

Entonces (1.1) y (1.2) pueden reescribirse de la siguiente forma

$$K_0u = f \quad y \quad u = f + K_0u.$$

Ejemplo 1.1.1.

Considerar el núcleo $k(x, y) = e^{x+y}$ y las ecuaciones

$$\int_0^1 e^{x+y} u(y) dy = x \quad (1.4)$$

$$u(x) = x + \int_0^1 e^{x+y} u(y) dy. \quad (1.5)$$

Observamos que

$$K_0 u(x) = \int_0^1 e^{x+y} u(y) dy = e^x \int_0^1 e^y u(y) dy = C e^x,$$

donde $C = \int_0^1 e^y u(y) dy$. Por lo tanto el rango de K_0 consiste en los múltiplos de e^x . Concluimos que la función $f(x) = x$ en (1.4) no está en el rango de K_0 y por lo tanto la ecuación (1.4) no tiene solución. Por otro lado, observamos que, en contraste, (1.5) tiene solución. En efecto, si

$$u(x) = x + \int_0^1 e^{x+y} u(y) dy$$

entonces

$$u'(x) = 1 + e^x \int_0^1 e^y u(y) dy = 1 + (u(x) - x)$$

es una ecuación diferenciable lineal de primer orden, cuya solución, aplicando la Fórmula de Leibnitz, viene dada por

$$u(x) = x + C e^x,$$

donde C es una constante arbitraria.

1.2. Núcleos Separables

Para resolver las ecuaciones propuestas nos dedicaremos al estudio de ecuaciones con diferentes tipos de núcleo. Revisaremos en primera instancia ecuaciones donde su operador tiene núcleo *separable*, posteriormente estudiaremos ecuaciones con operadores *pequeños*.

1.2.1. Núcleos Separables

Definición 1.2.1. Decimos que un núcleo $k(x, y)$ es separable si éste se puede escribir como

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y).$$

Ejemplo 1.2.2. El núcleo $k(x, y) = \frac{x^n - y^n}{x - y}$ es separable. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - y^n}{x - y} &= x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n x^{n-i}y^{i-1}. \end{aligned}$$

Supondremos que las funciones f_i y g_i en la definición 1.2.1 son linealmente independientes. Así el rango del operador K_0 es n-dimensional y consiste en la combinación lineal de funciones f_i . Esta afirmación se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} (K_0 u)(x) &= \int_a^b k(x, y)u(y) dy \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y) \right) u(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \int_a^b g_i(y)u(y) dy. \end{aligned}$$

Definiendo los coeficientes u_i como los productos internos

$$u_i := \langle g_i, u \rangle = \int_a^b g_i(y)u(y) dy,$$

obtenemos la combinación lineal que buscábamos

$$(K_0 u)(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)u_i. \quad (1.6)$$

Observación 1.2.3. De acuerdo a lo anterior en la ecuación del primer tipo,

$$K_0 u = h, \quad (1.7)$$

existe una restricción para la existencia de su solución, esto es, $h(x)$ debe ser combinación lineal de las funciones $f_i(x)$; además si esto ocurre, existen infinitas soluciones que satisfacen la ecuación.

En el caso de la ecuación de segundo tipo

$$u(x) = h(x) + \int_a^b k(x, y)u(y) dy, \quad (1.8)$$

utilizando (1.6), la ecuación (1.8) tendrá solución

$$u(x) = h(x) + \sum_{j=1}^n f_j(x)u_j, \quad (1.9)$$

donde sólo resta encontrar los coeficientes u_j . Para esto definimos

$$h_i := \langle g_i, h \rangle = \int_a^b g_i(x)h(x) dx, \quad (1.10)$$

y

$$K_{ij} := \langle g_i, f_j \rangle = \int_a^b g_i(x)f_j(x) dx. \quad (1.11)$$

Multiplicando (1.9) por $g_i(x)$ e integrando en $[a, b]$ obtenemos

$$\int_a^b g_i(x)u(x) dx = \int_a^b g_i(x)h(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_a^b g_i(x)f_j(x) dx \cdot u_j$$

o usando la notación (1.10) y (1.11):

$$u_i = h_i + \sum_{j=1}^n K_{ij}u_j. \quad (1.12)$$

Obtenemos así un sistema de ecuaciones algebraicas para los coeficientes u_i .

Este sistema lo escribimos como $u = h + Ku$.

Análogamente, multiplicando (1.7) por $g_i(x)$ e integrando en $[a, b]$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}u_j = h_i \quad (1.13)$$

que es equivalente a escribir $Ku = h$.

Lo que hemos hecho muestra que si la ecuación integral (1.2) tiene solución el sistema algebraico (1.12) la tiene. Recíprocamente, si (1.12) tiene solución u y definimos $u(x)$ por (1.9) entonces se verifica que $u(x)$ satisface la ecuación integral (1.2).

Ejemplo 1.2.4. Revisemos el siguiente problema

$$u(x) = 1 + \int_0^1 (1 + x + y + xy)^{-1/2} u(y) dy.$$

Escribimos $k(x, y)$ como

$$k(x, y) = (1 + x)^{-1/2} (1 + y)^{-1/2},$$

y definimos

$$f_1(x) := (1 + x)^{-1/2} \text{ y } g_1(y) := (1 + y)^{-1/2}.$$

Luego

$$h_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ y } K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

Así obtenemos

$$u_1 = h_1 + K_{11}u_1 = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{(1 - 2 \ln 2)}.$$

Así, por (1.9) una solución es

$$u(x) = 1 + \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{x+1}(1 - 2 \ln 2)}.$$

Observación 1.2.5. El hecho de que las integrales (1.10) y (1.11) existan es esencial para resolver la ecuación por *núcleos separables*. En efecto, veamos la siguiente ecuación

$$u(x) = h(x) + \int_0^1 (xy)^{-1/2} u(y) dy.$$

En este caso la integral

$$K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx,$$

diverge y no podemos formar $u(x)$ utilizando (1.12). Ahora bien, esto no quiere decir que la ecuación propuesta no tenga solución. En efecto, una solución de la ecuación integral es:

$$u(y) = y \quad \text{para} \quad h(x) = x - x^{-1/2} \int_0^1 \sqrt{y} dy.$$

1.2.2. Núcleo Resolvente

En esta sección, reemplazaremos el operador K_0 por operadores cK_0 , donde $c \in \mathbb{K}$, con \mathbb{K} cuerpo. Ahora, tenemos que el problema de hallar la solución de la ecuación $u = h + cKu$, que se puede reescribir como:

$$(I - cK)u = h.$$

Definiendo $M := I - cK$, donde I es la matriz identidad, obtenemos de manera equivalente el problema

$$Mu = h. \tag{1.14}$$

Denotaremos por $D(c)$ al determinante de M . En lo que sigue supondremos que $D(c)$ es distinto de cero, así M será invertible.

Sea C la matriz de los cofactores de M , ver [2], entonces tenemos que

$$C^t M = M C^t = I D(c).$$

Dado que existe M^{-1} , si denotamos $M^{-1} := \mathbf{R}(c)$ obtenemos que

$$\mathbf{R}(c) = C^t / D(c),$$

así la solución para la ecuación (1.14) será $u = R(c)h$.

Si $\{R_{ij}\}$ son los coeficientes de $R(c)$, la ecuación $u = R(c)h$ es equivalente al siguiente sistema algebraico:

$$u_j = \sum_{i=1}^n R_{ji} h_i.$$

Podemos entonces reescribir la solución de la ecuación integral $u = h + cK_0 u$ como sigue:

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) + \sum_{j=1}^n c f_j(x) u_j \\ &= h(x) + \sum_{j=1}^n \left[c f_j(x) \sum_{i=1}^n R_{ji} h_i \right]. \end{aligned}$$

Ya que por (1.10) $h_i = \int_a^b g_i(y) h(y) dy$, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) + \sum_{j=1}^n \left[c f_j(x) \sum_{i=1}^n R_{ji} \int_a^b g_i(y) h(y) dy \right] \\ &= h(x) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[c \int_a^b R_{ji} f_j(x) g_i(y) h(y) dy \right] \\ &= h(x) + \int_a^b \left[c \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n R_{ji} f_j(x) g_i(y) \right] h(y) dy. \end{aligned}$$

Definición 1.2.6. Al término algebraico

$$R(x, y; c) := \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n R_{ji}(c) f_j(x) g_i(y).$$

lo llamaremos *núcleo resolvente*. Notemos que éste es también un núcleo separable.

Así, la solución para nuestra ecuación integral (1.2) es

$$u(x) = h(x) + \int_a^b cR(x, y; c)h(y) dy, \quad (1.15)$$

que es análoga al sistema lineal algebraico

$$u = f + cR(c). \quad (1.16)$$

Observación 1.2.7. Siguiendo la analogía en la notación utilizada en (1.3) podemos escribir (1.15) como

$$u = (I + cR_0)h,$$

así el operador $I + cR_0$ coincide justamente con el operador inverso de $I - cK_0$ ya que $u = (I - cK_0)^{-1}h$.

Ejemplo 1.2.8. Para ilustrar como obtener un núcleo resolvente utilizaremos la siguiente ecuación

$$u(x) = h(x) + c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} u(y) dy, \quad (1.17)$$

con núcleo separable $k(x, y) = e^{-x^2} e^{-y^2}$.

