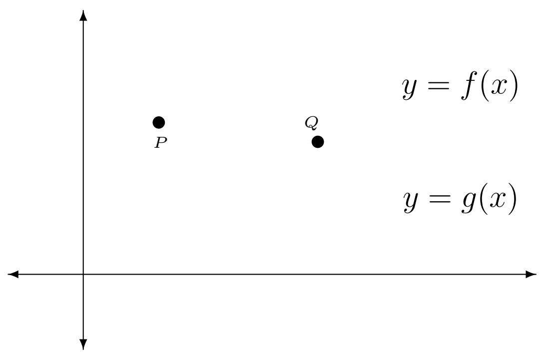
Sistemas de Ecuaciones y Matrices

0.1 Sistemas de ecuaciones

Consideremos las gráficas de dos funciones f y g como en la figura siguiente:



En la práctica, en ocasiones hay que encontrar puntos como $P(a, b)$ y $Q(c, d)$, en donde las gráficas se intersectan. Como $P(a, b)$ está en cada gráfica, el par (a, b) es una *solución* de las ecuaciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$; esto es:

$$b = f(a) \quad \text{y} \quad b = g(a).$$

Decimos que (a, b) es una solución del *sistema de ecuaciones* (o simplemente *sistema*):

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x), \end{cases}$$

donde la llave se usa para indicar que las ecuaciones deben tratarse en forma simultánea. Del mismo modo, el par (c, d) es una solución del sistema. *Resolver* un sistema de ecuaciones significa hallar todas las soluciones.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3. \end{cases}$$

Las gráficas de las ecuaciones son una parábola y una recta.

Realizando una gráfica, es fácil ver que los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ son soluciones del sistema (Ejercicio para el lector). Sin embargo, deseamos tener una estrategia algebraica que permita encontrar las soluciones. Una de ellas es llamada el *método de sustitución*.

Básicamente, el método de sustitución consiste en los siguientes pasos:

1. Despejar una variable de una de las ecuaciones en términos de otra.

2. Sustituir en la otra ecuación la expresión encontrada en el paso anterior a fin de obtener una ecuación sólo en una variable.

3. Encontrar las soluciones de la ecuación en una variable obtenida en el paso anterior.

4. Reemplazar los valores encontrados en el paso anterior en la ecuación del paso 1, para hallar los valores en la otra variable.

5. Comprobar cada par (x, y) encontrado en el paso 4, en el sistema dado.

Por ejemplo, si consideramos las ecuaciones $y = x^2$ y $y = 2x + 3$ del ejemplo en la introducción, podemos *sustituir* x^2 por y en $y = 2x + 3$ obteniendo:

$$x^2 = 2x + 3$$

ó

$$(x + 1)(x - 3) = 0,$$

de donde se obtienen las soluciones $x = -1$ y $x = 3$.

Esto da los valores x de las soluciones (x, y) del sistema. A fin de hallar los valores y correspondientes, podemos usar $y = x^2$ ó $y = 2x + 3$. Con

$y = x^2$, resulta

$$\text{Si } x = -1 \text{ , entonces } y = (-1)^2 = 1$$
$$\text{Si } x = 3 \text{ , entonces } y = 3^2 = 9.$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$.

Ejemplo: Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Para ello, despejamos x en la segunda ecuación en términos de y:

$$x = 3 - 2y.$$

Sustituimos la expresión de x encontrada, en la primera ecuación del sistema:

$$(3 - 2y) + y^2 = 6$$

ó

$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

Resolvemos para y la ecuación anterior. Se obtiene:

