Funciones Exponenciales y Logarítmicas

0.1 Funciones exponenciales

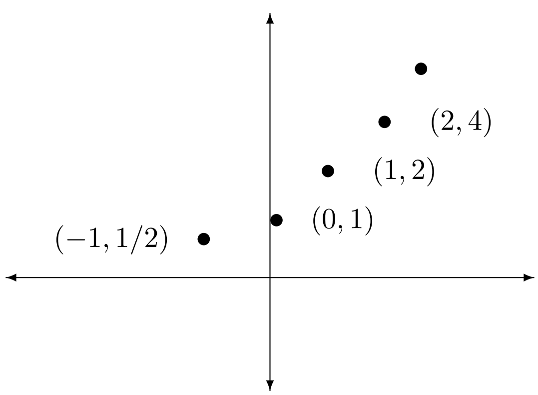
Comencemos por analizar la función f definida por

$$f(x) = 2^x.$$

Enumerando coordenadas de varios puntos racionales, esto es de la forma $\frac{m}{n}$, $n > 0$, con m y n enteros; y usando la propiedad algebraica:

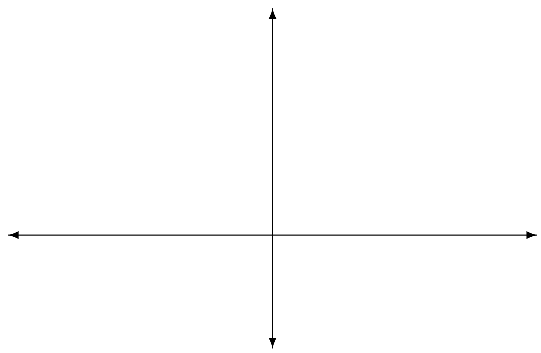
$$2^{m/n} = (\sqrt[n]{2})^m,$$

obtenemos un trazo discreto de puntos como muestra la figura a continuación

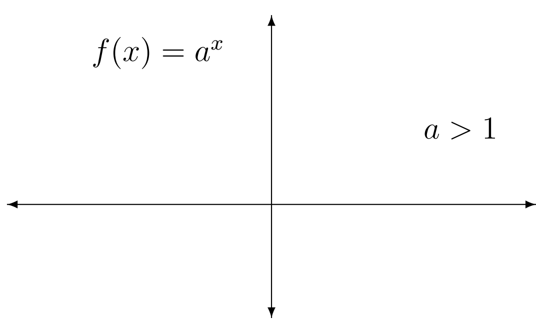


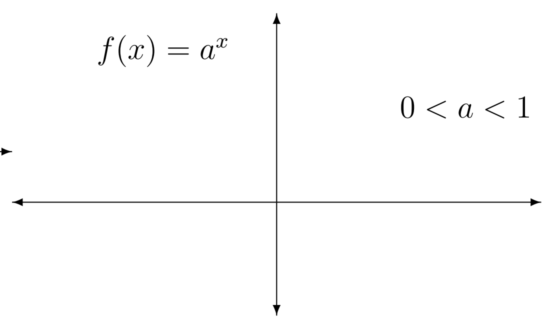
A fin de ampliar el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente x irracional.

Hacemos esto por *continuidad*, esto es, requiriendo que la gráfica represente una función continua. De esta forma obtenemos la gráfica siguiente:



Consideremos en seguida cualquier base a, donde a es un número real positivo deiferente de 1. Al igual que en el análisis previo, resulta viable definir una función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es el conjunto de los números reales positivos. Su gráfica se indica en las gráficas siguientes:





Las gráficas indican que si $a > 1$, entonces f es creciente en $\mathbb{R}$, y si $0 < a < 1$, f decrece en $\mathbb{R}$. Esto es comprobable mediante cálculo.

Las gráficas indican solamente la "apariencia general"; es decir, la forma "exacta"depende del valor de a. Observese que como $a^0 = 1$, la intersección con el eje y es 1 para toda a.

Si $a > 1$, conforme x *decrece* hasta valores negativos, la gráfica de f se aproxima al eje de las x; por lo tanto, decimos que el eje x es una *asíntota horizontal*. A medida que x aumenta hasta valores positivos, la gráfica sube con rapidez.