Identificamos a $f_1(x) = e^{-x^2}$ y a $g_1(y) = e^{-y^2}$. Luego el coeficiente, K_{11} de la matriz K es

$$K_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi},$$

y así $K = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$. Luego

$$\begin{aligned} M &= 1 - c\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

y entonces

$$M^{-1} = \frac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}},$$

para todo c distinto de $\sqrt{2/\pi}$. Por lo tanto el núcleo resolvente de la ecuación (1.17) es

$$R(x, y; c) = \left(\frac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \right) e^{-x^2} e^{-y^2}.$$

Ahora bien, si $h(x) = x$ entonces la solución para la ecuación (1.17) es de acuerdo a (1.15) lo siguiente

$$\begin{aligned} u(x) &= x + \int_{-\infty}^{+\infty} c \left(\frac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \right) e^{-x^2} e^{-y^2} y dy \\ &= x + c \left(\frac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \right) e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} y dy \\ &= x + c \left(\frac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \right) e^{-x^2} \cdot 0 \\ &= x. \end{aligned}$$

Pero ¿qué ocurre si $c = \sqrt{2/\pi}$? La primera respuesta, aunque obvia, es que M no posee inversa y por tanto el núcleo resolvente $R(x, y; c)$ no existe. La segunda es que no podemos resolver la ecuación por el método de núcleos separables, puesto que $K_{11} = 1$ y $u_1 = h_1 + K_{11}u_1 = 0 + u_1 = u_1$ no obteniendo resultado alguno. Esto no quiere decir que la ecuación (1.17) no tenga solución. En efecto, para resolver la ecuación podemos hacer lo siguiente:

Derivando (1.17) con respecto a x , y suponiendo que h es una función derivable, se tiene que

$$\begin{aligned} u'(x) &= h'(x) - 2x e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} u(y) dy \\ &= h'(x) - 2x(u(x) - h(x)). \end{aligned}$$

Definiendo $g(x) := u(x) - h(x)$ obtenemos

$$g'(x) = -2xg(x),$$

cuya solución viene dada por

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{\int_0^x -2t dt + k} \\ &= e^{-x^2 + k} \\ &= Ae^{-x^2}, \quad (A = e^k). \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación (1.17) es

$$u(x) = h(x) + Ae^{-x^2}.$$

Tal como en el caso anterior si $h(x) = x$, obtendremos la solución

$$u(x) = x + Ae^{-x^2}.$$

1.2.3. Condiciones sobre la Existencia de Soluciones

Hasta el momento hemos estudiado como resolver las ecuaciones integrales (1.1) y (1.2), pero aún no nos hemos detenido en el análisis de la unicidad de las soluciones para tales ecuaciones. Dada la ecuación

$$Ku = f,$$

sin saber si ésta tiene alguna solución o no, especulamos la posibilidad de que pueda tener dos soluciones distintas u_1 y u_2 , entonces

$$Ku_1 = f$$

$$Ku_2 = f.$$

Restando las ecuaciones se obtiene:

$$K(u_1 - u_2) = 0.$$

Definimos $\varphi := u_1 - u_2$, obteniendo que la ecuación $K\varphi = 0$ tiene solución con $\varphi = 0$. De manera análoga suponemos dos soluciones distintas para la ecuación:

$$u = f + Ku,$$

obteniendo así la ecuación $K\varphi = \varphi$, lo que equivale a $(I - K)\varphi = 0$. Definiendo $A := I - K$ se obtiene

$$A\varphi = 0,$$

que es una ecuación matricial. Luego

$$A\varphi = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 + \dots + A_n\varphi_n = 0, \quad (1.18)$$

con A_n matriz, donde la n -ésima columna coincide con la n -ésima columna de la matriz A y el resto de las columnas se componen de 0, y φ_n es la componente n -ésima del vector φ . Luego obtenemos una combinación lineal de matrices A_n .

Teorema 1.2.9 (Existencia de Solución). Sea K una matriz y f un vector. Si $(I - K)\varphi = 0$ sólo para $\varphi = 0$, entonces existe una solución de la ecuación $u = f + Ku$.

Demostración. Por hipótesis $\text{Ker}(I - K) = 0$. Por el teorema de las dimensiones, ver[2], se tiene que $(I - K)$ es sobreyectiva y luego existe la inversa de $I - K$, por tanto existe la solución del sistema matricial $(I - K)u = f$ que viene dada por

$$u = (I - K)^{-1}f.$$

□

De esta manera si la ecuación integral $K_0\varphi = \varphi$ se satisface sólo para $\varphi = 0$, entonces existe una solución para la ecuación integral $u = f + K_0u$. El teorema anterior muestra que para las ecuaciones lineales algebraicas o para las ecuaciones integrales que consideramos anteriormente, podemos demostrar existencia de solución de una ecuación probando previamente unicidad para otra.

Ejemplo 1.2.10. Consideremos la ecuación integral $u = f + K_0u$ con núcleo

$$k(x, y) = - \sum_i f_i(x)f_i(y). \quad (1.19)$$

Entonces la ecuación

$$K_0\varphi = \varphi$$

es igual a:

$$\int_a^b k(x, y)\varphi(y) dy = \varphi(x)$$

esto es:

$$\int_a^b \left(- \sum_i f_i(x)f_i(y) \right) \varphi(y) dy = \varphi(x)$$

ó

$$-\sum_i \int_a^b f_i(x) f_i(y) \varphi(y) dy = \varphi(x)$$

que es equivalente a

$$-\sum_i f_i(x) \int_a^b f_i(y) \varphi(y) dy = \varphi(x)$$

de donde obtenemos

$$-\sum_i f_i(x) \int_a^b f_i(y) \varphi(y) dy - \varphi(x) = 0$$

que es lo mismo que

$$\sum_i f_i(x) \int_a^b f_i(y) \varphi(y) dy + \varphi(x) = 0.$$

Multiplicando por φ e integrando se obtiene:

$$\int_a^b \sum_i f_i(x) \langle f_i, \varphi \rangle \varphi dx + \int_a^b \varphi^2 dx = 0$$

esto es,

$$\int_a^b \sum_i f_i(x) \varphi \langle f_i, \varphi \rangle dx + \langle \varphi, \varphi \rangle = 0$$

ó

$$\sum_i \langle f_i, \varphi \rangle \langle f_i, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle = 0$$

que es equivalente a

$$\sum_i \langle f_i, \varphi \rangle^2 + \langle \varphi, \varphi \rangle = 0.$$

Como cada término del lado izquierdo es positivo, se tiene que estos términos deben ser iguales a 0, en particular $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$. Si φ es continua, entonces $\varphi = 0$ es la única solución de la ecuación $K_0 \varphi = \varphi$, por tanto la ecuación integral $u = f + K_0 u$ con núcleo (1.19) tendrá una solución.

Observación 1.2.11. El producto interno entre vectores u y $v \in \mathbb{R}^n$ será denotado por el símbolo (u, v) , esto es

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Observación 1.2.12. Si M es una matriz *positiva definida*, esto es

$$(u, Mu) > 0 \quad \text{si} \quad u \neq 0,$$

entonces la ecuación $Mu = f$ posee solución. En efecto, si $M\varphi = 0$ entonces la identidad $(\varphi, M\varphi) = 0$ implica que $\varphi = 0$. Ocupando el teorema anterior obtenemos el resultado.

Ejemplo 1.2.13. Como un caso concreto de la observación anterior, veamos el siguiente problema:

Consideremos una matriz M que tiene las componentes $M_{ii} = 2$, $M_{i,i\pm 1} = 1$ y los demás elementos son cero. Demostraremos que $(x, Mx) = 0$ sólo cuando $x = 0$ de lo cual se puede inferir que la ecuación $Mu = f$ posee solución. En efecto, primero escribimos (x, Mx) como suma de cuadrados como sigue:

$$\begin{aligned} (x, Mx) &= x_1(2x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 2x_2 + x_3) + x_3(x_2 + 2x_3 + x_4) \\ &+ x_4(x_3 + 2x_4 + x_5) + \dots \\ &+ x_{n-1}(x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n) + x_n(x_{n-1} + 2x_n) + 2x_1^2 + 2x_1x_2 \\ &+ 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 + \\ &+ \dots + 2x_{n-1}x_n + 2x_{n-1}^2 + 2x_n^2 \\ &= (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2) + (2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4) + \dots \\ &+ (2x_{n-1}^2 + 2x_n^2 + 2x_{n-1}x_n) + \\ &+ 2x_2x_3 + 2x_4x_5 + 2x_6x_7 + \dots + 2x_{n-2}x_{n-1}. \end{aligned}$$

Veremos ahora que $(x, Mx) = 0$ sólo cuando $x = 0$. En efecto, si $(x, Mx) = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
(x, Mx) &= (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2) + (2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4) + \dots \\
&+ (2x_{n-1}^2 + 2x_n^2 + 2x_{n-1}x_n) + 2x_2x_3 + 2x_4x_5 \\
&+ 2x_6x_7 + \dots + 2x_{n-2}x_{n-1} = 0 \\
&= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) + \dots \\
&+ (x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n + x_n^2) + x_1^2 + (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) \\
&+ (x_4^2 + 2x_4x_5 + x_5^2) + (x_6^2 + 2x_6x_7 + x_7^2) + \dots + \\
&+ (x_{n-2}^2 + 2x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}^2) + x_n^2 = 0 \\
&= (x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 + \dots + (x_{n-1} + x_n)^2 \\
&+ (x_2 + x_3)^2 + (x_4 + x_5)^2 + (x_6 + x_7)^2 + \dots \\
&+ (x_{n-2} + x_{n-1})^2 + x_1^2 + x_n^2 = 0.
\end{aligned}$$

Esto implica que $x_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, es decir, $x = 0$.

1.2.4. Condiciones de Fredholm

Supongamos que $M\varphi = 0$ tiene solución con $\varphi \neq 0$. Entonces existe al menos un vector columna de la matriz M , que es linealmente dependiente. Por simplicidad, supongamos que sólo hay un vector φ excepto sus múltiplos $m\varphi$. Por el teorema de la dimensión el rango de M , $Rang(M)$, tiene dimensión $n - 1$. Esto implica que existe un vector ψ no nulo tal que

$$\psi M = 0,$$

es decir,

$$(\psi, M_i) = 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Como M_i son las filas de la matriz M^t , lo anterior se puede reescribir como

$$M^t\psi = 0.$$

En resumen se tiene:

$$M\varphi = 0 \quad (\varphi \neq 0) \text{ si y sólo si } M^t\psi = 0 \quad (\psi \neq 0). \quad (1.20)$$

El resultado es que si $M\varphi = 0$ tiene solución distinta de cero entonces $Mu = f$ puede tener solución y esta no es única. De hecho, si hay alguna solución u_0 , entonces la solución general es

$$u = u_0 + m\varphi, \text{ donde } m \text{ es una constante arbitraria,}$$

ya que por el teorema de la dimensión, $Ker(M)$ tiene dimensión igual a uno.

Si hay muchas soluciones linealmente independientes φ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) de la ecuación $M\varphi = 0$ entonces hay muchas soluciones linealmente independientes ψ_i de la ecuación $M^t\psi = 0$. Entonces $Mu = f$ posee solución si y sólo si f satisface las condiciones de Fredholm:

$$(\psi_i, f) = 0.$$

Si tiene solución, digamos u_0 , entonces la solución general es:

$$u = u_0 + \sum_{I=1}^k m_i \varphi_i \quad \text{con } k < n$$

donde los coeficientes m_i son arbitrarios.