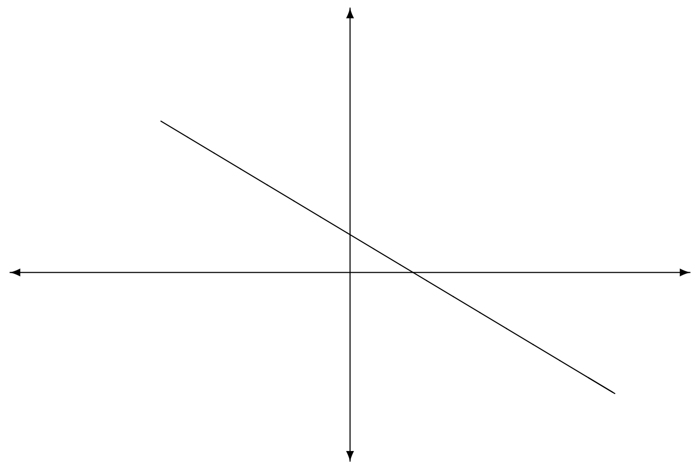
$$y = 3 \quad , \quad y = -1.$$

Los anteriores son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema. Utilizamos ahora la ecuación $x = 3 - 2y$ a fin de hallar los valores de x correspondientes:

$$\text{Si } y = 3 \text{ , entonces } x = 3 - 2 \cdot 3 = -3$$
$$\text{Si } y = -1 \text{ , entonces } x = 3 - 2 \cdot (-1) = 5.$$

Por lo tanto, las soluciones posibles son $(-3, 3)$ y $(5, -1)$.

Las gráficas de las ecuaciones (parábola y recta) son las siguientes, donde se muestran los puntos de intersección:



Ejemplo: Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19. \end{cases}$$

Despejamos x^2 de la segunda ecuación:

$$x^2 = 19 - y.$$

Sustituimos en la primera ecuación, obteniendo:

$$(19 - y) + y^2 = 25.$$

Simplificamos y factorizamos, obteniendo:

$$y^2 - y - 6 = 0$$

ó

$$(y - 3)(y + 2) = 0.$$

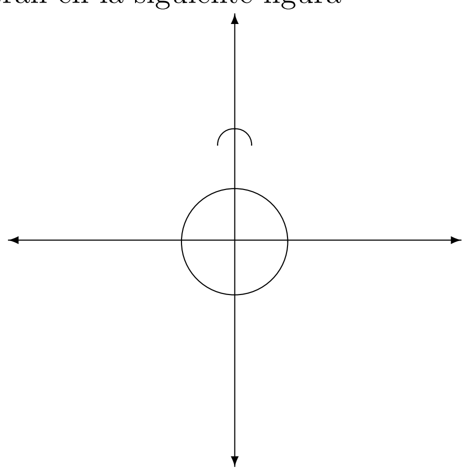
Así, los únicos valores posibles de y son: $y = 3$ y $y = -2$. Usamos $x^2 = 19 - y$ con objeto de hallar los correspondientes valores de x:

Si $y = 3$, entonces $x^2 = 19 - 3 = 16$. Luego, $x = \pm 4$
Si $y = -2$, entonces $x^2 = 19 - (-2) = 21$. Luego, $x = \pm\sqrt{21}$.

Así, las únicas soluciones posibles del sistema son:

$$(4, 3), \quad (-4, 3), \quad (\sqrt{21}, -2), \quad (-\sqrt{21}, -2).$$

Nótese que la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un círculo con radio 5 y centro en el origen. La gráfica de $y = 19 - x^2$ es una parábola con un eje vertical. Las gráficas se muestran en la siguiente figura



0.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones en *lineales* y *no lineales*. De un punto de vista algebraico, se estudian preferentemente los sistemas lineales. En esta sección estudiaremos aquellos lineales con sólo dos variables.

Una ecuación $ax + by = c$ (o bien $ax + by - c = 0$), con a y b diferentes de cero, es una ecuación lineal en dos variables x e y. Del mismo modo, $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal con tres variables x, y y z.

Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. Para hallar las soluciones de un sistema lineal podemos usar también el *método de eliminación* que consiste en manipular las ecuaciones hasta obtener un sistema equivalente de ecuaciones más sencillas, para las cuales podemos hallar sus soluciones con facilidad. Algunas manipulaciones (o *transformaciones*) que llevan a sistemas equivalentes son las siguientes:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar o dividir una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar un “múltiplo constante”de una ecuación a otra ecuación.

Se obtiene un “múltiplo constante”de una ecuación al multiplicar *cada* término de la ecuación por la misma constante k distinta de cero.