Cuando consideramos a^x excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Obsérvese que si $a < 0$ entonces a no es un número real para muchos valores de x como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{3}$. Si $a = 0$, entonces $a^0 = 0^0$ es indefinido. Por último, cuando $a = 1$, $a^x = 1$ para toda x y la gráfica de $f(x) = a^x$ es una línea horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente o decreciente en todo su dominio y, en consecuencia, f es biyectiva. En particular es inyectiva, esto significa que para números reales x_1 y x_2; si $a^{x_1} = a^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$. Esta propiedad es de mucha utilidad para resolver *ecuaciones exponenciales* en álgebra.

Ejemplo: Resolvamos la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$ para x.

Primero expresamos ambos lados con la misma base:

$$3^{5x-8} = (3^2)^{x+2}.$$

Aplicando la ley de los exponentes:

$$3^{5x-8} = 3^{2x+4}.$$

Usando que las funciones exponenciales son biyectivas:

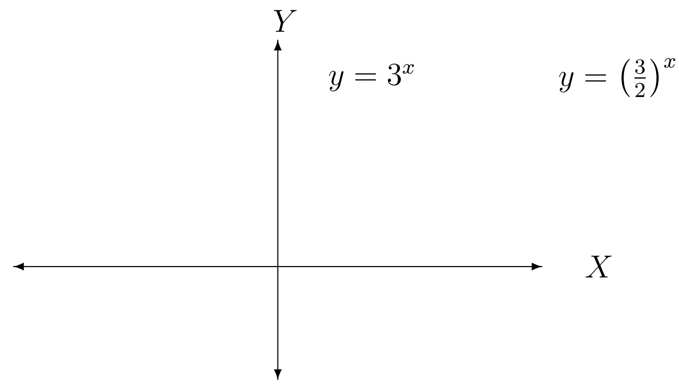
$$5x - 8 = 2x + 4.$$

Resolviendo para x:

$$x = 4.$$

Trazando gráficas de distintas funciones exponenciales en el mismo plano coordenado nos hace ver que:

Si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores *positivos* de x



La gráfica anterior muestra también que:

Si $1 < a < b$, entonces $b^x < a^x$ para valores *negativos* de x.

En particular, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ se encuentra *entre* las gráficas de la figura anterior.

La función exponencial más útil en la práctica es la *función exponencial natural*, definida por:

$$f(x) = e^x.$$

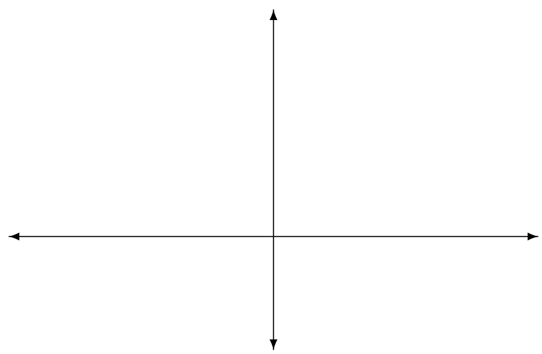
Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

El número e aparece como límite de la sucesión $(1 + \frac{1}{n})^n$. Una variante de la sucesión anterior produce la fórmula de interés compuesto continuo utilizada en economía.

La función exponencial natural permite, también, definir otras funciones importantes en la práctica. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

recibe el nombre de *función coseno hiperbólica* y sirve en ingeniería para describir la forma de una cadena o cable flexible uniforme cuyos extremos estén sostenidos a la misma altura. La gráfica es:



Nótese que "parece" una parábola, pero no es el caso.

Un tipo de problemas que involucra la función exponencial, y que se presenta en cálculo, es el siguiente:

Ejemplo: Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, hallar los ceros de f.

A fin de resolver este problema, factorizamos $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \\ &= 2xe^{-2x}(1-x). \end{aligned}$$

Para encontrar los ceros de f, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que $e^{-2x} > 0$ para toda x, vemos que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $1 - x = 0$; por lo tanto, los ceros de f son 0 y 1.