Teorema 1.2.14 (Condición de Fredholm). La ecuación $Mu = f$ tiene solución si y sólo si $(\psi, f) = 0$, para cada $\psi \in Ker(M^t)$.

Demostración. Supongamos que la ecuación $Mu = f$ tiene solución u , entonces

$$(\psi, f) = (\psi, Mu) = (M^t\psi, u) = (0, u) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $(\psi, f) = 0$ para cada $\psi \in Ker(M^t)$. Entonces f pertenece $Ker(M^t)^\perp = Ran(M)$. Así f pertenece al rango de M , es decir, existe un u tal que $Mu = f$. \square

Observación 1.2.15. El teorema (1.2.14) tiene una contraparte inmediata para la ecuación integral (1.2) donde

$$\langle \psi, f \rangle = \int_a^b \psi(x)f(x) dx.$$

Definición 1.2.16. Definimos el operador integral *transpuesto* como

$$(K_0^t u)(x) = \int_a^b k^t(x, y)u(y) dy.$$

Observación 1.2.17. Se tiene que $k^t(x, y) = k(y, x)$. En efecto: si $\langle u, K_0 v \rangle = \langle K_0^t u, v \rangle$ para cada v , entonces

$$\int_a^b u(x)(K_0 v)(x) dx = \int_a^b (K_0^t u)(x)v(x) dx. \quad (1.21)$$

Ahora bien;

$$\int_a^b u(x)(K_0 v)(x) dx = \int_a^b u(x) \int_a^b k(x, y)v(y) dy dx = \int_a^b \int_a^b u(x)k(x, y)v(y) dy dx.$$

Si intercambiamos las variables x por y , y las variables y por x y aplicando el teorema de Fubini obtenemos

$$\int_a^b u(x)(K_0 v)(x) dx = \int_a^b \int_a^b k(y, x)u(y)v(x) dy dx.$$

Así, de (1.21) tenemos

$$\int_a^b \int_a^b k(y, x)u(y)v(x) dy dx = \int_a^b (K_0^t u)(x)v(x) dx.$$

Luego para cada v se tiene que

$$\int_a^b \left[\int_a^b k(y, x)u(y) dy - (K_0^t u)(x) \right] v(x) dx = 0,$$

de donde se obtiene que

$$(K_0^t u)(x) = \int_a^b k(y, x)u(y) dy,$$

es el operador integral K_0^t con núcleo $k^t(x, y) = k(y, x)$.

Para ilustrar el Teorema (1.2.14) (ver observación (1.2.15)), consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.18. Veamos la siguiente ecuación con núcleo separable:

$$u(x) = f(x) + 2 \int_0^1 (xy)^{1/2} u(y) dy. \quad (1.22)$$

Ya que la ecuación es de la forma $M_0 u = f$ con $M_0 = I - K_0$ debemos analizar, de acuerdo al Teorema 1.2.14, $Ker(I - K_0^t)$. Supongamos que (1.22) tiene dos soluciones y denotemos su diferencia por φ , entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2 \int_0^1 (xy)^{1/2} \varphi(y) dy \\ &= cx^{1/2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde $c = 2 \int_0^1 y^{1/2} \varphi(y) dy$. Esto muestra que existe una solución distinta de cero de la ecuación $(I - K_0)u = 0$. Nótese que lo anterior implica que hay también una solución distinta a cero para la ecuación

$$\psi(x) = \int_0^1 \psi(y)k(x, y) dy.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \int_0^1 k^t(x, y)\psi(y) dy \\
 &= \int_0^1 k(x, y)\psi(y) dy \\
 &= \int_0^1 (yx)^{1/2}\psi(y) dy \\
 &= \int_0^1 k(x, y)\psi(y) dy.
 \end{aligned}$$

Como el operador K_0 es simétrico, esto es $k(x, y) = k(y, x)$, entonces $\psi(x) = x^{1/2}$ es también solución de (1.22) (ver (1.19)).

Finalmente concluimos del Teorema 1.2.14 (ver observación 1.2.15) que la ecuación tiene solución si y solo si $(\psi, f) = 0$, es decir

$$\int_0^1 f(x)\psi(x) dx = 0 \quad \text{ó} \quad \int_0^1 f(x)x^{1/2} dx = 0.$$

Observación 1.2.19. Si resolvemos directamente la ecuación (1.22), podemos ver como se origina la condición de Fredholm. En efecto, la ecuación (1.22) es equivalente a

$$\frac{u(x) - f(x)}{2\sqrt{x}} = \int_0^1 y^{1/2}u(y) dy.$$

Ahora, derivando

$$u'(x) = f'(x) + 2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 y^{1/2}u(y) dy$$

esto es:

$$u'(x) = f'(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{u(x) - f(x)}{2\sqrt{x}} \right),$$

ó

$$u'(x) = f'(x) + \frac{1}{2x}(u(x) - f(x)),$$

lo que es equivalente a:

$$u'(x) - f'(x) = \frac{1}{2x}(u(x) - f(x)).$$

Sea $g(x) = u(x) - f(x)$, entonces se obtiene:

$$g'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$$

de donde

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

Luego $u(x) = \sqrt{x} + f(x)$ es candidato a la solución de (1.21). Ahora, para que se cumpla la igualdad (1.21) se debe tener

$$\sqrt{x} + f(x) = f(x) + 2 \int_0^1 (xy)^{1/2}(\sqrt{y} + f(y)) dy$$

esto es

$$\sqrt{x} + f(x) = f(x) + 2\sqrt{x} \left(\int_0^1 y dy + \int_0^1 \sqrt{y}f(y) dy \right),$$

ó

$$\sqrt{x} + f(x) = f(x) + 2\sqrt{x} \left(\frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{y}f(y) dy \right)$$

lo que es igual a

$$\sqrt{x} = \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \int_0^1 \sqrt{y}f(y) dy$$

ó

$$0 = 2\sqrt{x} \int_0^1 \sqrt{y}f(y) dy.$$

Esto implica que

$$\int_0^1 \sqrt{y}f(y) dy = 0$$

o equivalentemente

$$\int_0^1 \sqrt{y}f(y) dy = \int_0^1 \psi(y)f(y) dy = (\psi, f) = 0,$$

de donde se obtiene la condición de Fredholm.

1.3. Núcleos No Separables

1.3.1. Normas

Definición 1.3.1. Si en un espacio vectorial E se puede definir una función $\|\cdot\|$ que cumple con las condiciones

1. $\|v\| > 0$ si $v \neq 0$
2. $\|cv\| = |c|\|v\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

para todo $u, v \in E$ y $c \in \mathbb{K}$, entonces el espacio E se dice *normado* y la función $\|\cdot\|$ la llamamos *norma*.

Para un vector $v \in \mathbb{R}^n$ definimos la expresión

$$\|v\| = \max_i |v_i|.$$

La cual puede verificarse que es una norma, de acuerdo a la definición anterior.

Para definir la norma de una matriz K , realicemos lo siguiente:

Sea $B(K)$ un número cualquiera, calculado sobre las componentes de K , tal que

$$\|Kv\| \leq B(K)\|v\|$$

para todo v . Llamamos $B(K)$ un *coeficiente de acotamiento* o simplemente *cota*. La mejor elección de $B(K)$ es que sea lo suficientemente pequeño para que cumpla con la desigualdad. Llamamos a tal $B(K)$ la norma de K (de

hecho, se puede demostrar que lo es cuando se encuentra una representación de este número) y la denotamos por $\|K\|$. Entonces:

$$\|Kv\| \leq \|K\|\|v\|,$$

con la igualdad para algún $v \neq 0$.

Proposición 1.3.2. La norma de la matriz K es:

$$\|K\| = \max_i \sum_j |K_{ij}|.$$

Demostración. Usando la desigualdad triangular obtenemos lo siguiente:

$$|(Kv)_i| = \left| \sum_j K_{ij}v_j \right| \leq \sum_j |K_{ij}||v_j|.$$

Como $\|v\|$ es más grande que cada uno de los valores $|v_j|$, obtenemos

$$|(Kv)_i| \leq R_i(K)\|v\|,$$

donde

$$R_i(K) = \sum_j |K_{ij}|.$$

Nos referimos a $R_i(K)$ como *suma absoluta de la fila*. Entonces

$$\|Kv\| = \max_i |(Kv)_i| \leq \|v\|(\max_i R_i).$$

Esto prueba que $\|K\| \leq \max_i \sum_j |K_{ij}|$. Para probar que $\|K\| = \max_i \sum_j |K_{ij}|$ necesitamos ver que un vector v cumpla con la igualdad: $\|Kv\| = R_i(K)\|v\|$.

Sea m el número de la fila con la suma absoluta más grande. Definimos la función *signo* por

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Tomando $v_j = \text{sgn}(K_{mj})$ se tiene $\|v\| = 1$ y

$$(Kv)_m = \sum_j |K_{mj}|$$

entonces $\|Kv\| = R_m(K)$, y podemos concluir que:

$$\|K\| = \max_i \sum_j |K_{ij}|.$$

□

Observación 1.3.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|K^n\| \leq \|K\|^n$. En efecto: Para cualquier coeficiente de acotamiento $B(K)$, se tiene:

$$\|KKv\| \leq B(K)\|Kv\| \leq B(K)B(K)\|v\|.$$

Por otra parte:

$$\|KKv\| \leq B(KK)\|v\|.$$

Así

$$\|KK\| \leq \|K\| \|K\|.$$

De lo anterior obtenemos, por inducción

$$\|K^n\| \leq \|K\|^n.$$

Observar que en general $\|K^n\|$ es estrictamente más pequeña que $\|K\|^n$ como veremos en el ejemplo (1.3.14).

Proposición 1.3.4. El conjunto de todas las funciones u tales que

$$\|u\| = \sup_x |u(x)| < \infty,$$

es un espacio normado, con norma $\|u\|$.