Ejemplo: Resolvamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & -1 \\ 2x - y & = & 5. \end{array}\right.$$

A menudo multiplicamos una de las ecuaciones por una constante que nos da el inverso aditivo del coeficiente de una de las variables en la otra expresión. Esto permite sumar ambas ecuaciones y obtener una tercera con una sola variable, como sigue:

Multiplicamos por 3 la segunda ecuación, obteniendo

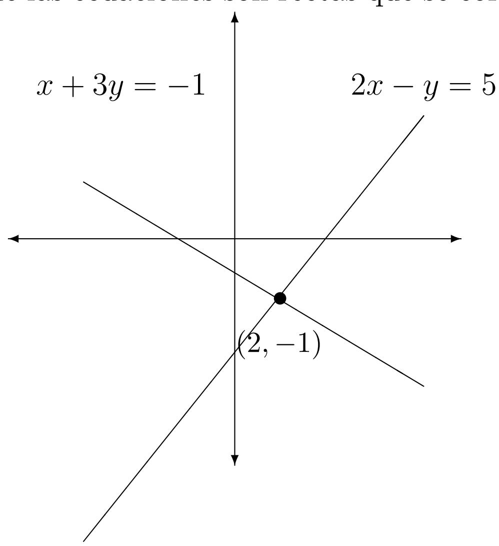
$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & -1 \\ 6x - 3y & = & 15. \end{array}\right.$$

Sumamos la primera ecuación a la segunda, y obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & -1 \\ 7x & = & 14. \end{array}\right.$$

Del último sistema vemos que $7x = 14$ ó $x = 2$. Para hallar el correspondiente valor de y, sustituimos x con 2 en $x + 3y = -1$, con lo cual $y = -1$. En consecuencia, $(2, -1)$ es la única solución del sistema.

Las gráficas de las ecuaciones son rectas que se cortan en el punto $(2, -1)$



Observamos que, en general, el método de eliminación suele conducir a soluciones con menos pasos que el método de sustitución analizado en la sección anterior.

Hay tres tipos de situaciones posibles al resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables: Hay exactamente una solución, un número infinito de soluciones o no existe solución.

Gráficamente, la primera situación, llamado también *sistema consistente*, corresponde a dos rectas que se intersectan.

La segunda situación, llamado sistema *dependiente* y *consistente*, corresponde a dos ecuaciones que representan la misma recta; por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + y &= 6 \\ 6x + 2y &= 12 \end{cases}$$

es dependiente y consistente (Ejercicio).

La tercera situación, llamado sistema *inconsistente*, corresponde a dos rectas paralelas. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + y &= 6 \\ 6x + 2y &= 20 \end{cases}$$

no tiene solución o es inconsistente.

Para sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables, podemos usar el método de sustitución o el método de eliminación. El método de eliminación es la técnica más breve y fácil para hallar soluciones. Además lleva a la técnica de matrices que se estudia en la siguiente sección.

0.3 Matrices

Consideremos el problema de resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y - 4z &= 3 \\ -3x + 4y - z &= -2, \end{cases}$$

usando el método de eliminación visto en la sección anterior.

Sumando -2 veces la primera ecuación a la segunda, se tiene el mismo sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 10z &= -5 \\ -3x + 4y - z &= -2. \end{cases}$$

Sumando 3 veces la primera ecuación a la tercera, se tiene

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 10z &= -5 \\ -2y + 8z &= 10. \end{cases}$$

Multiplicamos ahora por $\frac{1}{5}$ la segunda ecuación y por $-\frac{1}{2}$ la tercera

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= \quad 4 \\ \quad y - 2z &= -1 \\ \quad y - 4z &= -5. \end{cases}$$

Sumamos -1 vez la segunda ecuación a la tercera

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= \quad 4 \\ \quad y - 2z &= -1 \\ \quad -2z &= -4. \end{cases}$$

Las soluciones del último sistema equivalente son fáciles de hallar ahora por sustitución: De la tercera ecuación $z = 2$. Al sustituir z con 2 en la segunda ecuación obtenemos $y = 3$. Finalmente, se obtiene también $x = 4$.