0.2 Funciones logarítmicas

En la sección anterior analizamos que la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ ó $a > 1$ es biyectiva; en consecuencia, f tiene una función inversa f^{-1}. Esta inversa de la función exponencial con base a se llama *función logarítmica con base* a y se denota $\log_a$. Sus valores se escriben $\log_a(x)$, que se lee "el logarítmo de x con base a". Una definición formal es la siguiente:

Definición 1 *Sea a un número real positivo diferente de 1. El logarítmo de x con base a se define como*

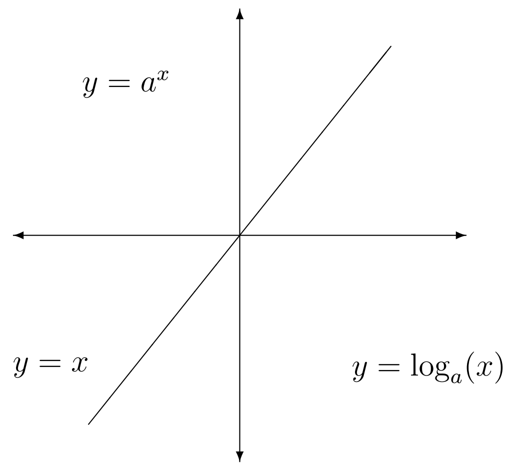
$$y = \log_a(x) \text{ si y sólo si } x = a^y$$

para cada $x > 0$ y todo número real y.

Ejemplos: Las siguientes formas son equivalentes:

$$\begin{aligned}
\log_5 u = 2 &\quad\longleftrightarrow\quad 5^2 = u \\
\log_b 8 = 3 &\quad\longleftrightarrow\quad b^3 = 8 \\
r = \log_p q &\quad\longleftrightarrow\quad p^r = q \\
w = \log_4(2t+3) &\quad\longleftrightarrow\quad 4^w = 2t+3 \\
\log_3 x = 5 + 2z &\quad\longleftrightarrow\quad 3^{5+2z} = x.
\end{aligned}$$

Ya que la función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a, la gráfica de $y = \log_a(x)$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ con la linea $y = x$. La figura siguiente muestra esta gráfica para $a > 1$:



Observemos que la intersección x con la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de los reales positivos, el rango es $\mathbb{R}$ y el eje y es una *asíntota vertical.*

Es claro que, si $a > 1$, $\log_a(x)$ es creciente en $(0, \infty)$ y, por lo tanto, biyectiva. En particular, esto muestra la siguiente propiedad algebraica para números reales x_1, x_2:

$$\text{Si } \log_a(x_1) = \log_a(x_2) \text{ , entonces } x_1 = x_2.$$

la propiedad anterior se utiliza para resolver *ecuaciones logarítmicas.*

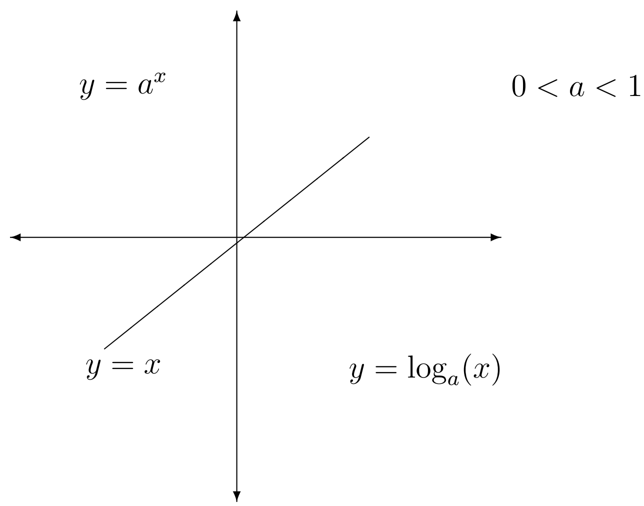
Ejemplo: Resolvamos la ecuación $\log_6(4x - 5) = \log_6(2x + 1)$.

Para esto, usamos directamente la propiedad anterior y se obtiene: $4x - 5 = 2x + 1$ ó $x = 3$.

El ejemplo anterior muestra una ecuación logarítmica *simple*; es decir, que contiene el logarítmo de una expresión que comprende una variable lineal.

Se pueden presentar soluciones "extrañas" cuando se resuelven ecuaciones logarítmicas con variables no lineales (por ejemplo, cuadráticas); por lo tanto, por regla general, debemos comprobar las respuestas para asegurarnos de que estamos tomando logarítmos *únicamente de números reales positivos*; de otra manera no podremos definir la función logarítmica.