Demostración. Es claro que $\|u\| > 0$ y que $\|cv\| = |c|\|v\|$. Además como $\sup |u(x) + v(x)| \leq \sup |u(x)| + \sup |v(x)|$ se obtiene la condición (3) para que $\|u\|$ sea una norma. \square

Definición 1.3.5. La norma asociada al operador integral K_0 es

$$\|K_0\| = \sup_x \int_a^b |k(x, y)| dy$$

El cual es el análogo al máximo absoluto de la fila en caso que K_0 fuese una matriz.

1.3.2. Método de Schmidt

Definición 1.3.6. Diremos que el operador K_0 definido en (1.3) es *pequeño* si su norma es menor que 1 y, en tal caso al correspondiente núcleo le llamaremos *núcleo pequeño*.

Supongamos que un núcleo $k(x, y)$ se puede escribir como

$$k(x, y) = s(x, y) + e(x, y) \tag{1.24}$$

donde s es separable y donde e es pequeño, entonces la ecuación integral de segundo tipo (1.2) puede ser resuelta como sigue: Siguiendo la analogía en la notación (1.3) la ecuación reescrita es

$$u = h + S_0 u + E_0 u$$

esto es,

$$(I - E_0)u = h + S_0 u.$$

Asumimos, por el momento, que podemos encontrar el inverso de $(I - E_0)^{-1}$.

Entonces se tiene:

$$u = h^* + S_0^* u \tag{1.25}$$

donde $h^* = (I - E_0)^{-1}h$, $S_0^* = (I - E_0)^{-1}S_0$.

Como s es un núcleo separable, entonces s tiene la siguiente forma:

$$s(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y).$$

Luego

$$s^*(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i^*(x)g_i(y),$$

donde $f_i^* = (I - E)^{-1}f_i$.

Por lo tanto, para resolver la ecuación integral (1.2) inicial, sólo tenemos que resolver la ecuación separable (1.25).

Observación 1.3.7. Si $\|E_0\| < 1$, entonces la inversa de $(I - E_0)$ puede ser calculada formalmente por medio de series. Estas series son las llamadas series de *Neumann*:

$$(I - E_0)^{-1} = I + E_0 + E_0^2 + E_0^3 + \dots$$

1.3.3. Métodos de aproximación por Núcleos Separables

Generalmente el núcleo de la ecuación (1.1) no es un núcleo separable, por ende esta ecuación no podría ser resuelta utilizando la Teoría de Fredholm. A continuación mostraremos, sin ser rigurosos, tres diferentes métodos para aproximar estos tipos de núcleos por núcleos separables.

Aproximación por Punto Medio.

Sea $[0,1]$ el intervalo de integración, y lo dividimos en n partes iguales formando una partición P dada por:

$$\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n} \right] \text{ con } m = 1, \dots, n.$$

Definimos

$$k_m(x) = k\left(x, \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n}\right).$$

Consideremos la función

$$u_m(y) = \begin{cases} 1, & y \in \left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right]; \\ 0, & y \notin \left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right]. \end{cases}$$

Así, el núcleo $k(x, y)$ lo aproximamos, puntualmente en su segunda variable y , por

$$k(x, y) = \sum_{m=1}^n k_m(x)u_m(y) + e(x, y)$$

que es un núcleo separable más uno pequeño en algún sentido.

De esta manera la ecuación de segundo tipo la podemos reescribir como

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) + \int_0^1 \sum_{m=1}^n k_m(x)u_m(y)u(y) dy \\ &= h(x) + \sum_{m=1}^n k_m(x) \int_{(m-1)/n}^{m/n} u(y) dy. \end{aligned}$$

Aproximación por Coeficientes de Fourier.

Supongamos que $k(x, y)$ está definido en $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ y definamos la función $u_m(y) = e^{imy}$ y los coeficientes de Fourier de la función $y \rightarrow k(x, y)$ como

$$k_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(x, y)e^{-imy} dy.$$

Podemos aproximar $k(x, y)$ por el núcleo separable

$$k(x, y) = \sum_{m=-n}^n k_m(x)u_m(y) + e(x, y)$$

Notemos que la aproximación obtenida es diferenciable en y y se tiene que la ecuación de segundo tipo se puede escribir como

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) + \int_0^1 \sum_{-n}^n k_k(x) e^{imy} u(y) dy \\ &= h(x) + \sum_{-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(x, s) e^{-ims} ds \right) \int_0^1 e^{imy} u(y) dy. \end{aligned}$$

Detalles sobre el sentido formal de la aproximación indicada anteriormente se estudiará en el capítulo siguiente.

Aproximación por Polinomios

Sea $k(x, y)$ un núcleo continuo y $[0, 1]$ el intervalo de integración, por el teorema de Stone-Weierstrass existe un polinomio $p(x, y; \varepsilon)$ tal que para cualquier $0 \leq x, y \leq 1$ se tiene que $|k(x, y) - p(x, y; \varepsilon)| < \varepsilon$. Esto es, p es una aproximación separable para el núcleo $k(x, y)$, y p tiene la siguiente forma

$$p(x, y; \varepsilon) = \sum_n k_n(x, \varepsilon) y^n,$$

donde las funciones k_n son polinomios.

Luego, podemos escribir la ecuación de segundo tipo como

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) + \int_0^1 p(x, y; \varepsilon) u(y) dy \\ &= h(x) + \sum_n k_n(x, \varepsilon) \int_0^1 y^n u(y) dy. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando cualquiera de los métodos u otros, según sea la ecuación integral que se tenga, el problema se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas tal como hemos estudiado anteriormente.

1.3.4. Iteración por medio de Series de Neumann

Sea $c \in \mathbb{C}$ y K una matriz. A fin de resolver la ecuación $u = f + cKu$ podemos realizar lo siguiente. Se define una sucesión (u_n) de manera recursiva

a través de la fórmula

$$u_{n+1} = f + cK u_n, \quad (1.26)$$

donde u_0 es arbitrario. Por la igualdad (1.26) obtenemos

$$\begin{aligned} u_n &= f + cK u_{n-1} = f + cK(f + cK u_{n-2}) = f + cK f + c^2 K^2 u_{n-2} \\ &= f + cK f + c^2 K^2 (f + cK u_{n-3}) = f + cK f + c^2 K^2 f + c^3 K^3 u_{n-3}, \end{aligned}$$

y de forma sucesiva obtenemos:

$$u_n = f + cK f + c^2 K^2 f + c^3 K^3 f + \dots + c^{n-1} K^{n-1} f + c^n K^n u_0.$$

Lo anterior sugiere que:

$$u = f + \sum_{n=1}^{\infty} c^n K^n f. \quad (1.27)$$

Observamos que el parámetro c puede variar el tamaño de la matriz K . Nos preguntamos: ¿Cuán pequeño debe ser c para que la serie anterior sea convergente?

Proposición 1.3.8. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n f$ es convergente si $\|cK\| < 1$ y $\|f\| < \infty$.

Demostración. Sea $S_N = \sum_{n=0}^{N-1} c^n K^n f$. Como $\|cK\| < 1$, con $N < M$, y $\|f\| < \infty$ se tiene

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N}^M c^n K^n f \right\| \leq \sum_{n=N}^M |c|^n \|K^n\| \|f\| \leq \sum_{n=N}^M |c|^n \|K\|^n \|f\|,$$

donde $\|f\| \sum_{n=N}^M |c|^n \|K\|^n \rightarrow 0$, cuando N y M tienden a infinito. Ya que (S_N) es una sucesión de Cauchy en el espacio vectorial de la matrices, el cual asumimos completo con la norma dada, se obtiene que $\sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n f$ es convergente. \square

Definición 1.3.9. Llamamos serie de Neumann a la serie obtenida en la Proposición 1.3.8.

En la siguiente proposición demostraremos que $\sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n$ coincide con $(I - cK)^{-1}$.

Proposición 1.3.10. Si $\|cK\| < 1$ entonces

$$(I - cK) \sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n = \sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n (I - cK) = I.$$

Demostración. En efecto

$$\begin{aligned} (I - cK) \sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n - \sum_{n=0}^{\infty} c^{n+1} K^{n+1} \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} c^n K^n - \sum_{n=0}^{\infty} c^{n+1} K^{n+1} = I. \end{aligned}$$

Análogamente $\sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n (I - cK) = I.$ □

Observación 1.3.11. La Matriz $R(c)$ asociada al operador que posee Núcleo Resolvente (ver Subsección 1.2.2) correspondiente a la solución de la ecuación $u = f + cKu$ coincide con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c^n K^n$. En efecto: De (1.27) obtenemos

$$u = f + \left(\sum_{n=1}^{\infty} c^n K^n \right) f = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} c^n K^n \right) f$$

Por otra parte, de (1.16) se tiene que $u = (I + cR(c))f$, luego $cR(c)$ coincide exactamente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c^n K^n$.

Observación 1.3.12. La condición de que $|c|\|K\| < 1$ en muchos casos no se tiene, sin embargo la serie de Neumann aún converge si reemplazamos la condición anterior por

$$|c|^2\|K^2\| < 1.$$

En efecto, como $\|K\| \leq \|K^2\|$ obtenemos la siguiente desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c|^n \|K\|^n \|f\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c|^{2n} \|K^2\|^n \|f\|.$$

Así la serie de la izquierda también converge cuando $|c|^2\|K^2\| < 1$.

Lo anterior se resume en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.13. Para que la serie de Neumann sea convergente es suficiente que

$$|c|^n \|K^n\| < 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Es claro que si $\|c^n K^n\| < 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces se tiene que la serie de Neumann es convergente, sólo basta tomar la demostración en la observación anterior y cambiar la potencia de $\|cK\|$. \square

Ejemplo 1.3.14. Analicemos el siguiente ejemplo, dadas las matrices

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

obtenemos $\|K\| = |-2| + |3| = 5$ y $\|K^2\| = |6| + |11| = 17$, si $|c|\|K\| < 1$ entonces $|c| < \frac{1}{5} = 0,2$ pero si $|c|^2\|K^2\| < 1$ entonces $|c| < \frac{1}{\sqrt{17}} \approx 0,24\dots$

De esto concluimos que si $|c|^2\|K^2\| < 1$ y $\|K^2\| < \|K\|^2$ entonces obtenemos una mejor cota para c , esto pues

$$|c|\|K^2\|^{1/2} < 1.$$

Ejemplo 1.3.15. Analizaremos las condiciones para que la matriz

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

posea serie de Neumann convergente.