Si analizamos el método de solución del problema anterior, vemos que los símbolos usados para las variables carecen de importancia; debemos tomar en cuenta los *coeficientes* de las variables. Así pues, si utilizamos símbolos distintos en las variables (por ejemplo r, s, t), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} r - 2s + 3t &= \quad 4 \\ 2r + s - 4t &= \quad 3 \\ -3r + 4s - t &= -2. \end{cases}$$

Entonces el método de eliminación puede continuar su curso igual que en el ejemplo. Es posible entonces simplificar el proceso, introduciendo un esquema a fin de seguir los coeficientes en forma tal que no haya necesidad de escribir las variables.

Con referencia al sistema anterior, primero comprobamos que las variables aparezcan en el mismo orden en cada ecuación y que los términos sin variables estén a la derecha de los signos de igualdad. En seguida anotamos los números que intervienen en las ecuaciones como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una ordenación de este tipo se llama *matriz*. Los *reglones* o *filas* de la matriz son los números que aparecen uno a continuación de otro en *sentido horizontal*. Las *columnas* de la matriz son los números que aparecen uno junto a otro en *sentido vertical*.

La matriz obtenida del sistema de ecuaciones lineales del modo anterior es la *matriz del sistema*. Si borramos la última columna, la restante ordenación es la *matriz de coeficientes*. En vista de lo anterior, llamamos también a la matriz del sistema, una *matriz coeficiente aumentada* o *matriz aumentada*.

Ejemplo: Sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y + 3z & = & 4 \\ 2x + y - 4z & = & 3 \\ -3x + 4y - z & = & -2 \end{array} \right.$$

Matriz coeficiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & -4 & \vdots & 3 \\ -3 & 4 & -1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

Nótese que en la matriz aumentada introducimos un segmento de línea vertical a fin de indicar donde aparecerían los signos de igualdad en el sistema de ecuaciones correspondiente.

A fin de dar una definición general de matriz, usaremos la siguiente notación para los coeficientes de la matriz:

$$a_{ij}$$

donde i denota el número de fila y j el número de columna.

Definición 1 *Sean m, n enteros positivos. Una matriz $m \times n$ es un arreglo de m filas y n columnas de la forma siguiente:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La expresión $m \times n$ la llamamos *tamaño de la matriz.* Es posible considerar matrices en que los símbolos a_{ij} representen números complejos, polinomios u otros objetos matemáticos. Cada a_{ij} se llama *elemento de la matriz.* Si $m = n$, hablamos de una *matriz cuadrada de orden* n y los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\ldots$ son los elementos de la *diagonal principal.*

Ejemplos:

a) Matriz 2×3: $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) Matriz 2×2: $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Matriz 1×3: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) Matriz 3×2: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

e) Matriz 3×1: $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

El método de eliminación para sistemas de ecuaciones nos da la siguiente definición.

Definición 2 *Diremos que dos matrices, del mismo tamaño, son equivalentes si se obtiene una de otra por una o más de las siguientes transformaciones elementales de fila:*

(1) Intercambiar dos filas.

(2) Multiplicar o dividir una fila por una constante diferente de cero.

(3) Sumar un múltiplo constante de una fila a otra fila.

Las transformaciones elementales de fila, nos permiten obtener una forma equivalente más sencilla que la original. Estas formas más sencillas son de 3 tipos: *triangular superior*, *triangular inferior* y *diagonal*, como ilustran, respectivamente, los siguientes ejemplos en el caso 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

0.4 Álgebra de matrices

En esta sección analizamos propiedades de las matrices que son importantes en cursos superiores de matemática. Denotaremos por el símbolo (a_{ij}) una matriz A de orden $m \times n$.

Definición 3 *Sean* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ *matrices de orden* $m \times n$. *Entonces*

(1) $A = B$ *si y sólo si* $a_{ij} = b_{ij}$ *para toda* i *y* j.

(2) $C = A + B$ *si y sólo si* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para toda* i *y* j.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt[3]{8} & 3^2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & \sqrt{25} \\ 2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Con la notación anterior para matrices, podemos escribir la definición de suma como:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Así, para sumar dos matrices, sumamos los elementos correspondientes de cada matriz. Dos matrices se pueden sumar sólo si tienen el mismo tamaño.