No es frecuente utilizar logarítmos con base $a < 1$. Sin embargo, es útil tener en mente al menos su gráfica, como ilustra la figura a continuación:



Los logarítmos con base 10 se llaman *logarítmos comunes*. Denotamos:

$$\log(x) := \log_e(x) \text{ para } x > 0.$$

0.3 Propiedades de los logarítmos

En la sección anterior vimos que $\log_a(x)$ se puede interpretar como un exponente; en consecuencia, las leyes de los exponentes sirven para obtener las correspondientes de los logarítmos. Las propiedades fundamentales se resumen en el resultado siguiente:

Teorema 2 *Sean u y w números reales positivos, entonces*

(1) $\log_a(u \cdot w) = \log_a(u) + \log_a(w)$

(2) $\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = \log_a(u) - \log_a(w)$

(3) $\log_a(w^c) = c\log_a(w)$ *para todo número real c.*

Demostración. Hagamos: $r := \log_a(u)$ y $s := \log_a(w)$. Entonces $a^r = u$ y $a^s = w$.

(1) $u \cdot w = a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Luego,

$$\log_a(u \cdot w) = r + s = \log_a(u) + \log_a(w).$$

(2) $\frac{u}{w} = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, luego:

$$\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = r - s = \log_a(u) - \log_a(w).$$

(3) $u^c = a^{cr}$, luego:

$$\log_a(u^c) = c \cdot r = c \cdot \log_a(u).$$

∎

Observación: No hay leyes generales para expresar $\log_a(u+w)$ ó $\log_a(u-w)$ en términos de logarítmos más sencillos.

Algunos ejemplos que ilustran los usos de las leyes de los logarítmos son los siguientes.

Ejemplos:

a) Expresemos $\log_a\left(\frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}\right)$ en términos de logarítmos de x, y y z. Para ello, escribimos $\sqrt{y}$ como $y^{1/2}$ y usando las propiedades obtenemos:

$$\begin{aligned}
\log_a\left(\frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}\right) &= \log_a(x^3 \cdot y^{1/2}) - \log_a(z^2) \\
&= \log_a(x^3) + \log_a(y^{1/2}) - \log_a(z^2) \\
&= 3\log_a(x) + \frac{1}{2}\log_a(y) - 2\log_a(z).
\end{aligned}$$

b) Expresemos $\frac{1}{3}\log_a(x^2-1)-\log_a(y)-4\log_a(z)$ como un logarítmo. Para ello, usamos las propiedades, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\log_a(x^2-1)-\log_a(y)-4\log_a(z) &= \log_a(x^2-1)^{1/3}-\log_a(y)-\log_a(z^4)\\
&= \log_a(\sqrt[3]{x^2-1})-(\log_a(y)+\log_a(z^4))\\
&= \log_a(\sqrt[3]{x^2-1})-\log_a(y\cdot z^4)\\
&= \log_a\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{y\cdot z^4}\right).
\end{aligned}$$

c) Resolvamos la ecuación $\log_2(x)+\log_2(x+2)=3$. Para ello, usamos las propiedades y obtenemos:

$$\log_2(x\cdot(x+2))=3$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned}
x\cdot(x+2) &= 2^3\\
x^2+2x-8 &= 0\\
(x-2)(x+4) &= 0
\end{aligned}$$

de donde $x=2$ ó $x=-4$.

Observemos ahora que $x=2$ es solución pues pertenece a los dominios de las funciones $\log_2(x)$ y $\log_2(x+2)$. Sin embargo, $x=-4$ *no* es solución pues $\log_2(-4)$ no existe.

Supongamos ahora que deseamos resolver la ecuación:

$$3^x=21.$$

Claramente, la solución es:

$$x=\log_3(21).$$

Sin embargo, en general, no estamos en condiciones de obtener el valor de $\log_3(21)$, por ejemplo, mediante el uso de una calculadora. Este problema lo resuelve el siguiente resultado que nos permite hallar $\log_b(u)$ si $u > 0$ y b es *cualquier* base logarítmica. Este resultado se conoce también como *fórmula de cambio de base.*

Teorema 3 *Si $x > 0$ y a, b son números reales positivos diferentes de 1, entonces*

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Demostración. Escribamos $y := \log_b(x)$, ó, equivalentemente: $b^y = x$. Entonces; ya que $\log_a$ es una función:

$$\log_a(b^y) = \log_a(x),$$

aplicando propiedades de los logarítmos tenemos:

$$y \log_a(b) = \log_a(x)$$

ó

$$y = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

lo que prueba el teorema. ■

Corolario 4 $\log_b(a) = \dfrac{1}{\log_a(b)}$.