Vemos que

$$K^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de esto obtenemos por la Proposición 1.3.10

$$(I - cK)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n & \sum_{n=1}^{\infty} nc^n \\ 0 & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n \end{pmatrix},$$

siempre que $|c| < \frac{1}{2}$, luego

$$(I - cK)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-c} & \frac{c}{(1-c)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-c} \end{pmatrix}.$$

Esto último lo podemos comparar con la condición suficiente $\|c^n K^n\| < 1$ para que la serie anterior converja. En efecto, usando Proposición 1.3.2

$$\|c^n K^n\| = |c^n| \|K^n\| = |c^n|(n+1) < 1,$$

entonces

$$|c| < \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

Observar que si $n = 1$ se tiene $|c| < 0,5$ como antes. Ahora, si $n = 2$ se tiene $|c| < 1/\sqrt{3} \approx 0,58$ que es mejor que la anterior y así sucesivamente.

Ejemplo 1.3.16. Se define $\|\cdot\|_1$ de la matriz K como sigue

$$\|K\|_1 = \max_j \sum_i |K_{ij}|,$$

es fácil verificar que $\|\cdot\|_1$ es norma.

Ahora comparemos las cotas encontradas a través de suponer que $|c|\|K\|_1 < 1$ y $|c|^2\|K^2\|_1 < 1$. Dada la matriz

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

obtenemos $\|K\|_1 = 4$ y $\|K^2\|_1 = 14$. Entonces se tiene que

$$|c| < 0,25 \text{ y } |c| < 0,2673 \dots,$$

respectivamente. De esto podemos concluir que se obtiene una mejor cota utilizando la condición $|c|^2\|K^2\|_1 < 1$ ya que el rango de valores de c se amplia y por ende el radio de convergencia de la serie de Neumann también lo hace.

1.3.5. Convergencia Uniforme de la serie de Neumann

A continuación estudiaremos la solución de la ecuación integral $u = f + cK_0u$, donde K_0 es el operador definido en (1.1.3) para tal efecto utilizaremos las normas definidas en Definiciones 1.3.4 y 1.3.5, llamadas también normas de convergencia uniforme.

Anteriormente observamos que, para que la serie de Neumann converja, es suficiente que $|c|\|K\| < 1$, (ver Proposición 1.3.8) en tal caso no se ocuparon las propiedades particulares de la norma asociada a una matriz.

Proposición 1.3.17. Si la norma de f es finita y además $|c|\|K_0\| < 1$, entonces la solución u de la ecuación (1.2) existe.

Demostración. De acuerdo a la sucesión definida en (1.26), con K_0 en lugar de K , tenemos que para cada $\varepsilon > 0$, la sucesión $u_n := \sum_{j=0}^n c^j K^j f$ satisface

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon,$$

para cada $m > n$. Ya que el espacio vectorial de las funciones con la norma definida es completo (ver[4]), entonces la serie de Cauchy es una serie convergente, es decir, existe una función u tal que

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

en particular esto significa que u_n converge uniformemente a la solución u . □

En particular se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.3.18. Si $|c|^n \|K^n\| < 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces la suma parcial $u_n = \sum_{k=1}^n c^k K^k f$ converge uniformemente a la solución límite u .

Ejemplo 1.3.19. Para la ecuación: $u(x) = f(x) + c \int_0^1 k(x, y)u(y) dy$ analizamos dos casos en que la norma del operador asociado a K_0 es menor que 1 y, así la serie de Neumann converge uniformemente a la solución u .

1. $k(x, y) = \sin(xy)$. Como $0 < x < 1$ entonces $xy < y$ de donde $\sin(xy) < \sin(y)$. De esto se tiene que:

$$\|K_0\| = \sup_x \int_0^1 |\sin(xy)| dy \leq \int_0^1 \sin y dy = 1 - \cos(1) < 1.$$

Concluimos que la serie de Neumann converge uniformemente a u .

2. $k(x, y) = 2|x - y|$. En primer lugar calculamos la norma de K_0 :

$$\begin{aligned}\|K_0\| &= \sup_x \int_0^1 2|x - y| dy \\ &\leq \sup_x 2 \left(\int_0^1 |x| dy + \int_0^1 |y| dy \right) = \sup_x 2x + 1 \leq 3.\end{aligned}$$

Ya que la norma no es directamente menor que 1, calcularemos la norma de K_0^2 :

$$\begin{aligned}\|K_0^2\| &= \sup_x \int_0^1 \int_0^1 4|x - z||z - y| dz dy \\ &= \sup_x 4 \int_0^1 |x - z| \left(\int_0^z |z - y| dy + \int_z^1 |z - y| dy \right) dz,\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^z |z - y| dy + \int_z^1 |z - y| dy = \int_0^z z - y dy + \int_z^1 -z + y dy = -z + \frac{1}{2} + z^2,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\|K_0^2\| &= \sup_x 4 \int_0^1 |x - z| \left(-z + \frac{1}{2} + z^2 \right) \\ &= \int_0^x (x - z) \left(-z + \frac{1}{2} + z^2 \right) dz + \int_x^1 (z - x) \left(-z + \frac{1}{2} + z^2 \right) dz \\ &= \sup_x 4 \left(\frac{3x^2 - 2x^3 + x^4}{2} + \frac{1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{6} \right) \\ &= \sup_x 4 \left(\frac{1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4}{6} \right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $\|K_0^2\| < 1$ lo que nos asegura la convergencia uniforme de la serie de Neumann a u .

Ejemplo 1.3.20. Dada la ecuación

$$u(x) = f(x) + c \int_0^1 e^{x-y} u(y) dy$$

encontraremos los valores de c para que la serie de Neumann converja. Para esto resolvemos la ecuación directamente.

Derivando con respecto a x obtenemos:

$$u'(x) = f'(x) + ce^x \int_0^1 e^{-y} u(y) dy = f'(x) + u(x) - f(x).$$

Definiendo $g(x) := u(x) - f(x)$ obtenemos la ecuación:

$$g'(x) = g(x).$$

Así la solución para la ecuación inicial es $u(x) = e^x + f(x)$.

Comparando ésta con la solución $u = f + \sum_1^{\infty} c^n K_0^n f$, desprendemos que

$$1 = e^{-y} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} c^n,$$

por tanto para que esta serie converja se debe tener que $|c| < 1$.

Ahora bien aplicando la definición de norma sobre el operador integral K_0 se tiene que:

$$\|K_0\| = \sup_x \int_0^1 |e^{x-y}| dy = \sup_x e^x [-e^{-y}]_0^1 = \sup_x e^x \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Así $\|K_0\| < e$. Suponiendo $|c|\|K_0\| < 1$ se tiene que $|c| < \frac{1}{e} \approx 0,3679$.

Al comparar las dos formas que hemos utilizado para encontrar el valor de c , observamos que no hay una diferencia significativa para este valor, es decir, se conserva la condición de que $|c| < 1$, para que la ecuación inicial posea solución.

Observación 1.3.21. .

1. Si f es una función continua y $K_0 u$ es continua para cualquier u entonces la solución u es continua.

2. Si K_0 es un operador continuo y f es un función discontinua entonces $u - f = K_0 u$ es continua, es decir, u tiene las mismas discontinuidades que f .

Teorema 1.3.22. Si la norma de f es finita y la norma de K_0 es menor que 1 entonces la ecuación integral $u = f + K_0 u$ tiene solución cuya norma es también finita.

Demostración. Ya que $\|K_0\| < 1$, la serie de Neumann define el operador inverso

$$(I - K_0)^{-1} = I + K_0 + K_0^2 + K_0^3 + \dots$$

Ahora si la norma de f es finita, la ecuación $u = f + K_0 u$ tiene solución

$$u = (I - K_0)^{-1} f$$

donde la norma de u es también finita, ya que

$$\|u\| \leq \|(I - K_0)^{-1}\| \|f\| < \infty.$$

□

1.3.6. Condiciones para la Existencia y Unicidad de la solución de la ecuación con Núcleos Pequeños

La notación $u = (I - K_0)^{-1} f$ pareciera implicar que existe una única solución para la ecuación $u = f + K_0 u$, pero no necesariamente es el caso.

Recordemos que la ecuación $K\varphi = \varphi$ es equivalente a la ecuación $u = f + Ku$ que tiene soluciones u_1 y u_2 con $\varphi = u_1 - u_2$, ($u_1 \neq u_2$). Con respecto a esta última observación, tenemos el siguiente teorema

Teorema 1.3.23. Si la norma del operador K_0 es menor que uno y la norma de φ es finita, entonces la ecuación $u = f + K_0 u$ tiene única solución.

Demostración. Supongamos que la ecuación $u = f + K_0 u$ tiene dos soluciones digamos u_1, u_2 con $u_1 \neq u_2$ entonces restando, se obtiene la ecuación

$$K\varphi = \varphi, \quad \varphi \neq 0.$$

Ahora, aplicando la norma a la ecuación anterior y usando el hecho que $\|K_0\| < 1$ obtenemos:

$$\|\varphi\| = \|K_0\varphi\| \leq \|K_0\| \|\varphi\| < \|\varphi\|$$

donde se tiene una contradicción que nace del supuesto $u_1 \neq u_2$, así se tiene que $\varphi = 0$, por tanto $u_1 = u_2$. Así, la ecuación $u = f + Ku$ tiene una única solución. \square

Veamos el siguiente ejemplo que ilustra la importancia de que la norma de φ sea finita.

Dado el núcleo

$$k(x, y) := \begin{cases} y^{x-y}, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$$

Calculamos la norma de K_0 :

$$\begin{aligned} \|K_0\| &= \sup_x \int_0^1 |k(x, y)| dy = \sup_x \left(\int_0^x |k(x, y)| dy + \int_x^1 |k(x, y)| dy \right) \\ &= \sup_x \int_0^x y^{x-y} dy. \end{aligned}$$

Dado que $x - y \leq 1$ con $y \geq 0$ entonces podemos acotar la integral anterior por:

$$\|K_0\| \leq \sup_x \int_0^x y dy = \frac{1}{2} < 1.$$

Así, $\|K_0\| < 1$. Sea $\varphi(x) = x^{x-1}$ entonces su norma es

$$\|\varphi\| = \sup_x |x^{x-1}| = \infty.$$

Como la norma de φ es divergente la ecuación $u = f + K_0u$ asociada al problema posee más de una solución, incluso cuando $\|K_0\| < 1$.