Ejemplos:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La *matriz nula* $m \times n$, denotada por 0, es la matriz con m filas y n columnas en que cada elemento es 0.

El *inverso aditivo* $-A$ de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz$(-a_{ij})$ obtenida al cambiar el signo da cada elemento de A diferente de cero.

El siguiente resultado se deduce de la definición de suma de matrices.

Teorema 4 *Sean A, B y C matrices $m \times n$ y sea 0 la matriz nula $m \times n$. Entonces:*

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A + 0 = A$

(4) $A + (-A) = 0.$

La *resta* de dos matrices $m \times n$ está definida por:

$$A - B := A + (-B).$$

Definición 5 *El producto de un número real c y una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ es*

$$cA = (ca_{ij}).$$

Ejemplo:

$$3 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Se puede probar lo siguiente:

Teorema 6 *Sean A y B dos matrices $m \times n$ y c, d números reales. Entonces*

(1) $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$

(2) $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$

(3) $(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A).$

La próxima definición del producto AB de dos matrices puede parecer poco común, pero tiene muchos usos en matemática y en aplicaciones prácticas. En la multiplicación A y B pueden ser de tamaños diferentes pero *el número* *de columnas de A ha de ser el mismo que el número de filas de B*; por lo tanto, si A es $m \times n$, entonces B debe ser $n \times p$ para algún p. Según veremos, el tamaño de AB es entonces $m \times p$.

Definición 7 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. El producto AB es la matriz $C = (c_{ij})$ de $m \times p$ tal que*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, p$.

Ejemplo: Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

La matriz A es 2×3 y la matriz B es 3×4; por lo tanto, el producto $C = AB$ está definido y es 2×4.

A fin de obtener el elemento c_{ij} multiplicamos, correspondientemente, los elementos de la i-ésima fila de la matriz A con los elementos de la j-ésima columna de la matriz B. Luego sumamos.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} c_{23} &= 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -2 \\ c_{12} &= 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 0 = 8 \end{aligned}$$

Así, obtenemos:

$$C = \begin{pmatrix} -18 & 8 & -7 & -22 \\ 6 & -16 & -2 & -16 \end{pmatrix}.$$

Otros ejemplos de productos de matrices son los siguientes. La comprobación queda como ejercicio para el lector.

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 19 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix}$$

La operación del producto de matrices *no es conmutativa*; por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $AB \neq BA$. Observemos también que la última igualdad muestra que *el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz nula*. Otras propiedades de matrices son las siguientes:

Teorema 8 *Si A es $m \times n$, B es $n \times p$ y C es $p \times q$ entonces*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Teorema 9 *Si A_1 y A_2 son $m \times n$ y B_1 y B_2 son $n \times p$ entonces*

$$\begin{aligned} A \cdot (B_1 + B_2) &= A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 \\ (A_1 + A_2) \cdot B_1 &= A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1. \end{aligned}$$

Como caso especial, si todas las matrices son cuadradas, de orden n, entonces siempre se cumplen las propiedades asociativa y distributiva.

0.5 Inversa de una matriz

En esta sección y en adelante, restringiremos nuestro estudio a matrices cuadradas. El símbolo I_n denotará la matriz cuadrada de orden n que tiene 1 en cada posición en la diagonal principal y 0 en todas las demás posiciones. La llamamos *matriz identidad de orden n.*

Ejemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que si A es cualquier matriz cuadrada de orden n, entonces

$$A \cdot I_n = A = I_n \cdot A.$$

Cuando trabajamos con un número real b diferente de cero, el número particular b^{-1} (el inverso multiplicativo de b) se puede multiplicar por b para obtener la identidad multiplicativa (el número 1); es decir

$$b \cdot b^{-1} = 1.$$

Tenemos una situación semejante con matrices.

Definición 10 *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si existe una matriz B tal que*

$$AB = I = BA$$

entonces B se llama inversa de A y se denota A^{-1}.

Si una matriz cuadrada A tiene una inversa, decimos que A es *invertible*.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Podemos calcular A^{-1} mediante operaciones elementales fila, como sigue: Comenzamos con la matriz

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A continuación efectuamos transformaciones elementales de reglón hasta que la matriz identidad I_2 aparezca en el lado izquierdo del segmento vertical.