Anteriormente vimos que si $k(x, y) = s(x, y) + e(x, y)$ donde $s(x, y)$ es separable y $e(x, y)$ es pequeño, entonces la ecuación $u = f + K_0u$ puede ser reducida a un sistema de ecuaciones lineales algebraicas. De esto se desprende que el espacio de las funciones con norma finita $\|u\| < \infty$ son en cierto sentido ‘cercanamente’ de dimensión finita.

A fin de precisar como podemos ampliar la clase de núcleos $k(x, y)$ procederemos como sigue: Escribimos

$$k(x, y) = c(x, y) + e_1(x, y)$$

donde $c(x, y)$ es una función continua en un conjunto cerrado $[a, b] \times [a, b]$.

Teorema 1.3.24. Sea $k(x, y) = c(x, y) + e_1(x, y)$ con c función continua y e_1 pequeño, entonces el núcleo anterior se puede escribir como $k(x, y) = s(x, y) + e(x, y)$ donde s es separable y e es pequeño.

Demostración. .

Sean $K_0(u)(x) = \int_a^b k(x, y)u(y) dy$,

$C_0(u)(x) = \int_a^b c(x, y)u(y) dy$ y $E_1(u)(x) = \int_a^b e_1(x, y)u(y) dy$. Ya que c es continua en $[a, b] \times [a, b]$, se tiene que

$$\|C_0\| = \sup_x \int_a^b |c(x, y)| dy < \infty.$$

Luego:

$$\|K_0\| = \|C_0 + E_1\| \leq \|C_0\| + \|E_1\| < \infty.$$

Por otra parte la continuidad de c implica, por el Teorema de aproximación de Stone Weierstrass ver [1], que $c(x, y)$ puede ser aproximada uniformemente por un polinomio $p(x, y)$, esto es:

$$c(x, y) = p(x, y) + e_2(x, y)$$

donde $e_2(x, y)$ se elige de manera que $\|E_2\| < 1 - \|E_1\|$.

Sea $e(x, y) = e_1(x, y) + e_2(x, y)$ entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} h(x, y) &= c(x, y) + e_1(x, y) \\ &= p(x, y) + e_1(x, y) + e_2(x, y) \\ &= p(x, y) + e(x, y), \end{aligned}$$

donde $\|E\| = \|E_1 + E_2\| \leq \|E_1\| + \|E_2\| < 1$ y $p(x, y)$ es separable.

□

El teorema anterior nos sirve para ampliar los núcleos de la forma $k = c + e_1$ que cumplan con las condiciones de la teoría de Fredholm.

Observación 1.3.25. Existe la posibilidad de que e_1 posea infinitas discontinuidades en su dominio, pero aún así $\|E_1\| < 1$.

Con respecto a la observación anterior, veamos el siguiente ejemplo

Sean

$$k(x, y) = |x - y|^{-\frac{1}{2}}$$

y

$$c(x, y) = (|x - y| + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

entonces $e_1(x, y) = k(x, y) - c(x, y)$ tiene infinitas discontinuidades en su dominio, pero $\|E_1\| < 1$.

Capítulo 2

Teoría de Fredholm en espacios de Lebesgue

Existen funciones y operadores cuyas normas (dadas en Proposición 1.3.4 y Definición 1.3.5, respectivamente) divergen, con lo cual los métodos anteriormente presentados no pueden ser utilizados. Es por esto que el presente capítulo tendrá como motivación encontrar nuevas normas tales que la teoría de Fredholm siga siendo válida, ampliando la gama de términos no homogéneos y núcleos que puedan ser utilizados para resolver una ecuación del segundo tipo.

La definición de integral que utilizaremos (a menos que se indique lo contrario) será la integral de Lebesgue, dada su generalidad y propiedades que la integral de Riemann no posee.

2.1. Funciones Absolutamente Integrables

Definición 2.1.1. Una función u se dice absolutamente integrable en $[a, b]$ si

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(x)| dx < \infty. \quad (2.1)$$

Observación 2.1.2. Se verifica que $\|u\|_1 = 0$ sí y sólo sí $u(x) = 0$ para cada $x \in [a, b]$ que no esté en un conjunto de medida nula.

Se denota por $L^1[a, b]$ al espacio vectorial de todas las funciones que cumplan con la Definición 2.1.1, donde $u = v$ sí y sólo sí $u(x) = v(x)$ para cada x que no esté en un conjunto de medida nula.

Proposición 2.1.3. La función $\|\cdot\|_1$ es una norma.

Demostración. Para tal efecto se deben cumplir las condiciones de la Definición 1.3.1.

(1) se obtiene directamente de la observación (2.1.2), mientras que (2) y (3) son fácilmente verificables. Así, $\|\cdot\|_1$ es una norma. \square

En lo que sigue, analizaremos las soluciones para la ecuación integral $u = f + K_0 u$ cuando f está en $L^1[a, b]$.

Proposición 2.1.4. Si $y \rightarrow k(x, y)$ es continua, entonces

$$\|K_0\| \leq \sup_y \int_a^b |k(x, y)| dy.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|K_0 u\|_1 &= \int_a^b |(Ku)(x)| dx = \int_a^b \left| \int_a^b k(x, y) u(y) dy \right| dx \\
&\leq \int_a^b \int_a^b |k(x, y)| |u(y)| dy dx = \int_a^b |u(y)| \int_a^b |k(x, y)| dx dy \\
&\leq \int_a^b |u(y)| \sup_y \int_a^b |k(x, y)| dx dy \\
&= \sup_y \int_a^b |k(x, y)| dx \|u\|_1.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.1.5. Si $y \rightarrow k(x, y)$ no es continua, se tiene que $\|K_0\| \leq \text{ess sup} \int_a^b |k(x, y)| dx$, donde *ess sup* denota *supremo esencial* (ver [1]).

A fin de resolver la ecuación $u = f + cK_0 u$, basta tener que $\|cK_0\| < 1$. Esto se ha demostrado en la Proposición 1.3.8 donde sólo se utilizaron las propiedades generales de norma. De esta manera la solución u es:

$$u = f + \sum_{n=1}^{\infty} c^n K_0^n f.$$

A fin de probar que esta solución pertenece al espacio L^1 , formamos la sucesión u_n de la siguiente forma:

$$u_n = \sum_{i=0}^n c^i K_0^i f.$$

y observamos que (u_n) es una sucesión de Cauchy, por lo estudiado en la Sección 1.3.5. Como L^1 es completo, ver [4], esta sucesión converge a u , la cual es la solución para la ecuación $u = f + cK_0 u$. Así, u pertenece a L^1 .

Ejemplo 2.1.6. Para ilustrar como esta nueva norma amplía los tipos de funciones f y k que podemos ocupar, analicemos la siguiente ecuación

$$u(x) = x^{-1/2} + \int_0^1 (x-1)^{-1/3} u(y) dy. \quad (2.2)$$

En primer lugar observamos que

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |x^{-1/2}| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

de donde vemos que $\|f\|$ diverge, lo mismo ocurre para

$$\|K_0\| = \sup_{x \in [0,1]} |(1-x)^{-1/3}| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}},$$

así la ecuación (2.2) no tiene solución utilizando la norma del supremo. Al contrario si calculamos $\|f\|_1$ y $\|K_0\|_1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^1 |x^{-1/2}| dx = 2, \\ \|K_0\|_1 &\leq \sup_{y \in [0,1]} \int_0^1 |(1-x)^{-1/3}| dx = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ya que ambas normas son finitas concluimos que la ecuación (2.2) tiene solución y ésta pertenece a $L^1(0,1)$.

2.2. Funciones de Cuadrado Integrible

Definición 2.2.1. Una función u se dice de cuadrado integrable en $[a, b]$ si

$$\|u\|_2 = \left(\int_a^b u^2(x) dx \right) < \infty. \quad (2.3)$$

Se denota por $L^2[a, b]$ al espacio vectorial de todas las funciones que cumplan con la Definición 2.2.1, donde $u = v$ si y sólo si $u(x) = v(x)$ para cada x que no esté en un conjunto de medida nula.

Observación 2.2.2. Otra manera de definir $L^2[a, b]$ es considerando la clausura del espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$ con la norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Proposición 2.2.3. La función $\|\cdot\|_2$ es una norma.

Demostración. Análoga a la proposición (2.1.3) □

Analizaremos las soluciones para la ecuación integral $u = f + K_0u$ cuando f está en $L^2[a, b]$.

Proposición 2.2.4.

$$\|K_0\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dy dx \right)^{1/2}.$$

Demostración. Si u está $L^2[a, b]$ entonces

$$\begin{aligned} \|K_0u\|_2^2 &= \int_a^b (K_0u)^2(x) dx = \int_a^b \left(\int_a^b k(x, y)u(y) dy \right)^2 dx = \int_a^b \langle k(x, \cdot), u \rangle dx \\ &\leq \int_a^b \|k(x, \cdot)\|_2^2 \|u\|_2^2 dx = \|u\|_2^2 \int_a^b \|k(x, \cdot)\|_2^2 dx, \end{aligned}$$

ahora si $B^2(K_0) = \int_a^b \|k(x, \cdot)\|_2^2 dx$ entonces

$$\|K_0u\|_2 \leq B(K_0)\|u\|_2.$$

□

Observación 2.2.5. Notemos que $B(K_0) < 1$ implica $\|K_0\| < 1$, así la ecuación $u = f + K_0u$ tiene solución. Esta solución se encuentra en $L^2[a, b]$, puesto que este espacio es completo, ver [4].

Los siguientes teoremas complementan la demostración del Teorema Fischer-Riesz que es una herramienta útil para construir funciones de cuadrado integrable a partir de vectores de dimensión infinita, el cual nos permite llevar la teoría de Fredholm a este tipo de espacios vectoriales.

Teorema 2.2.6 (Beppo Levi). Sea $(f_n(x))$ una sucesión de funciones, tal que $\sum f_n(x)$ es absolutamente convergente, *c.t.p.*, con límite $f(x)$, entonces $f(x)$ es integrable, y

$$\int f(x) dx = \sum \int f_n(x) dx.$$

Teorema 2.2.7 (Fatou). Sea $(f_n(x))$ una sucesión de funciones, tal que $f_n(x) \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(x) \rightarrow f(x)$ *c.t.p.* con $\int f_n(x) dx < b$, para algún $b \in \mathbb{R}$, entonces $f(x)$ es integrable y $\int f(x) dx < b$.

Teorema 2.2.8 (Fischer-Riesz). Si $f = (f_1, f_2, \dots)$ es un vector de dimensión infinita con $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 < \infty$ entonces f define una función g en L^2 tal que

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n,$$

donde $\{u_n\}$ es un sistema ortonormal completo.

Demostración. Sea $S_n(x)$ la n -ésima suma parcial de la serie $\sum_{i=0}^{\infty} f_i u_i(x)$ y L la longitud del intervalo sobre el cual se integra. De esta manera

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\|_{L^1} &= \int \left| \sum_{i=n+1}^m f_i u_i(x) \right| dx \leq \left(\int 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int \left| \sum_{i=n+1}^m f_i u_i(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= L^{1/2} \|S_m - S_n\|_{L^2} = L^{1/2} \left\langle \sum_{i=n+1}^m f_i u_i(x), \sum_{j=n+1}^m f_j u_j(x) \right\rangle \\ &= L^{1/2} \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m f_i f_j \langle u_i, u_j \rangle = L^{1/2} \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2, \end{aligned}$$

donde $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$. Así, S_n es una sucesión de Cauchy. Dado que L^1 es completo, por Teorema de Beppo Levi, S_n es una sucesión

convergente con límite g en L^1 . De esto se tiene que S_n es una suma parcial acotada, con cota k . Ahora, si hacemos

$$\int S_n^2(x) dx = \int \left(\sum_{i=1}^n f_i u_i \right)^2 dx < \int k^2 dx < \infty$$

y como $S_n^2 \rightarrow g^2$, $n \rightarrow \infty$ completamos las hipótesis del teorema de Fatou. Por tanto g es una función de cuadrado integrable. \square

2.2.1. Descomposición de Núcleos

En el método de Schmidt se supone que un núcleo $k(x, y)$ se puede descomponer como

$$k(x, y) = s(x, y) + e(x, y); \quad x, y \in [a, b],$$

donde s es separable y e es pequeño. En esta sección veremos como lograr esta descomposición en el caso del espacio $L^2[a, b]$, con la única restricción que $k(x, y)$ sea continua.

La idea es escribir:

$$k(x, y) = \sum_{|n| < N} k_n(x) e^{iny} + \sum_{|n| \geq N} k_n(x) e^{iny},$$

donde $k_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(x, y) e^{-iny} dy$ son los coeficientes de Fourier de la función $y \rightarrow k(x, y)$ con x fijo. (ver [1]).

El uso de los coeficientes de Fourier tiene una motivación especial. Si aproximamos una función f , primero por medio de una combinación lineal arbitraria y luego utilizando coeficientes de Fourier, obtenemos respectivamente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x) + E(x), \quad f(x) = \sum_{n=1}^N f_n u_n(x) + e(x),$$

donde u_n es cualquier sistema ortonormal completo. Si hacemos la diferencia entre los términos anteriores, encontramos

$$E(x) = \sum_{n=1}^N (f_n - c_n)u_n(x) + e(x)$$

que corresponde al tamaño del error. Ahora, si calculamos $\|E\|_2^2$ obtenemos

$$\|E\|_2^2 = \left\| \sum_{n=1}^N (f_n - c_n)u_n + e \right\|_2^2 = \|e\|_2^2 + 2\langle e, \sum_{n=1}^N (f_n - c_n)u_n \rangle + \left\| \sum_{n=1}^N (f_n - c_n)u_n \right\|_2^2.$$

Observemos que e es ortogonal a $f - \sum f_n u_n$ ya que

$$\begin{aligned} & \langle f - \sum f_m u_m, \sum (f_n - c_n)u_n \rangle = \langle f - \sum f_m u_m, \sum f_n u_n - \sum c_n u_n \rangle \\ &= \langle f, \sum f_n u_n \rangle - \langle f, \sum c_n u_n \rangle - \langle \sum f_m u_m, \sum f_n u_n \rangle + \langle \sum f_m u_m, \sum c_n u_n \rangle \\ &= \sum f_n \langle f, u_n \rangle - \sum c_n \langle f, u_n \rangle - \sum_m \sum_n f_m f_n \langle u_m, u_n \rangle + \sum_m \sum_n f_m c_n \langle u_m, u_n \rangle \\ &= \sum f_n \langle f, u_n \rangle - \sum c_n \langle f, u_n \rangle - \sum_n f_n^2 + \sum f_n c_n = 0. \end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\|E\|_2^2 = \|e\|_2^2 + \sum_{n=1}^N (f_n - c_n)^2.$$

Así, concluimos que el error se minimiza cuando $f_n = c_n$. Por lo tanto el utilizar coeficientes de Fourier para aproximar una función en $L^2[a, b]$ optimiza el tamaño del error.

Teorema 2.2.9. Sea u_n un conjunto ortonormal en $L^2[a, b]$. Si f es una función en $L^2[a, b]$ entonces $f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, u_n \rangle u_n$.

Demostración. Ver [1], página 16. □

El símbolo $\stackrel{L^2}{=}$ representa una igualdad con la norma del espacio $L^2[a, b]$, es decir,

$$\left\| f - \sum_{-n}^n \langle f, u_i \rangle u_i \right\|_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Proposición 2.2.10. Para cada $f \in L^2[a, b]$ se tiene

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_i|^2, \quad (2.5)$$

que llamamos *relación de completitud*.

Demostración. De (2.4) se obtiene lo siguiente:

$$\left\| f - \sum_{-n}^n \langle f, u_i \rangle u_i \right\|_2^2 = \langle f - \sum_{-n}^n \langle f, u_i \rangle u_i, f - \sum_{-n}^n \langle f, u_i \rangle u_i \rangle$$

que es equivalente a

$$\langle f, f \rangle - 2 \langle f, f - \sum_{-n}^n \langle f, u_i \rangle u_i \rangle + \langle f - \sum_{-n}^n \langle f, u_i \rangle u_i, f - \sum_{-n}^n \langle f, u_j \rangle u_j \rangle$$

ó

$$\|f\|^2 - 2 \sum_{-n}^n f_i^2 + \sum_{-n}^n f_i^2 = \|f\|^2 - \sum_{-n}^n f_i^2.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ se obtiene la afirmación. \square

Proposición 2.2.11. Para cada $f, g \in L^2[a, b]$ se tiene

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_i g_i,$$

que llamamos *identidad de Parseval*.

Demostración. Tenemos que

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2.$$

Por otro lado ocupando la identidad (2.5) se tiene que

$$\|f + g\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f_n + g_n)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^2 + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n g_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n^2$$

lo que implica que

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n g_n.$$

□

Consideremos $y \rightarrow k(x, y)$ en $L^2[a, b]$ con x fijo. Empleando el Teorema 2.2.9 tenemos que

$$k(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n(x) u_n(y),$$

donde $k_n(x)$ son los coeficientes de Fourier de $k(x, y)$. Estos son:

$$k_n(x) = \langle k(x, \cdot), u_n \rangle = \int_a^b k(x, y) u_n(y) dy.$$

De esta manera la función $k(x, y)$ se aproxima por

$$k(x, y) = \sum_{|n| < N} k_n(x) u_n(y) + \sum_{|n| > N} k_n(x) u_n(y). \quad (2.6)$$

Definiendo $s_n(x, y) = \sum_{|n| < N} k_n(x) u_n(y)$ y $e_n(x, y) = \sum_{|n| > N} k_n(x) u_n(y)$ obtenemos

$$k(x, y) = s_n(x, y) + e_n(x, y).$$

Proposición 2.2.12. Sea $(E_n u)(x) = \int_a^b e_n(x, y) u(y) dy$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|E_n\| < 1$, para cada $n \geq N_0$.

Demostración. .

Afirmación: $e_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En efecto, como $k(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n(x) u_n(y)$, entonces

$$e_n(x, y) = k(x, y) - \sum_{|n| \leq N} k_n(x) u_n(y)$$

de donde que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|k - s_n\| = 0,$$

lo que prueba la afirmación.

Ahora bien; por Proposición 2.2.4 se tiene

$$\|E_n\| \leq \int_a^b \int_a^b e_n(x, y)^2 dx dy,$$

y como $e_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene $\|E_n\| \rightarrow 0$. □

2.3. Funciones Propias

En la sección anterior se observó que para poder aproximar $k(x, y)$ por (2.6) se requiere de un sistema ortonormal completo $\{u_n\}$. Para justificar la existencia de éste realizaremos el siguiente análisis.

A continuación se entregan Definiciones y Teoremas que complementan la Demostración del Teorema 2.3.4

Definición 2.3.1. Diremos que una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio E con producto interno \langle, \rangle converge *débilmente* a un límite $a \in E$, lo cual escribiremos $a_n \xrightarrow{w} a$, si

$$\langle a_n, y \rangle \rightarrow \langle a, y \rangle, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

para cada y en el espacio.

Definición 2.3.2. Un conjunto $X \subseteq E$ es débilmente compacto si para toda sucesión $u_n \in X$ existe una subsucesión u_{n_k} que converge débilmente en X .

Teorema 2.3.3. Sea $X \subseteq E$ un conjunto. Si X es débilmente compacto entonces X es débilmente cerrado.

Demostración. ver [1] section 13 p.163. □

Teorema 2.3.4. Sea K_0 el operador integral de la ecuación (1.2) y supongamos que K_0 es simétrico, entonces K_0 posee una función propia.

Demostración. Consideremos la función $Q : L^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $Q(u) = \frac{\langle u, K_0 u \rangle}{\|u\|_2^2}$. Esta función se conoce como cociente de *Rayleigh*.

Afirmación: La función Q tiene un máximo.

En efecto, primero observamos que el conjunto $A = \{x \in L^2[a, b] : \|x\|_2 = 1\}$ es débilmente compacto, lo cual se conoce como Teorema de *Alaoglu*, ver [1].