Intercambiamos la primera fila con la segunda ($f_1 \longleftrightarrow f_2$)

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Multiplicamos por -3 la primera fila y la sumamos a la segunda fila ($-3f_1 + f_2 \longrightarrow f_2$)

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Multiplicamos por $-\frac{1}{7}$ la segunda fila ($-\frac{1}{7}f_2 \longrightarrow f_2$)

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$

Multiplicamos por -4 la segunda fila y la sumamos a la primera fila ($-4f_2 + f_1 \longrightarrow f_1$)

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$

La comprobación que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ queda como ejercicio.

0.6 Ejercicios

1. Use el método de sustitución para resolver el sistema.

a) $\begin{cases} y = x^2+1 \\ x+y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 = x \\ x+2y+3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y^3 = 1 \\ 2x = 9y^2+2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-4y+20 = 0 \\ 3x+2y+8 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+y^2 = 16 \\ y+2x = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y+2x = -3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = y^2-4y+5 \\ x-y = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 25y^2-16x^2 = 400 \\ 9y^2-4x^2 = 36 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x-3y-z^2 = 0 \\ x-y-z^2 = -1 \\ x^2-xy = 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x+2z = 1 \\ 2y-z = 4 \\ xyz = 0 \end{cases}$

2. Resuelva el sistema.

a) $\begin{cases} 4x+5y = 13 \\ 3x+y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x-8y = 9 \\ 4x+3y = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9u+2v = 0 \\ 3u-5v = 17 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+8y = 7 \\ 3x-5y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{2}t-\frac{1}{5}v = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t+\frac{1}{4}v = \frac{5}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3p-q = 7 \\ -12p+4q = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-5y = 2 \\ 3x-15y = 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x+7y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y} = -2 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y} = 1 \end{cases}$ j) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{y+2} = 2 \\ \dfrac{6}{x-1}-\dfrac{7}{y+2} = -3 \end{cases}$

3. Despeje a y b del sistema.

a) $\begin{cases} ae^{3x} + be^{-3x} & = & 0 \\ a(3e^{3x}) + b(-3e^{-3x}) & = & e^{3x} \end{cases}$

b) $\begin{cases} ae^{-x} + be^{4x} & = & 0 \\ -ae^{-x} + b(4e^{4x}) & = & 2 \end{cases}$

4. Utilice matrices en la solución del sistema.

a) $\begin{cases} x + 3y - z & = & -3 \\ 3x - y + 2z & = & 1 \\ 2x - y + z & = & -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + 3z & = & 6 \\ -8x + 3y - 5z & = & -6 \\ 5x - 4y & = & -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 3z & = & -5 \\ 2x - y + z & = & -3 \\ -6x + 3y - 3z & = & 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + z & = & 2 \\ 3x + 2y - z & = & -5 \\ 5x - 2y + z & = & 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y + z & = & 0 \\ x - y - 2z & = & 0 \\ 2x - 3y - z & = & 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y - 2z & = & 0 \\ x - y - 4z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y + 4z & = & 8 \\ -3x + y - 2z & = & 5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 5x + 2y - z & = & 10 \\ y + z & = & -3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - 3y & = & 12 \\ 3y + z & = & -2 \\ 5x - 3z & = & 3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x + 3y & = & 2 \\ x + y & = & 1 \\ x - 2y & = & 13 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x + 3y & = & 5 \\ x - 3y & = & 4 \\ x + y & = & -2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 4x - y & = & 2 \\ 2x + 2y & = & 1 \\ 4x - 5y & = & 3 \end{cases}$

5. Encuentre, si es posible, $A + B$, $A - B$, $2A$ y $-3B$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

6. Encuentre, si es posible, AB y BA.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

7. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compruebe el enunciado.

a) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$, donde $A^2 = AA$ y $B^2 = BB$.

b) $(A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$.

c) $A(B+C) = AB + AC$.

d) $A(BC) = (AB)C$.

8. Encuentre la inversa de la matriz, si existe.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Bibliografía

[1] E. W. Swokowski - J. A. Cole, Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, *International Thomson Editores, 1997.*