Por Teorema 2.3.3 existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|k| = \sup_{u \in A} |Q(u)|.$$

Por definición de supremo se tiene que existe una sucesión $(u_n) \subset A$ tal que

$$|k| - \frac{1}{n} \leq |Q(u_n)|,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $|Q(u_n)| \leq |k|$. Así, se tiene

$$|k| - \frac{1}{n} \leq |Q(u_n)| \leq |k|.$$

Luego, se obtiene $|Q(u_n)| \rightarrow |k|$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora, ya que A es débilmente compacto, tenemos que existe una sub-sucesión, (u_{nk}) , de la sucesión (u_n) tal que $u_{nk} \xrightarrow{w} \varphi$ para algún $\varphi \in A$.

Como $u \rightarrow |Q(u)|$ es una función continua obtenemos

$$|Q(u_{nk})| \xrightarrow{w} |Q(\varphi)|, \quad n \rightarrow \infty.$$

Así, por unicidad de límite se tiene que:

$$|Q(\varphi)| = |k|.$$

Por tanto, $|Q(u)| \leq |Q(\varphi)|$ para cada $u \in A$.

Dado $y \in L^2[a, b]$, definamos $u := \frac{y}{\|y\|_2}$. Entonces $u \in A$ y por la parte anterior concluimos que

$$\left| Q\left(\frac{y}{\|y\|_2}\right) \right| \leq |Q(\varphi)|$$

pero

$$\left| Q\left(\frac{y}{\|y\|_2}\right) \right| = \left| \frac{\left\langle \frac{y}{\|y\|_2}, K_0 \frac{y}{\|y\|_2} \right\rangle}{\left\| \frac{y}{\|y\|_2} \right\|_2^2} \right| = \left| \frac{1}{\|y\|_2^2} \langle y, K_0 y \rangle \right| = |Q(y)|$$

De esto se tiene que $|Q(y)| \leq |Q(\varphi)|$ para todo $y \in L^2[a, b]$, y así Q posee un máximo en φ , lo cual prueba la afirmación.

Sea $y \in L^2[a, b]$. Consideremos la función $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q(t) = Q(\varphi + ty)$. Dado que $|Q(m)| \leq |Q(\varphi)|$ para todo $m \in L^2[a, b]$ podemos escoger m como $\varphi + ty$ y entonces

$$q(t) \leq q(0), \text{ para cada } t \in \mathbb{R},$$

puesto que $q(0) = Q(\varphi)$.

Luego, q tiene un máximo en 0, y esto implica que $q'(0) = 0$.

Por otra parte, ya que

$$\begin{aligned} q(t) &= Q(\varphi + ty) = \frac{\langle \varphi + ty, K_0(\varphi + ty) \rangle}{\|\varphi + ty\|_2^2} \\ &= \frac{\langle \varphi, K_0 \varphi \rangle + t \langle \varphi, K_0 y \rangle + t \langle y, K_0 \varphi \rangle + t^2 \langle y, K_0 y \rangle}{\|\varphi\|_2^2 + 2t \langle \varphi, y \rangle + t^2 \|y\|_2^2}. \end{aligned}$$

Dado que K_0 es un operador simétrico se tiene

$$q(t) = \frac{\langle \varphi, K_0 \varphi \rangle + 2t \langle K_0 \varphi, y \rangle + t^2 \langle y, K_0 y \rangle}{\|\varphi\|_2^2 + 2t \langle \varphi, y \rangle + t^2 \|y\|_2^2}$$

Derivando la función q obtenemos

$$q'(t) = \frac{(2\langle K_0\varphi, y \rangle + 2t\langle y, K_0y \rangle)\|\varphi + ty\|_2^2 - \langle \varphi + ty, K_0(\varphi + ty) \rangle(2\langle \varphi, y \rangle + 2t\|y\|_2^2)}{(\|\varphi\|_2^2 + 2t\langle \varphi, y \rangle + t^2\|y\|_2^2)^2}$$

Evaluable q' en $t = 0$, y como $\varphi \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} q'(0) &= 2\langle K_0\varphi, y \rangle - 2\langle \varphi, K_0\varphi \rangle \langle \varphi, y \rangle \\ &= 2\langle K_0\varphi, y \rangle - 2\langle \varphi \langle \varphi, K_0\varphi \rangle, y \rangle, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\langle K_0\varphi - \varphi \langle \varphi, K_0\varphi \rangle, y \rangle = 0,$$

para todo $y \in L^2[a, b]$. Esto implica que $K_0\varphi - \varphi \langle \varphi, K_0\varphi \rangle = 0$ entonces $K_0\varphi = \varphi \langle \varphi, K_0\varphi \rangle$ donde φ es la función propia que buscábamos y $\langle \varphi, K_0\varphi \rangle$ es su valor propio. \square

Observación 2.3.5. Asumiendo que K_0 es simétrico generamos una base ortonormal por el proceso de ortogonalización de *Gram-Schmidt* a partir de la función propia φ . Así aseguramos la existencia de una base ortonormal completa.

2.4. Teoría en L^p

En las secciones anteriores hemos considerado dos espacios de Lebesgue L^1 y L^2 . Ahora, si consideramos un número $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \geq 1$, entonces podemos definir el espacio general L^p de Lebesgue como sigue

Definición 2.4.1. Una función u se dice p -integrable en $[a, b]$ si

$$\|u\|_p = \left[\int_a^b |u(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty, \quad p \geq 1.$$

Se denota por $L^p[a, b]$ al espacio vectorial de todas las funciones que cumplan con la Definición 2.4.1, donde $u = v$ sí y sólo sí $u(x) = v(x)$ para cada x que no esté en un conjunto de medida nula.

Proposición 2.4.2 (Desigualdad de Hölder). Sea u una función en $L^p[a, b]$ y v una función en $L^q[a, b]$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $p, q \geq 1$, entonces se tiene que

$$\int_a^b |u(x)v(x)| dx \leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |v(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Observación 2.4.3. De la desigualdad de Hölder se obtiene la generalización de la desigualdad de Schwartz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Proposición 2.4.4. Sea u en $L^m[a, b]$ entonces u pertenece a $L^n[a, b]$ para todo $n < m$.

Demostración. Tomando $p = m/n$ y aplicando la desigualdad de Hölder con las funciones $u(x)^n$ y $v(x) \equiv 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)^n \cdot 1 dx &\leq \left(\int_a^b u(x)^m dx \right)^{n/m} \left(\int_a^b 1^{(m-n)/m} dx \right)^{m/(m-n)} \\ &= \left[\left(\int_a^b u(x)^m dx \right)^{1/m} \right]^n (b-a)^{m/(m-n)}. \end{aligned}$$

Dado que $u \in L^m[a, b]$ entonces $\|u\|_m < \infty$, luego el producto anterior es finito y así $u \in L^n[a, b]$. \square

Proposición 2.4.5 (Desigualdad de Minkowski). Sean u y v funciones en $L^p[a, b]$ ($p \geq 1$) entonces se tiene que

$$\left(\int_a^b |u(x) + v(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Las demostraciones de las Proposiciones 2.4.2 y 2.4.5 se encuentran en [6].

Proposición 2.4.6. La función $\|\cdot\|_p$ definida en 2.4.1 es una norma.

Demostración. Para tal efecto se deben cumplir las condiciones de la Definición 1.3.1.

(1) se obtiene directamente de la observación (2.1.2) cambiando el símbolo $\|\cdot\|_1$ por $\|\cdot\|_p$ donde corresponda. (2) es fácilmente verificable, mientras que (3) se obtiene directamente de la Proposición 2.4.5. Así, $\|\cdot\|_p$ es una norma. \square

Proposición 2.4.7.

$$\|K_0 u\|_p \leq \left(\int_a^b \|k(x, \cdot)\|_p^p dx \right)^{1/p}.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \|K_0 u\|_p &= \left(\int_a^b |(K_0 u)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_a^b \left| \int_a^b k(x, y) u(y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_a^b \left(\int_a^b |k(x, y) u(y)| dy \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_a^b \langle k(x, \cdot), u \rangle^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Luego por la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned} \|K_0 u\|_p &\leq \left(\int_a^b \|k(x, \cdot)\|_p^p \|u\|_q^p dx \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_q \left(\int_a^b \|k(x, \cdot)\|_p^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

\square

Proposición 2.4.8. Para que el producto de funciones $u(x)v(x)$ pertenezca a $L^p[a, b]$ para todo $u \in L^p[a, b]$ se debe tener $v \in L^q[a, b]$.

Demostración. En efecto,

$$\left(\int_a^b (u(x)v(x))^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_a^b u(x)^p v(x)^p dx \right)^{1/p}$$

ocupando la desigualdad de Hölder se obtiene:

$$\left(\int_a^b u(x)^p v(x)^p dx \right)^{1/p} \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

De la observación 1.3.3 tenemos que $\|u^p\| \leq \|u\|^p$. Así,

$$\left(\int_a^b (u(x)v(x))^p dx \right)^{1/p} \leq \|u\|_p^p \|v\|_q^p < \infty.$$

□

Observación 2.4.9. .

1. De la proposición anterior se obtiene que el operador $K_0 u$ pertenece a $L^p[a, b]$ para todo $u \in L^p[a, b]$ si $k(x, y)$ pertenece a $L^q[a, b]$.

2. Como $\|K_0\|$ es menor que $\left(\int_a^b \|k(x, \cdot)\|_p^p dx \right)^{1/p}$, observamos que para poder resolver la ecuación (1.2), con $f(x)$ en $L^p[a, b]$ y $k(x, y)$ en $L^q[a, b]$ sólo necesitamos que la cota anterior sea menor que 1.

3. Si u es una función continua en $L^p[a, b]$ se tiene que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \sup_{x \in [a, b]} |u(x)|.$$

Ahora bien, si u no es una función continua entonces el límite anterior será de la siguiente forma

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \text{ess sup}_{x \in [a, b]} |u(x)|.$$

Bibliografía

- [1] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate texts in Mathematics **96**, Springer-Verlag, New York, Berlin, London, Tokyo, 1990.
- [2] S.I. Grossman, *Algebra Lineal*, McGraw-Hill, Mexico, Buenos Aires, Madrid, Nueva York, 1996.
- [3] E.L. Lima, *Curso de Análise Vol.1*, Editora Hamburg, Sao Paulo, 1982.
- [4] E. Kreizig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, Toronto, Singapore, 1978.
- [5] A.C. Pipkin, *A Course on Integral Equations*, Texts in Applied Mathematics **9**, Springer Verlag, New York, Berlin, London, Paris, Tokyo, 1991.
- [6] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, Sydney, 1966.