Demostración. Tomar $x = a$ en el teorema anterior y usar el hecho que $\log_a(a) = 1$.

Observación: El teorema anterior no debe confundirse con las siguientes identidades que en general son *falsas*:

$$\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \neq \log_a\left(\frac{x}{b}\right) \quad ; \quad \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \neq \log_a(x - b).$$

Los casos especiales más usados de la fórmula de cambio de base son $a = 10$ (logarítmos comunes) y $a = e$ (logarítmos naturales).

Corolario 5 $\log_b(x) = \dfrac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(b)} = \dfrac{\log(x)}{\log(b)}$.

Corolario 6 $\log_b(x) = \dfrac{\log_e(x)}{\log_e(b)} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

Ejemplos:

a) Resolvamos la ecuación $3^x = 21$. Para ello, reescribimos como:

$$x = \log_3(21) = \frac{\ln(21)}{\ln(3)}.$$

b) Resolvamos la ecuación $\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$. Para ello, reescribimos:

$$5^x - 5^{-x} = 6$$

ó

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6$$

ó

$$5^x \cdot 5^x - 1 = 6 \cdot 5^x$$

ó

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x - 1 = 0$$

ó

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x - 1 = 0.$$

Reconocemos que esta forma de la ecuación es cuadrática en 5^x. Luego,

$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

ó

$$5^x = 3 \pm \sqrt{10}.$$

Observe ahora que $5^x > 0$ pero $3 - \sqrt{10} < 0$, luego:

$$5^x = 3 + \sqrt{10}.$$

“Tomando log ”en ambos lados:

$$x \log(5) = \log(3 + \sqrt{10}),$$

luego:

$$x = \frac{\log(3 + \sqrt{10})}{\log(5)}.$$

0.4 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $7^{x+6} = 7^{3x-4}$.

   b) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$.

   c) $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$.

   d) $4^{x-3} = 8^{4-x}$.

   e) $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$.

   f) $e^{3x} = e^{2x-1}$.

   g) $\log_4(x) = \sqrt[3]{\log_4(x)}$.

   h) $e^{x+\ln(4)} = 3e^{-x}$.

   i) $\log_2(x) + \log_2(x+2) = 3$.

   j) $2^x + 3(2^{x+1} - 5) = 10$.

   k) $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.

   l) $\log_9 x = \frac{3}{2}$.

   m) $\ln x^2 = -2$.

   n) $e^{2\ln x} = 9$.

o) $2^{5-x} = 6$.

p) $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$.

q) $e^{\ln(x+1)} = 3$.

r) $10^{2\log x} = 5$.

s) $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$.

t) i) $\log x^2 = \log(6-x)$ ii) $2\log x = \log(6-x)$.

v) i) $\ln(e^x)^2 = 16$ ii) $\ln e^{(x^e)} = 16$.

2. Convierta a la forma logarítmica.

a) $10^5 = 100000$.

b) $10^x = y + 1$.

c) $e^{et} = 3 - x$.

d) $10^{-2} = 0.01$.

e) $10^x = 38z$.

f) $e^{0.1t} = x + 2$.

3. Pase a la forma exponencial.

a) $\log x = 50$.

b) $\ln x = 0.1$.

c) $\ln(z-2) = \frac{1}{6}$.

d) $\log x = -8$.

e) $\ln x = \frac{1}{2}$.

f) $\ln(t-5) = 1.2$.

4. Exprese en términos de logarítmos de x, y, z o w.

a) i) $\log_4(xz)$ ii) $\log_4(y/z)$ iii) $\log_4 \sqrt[3]{z}$

b) $\log_a \dfrac{x^3 w}{y^2 z^4}$

c) $\log \dfrac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$

d) $\ln \sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5 z}}$

e) $\ln x \sqrt[3]{\dfrac{y^4}{z^5}}$

f) $x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$

5. Escriba la expresión como un logarítmo.

a) i) $\log_3 x + \log_3(5y)$ ii) $\log_3(2z) - \log_3 x$ iii) $5\log_3 y$.

b) $\log_a x + \frac{1}{3}\log_a(x-2) - 5\log_a(2x+3)$.

c) $\log(x^3y^2) - 2\log x\sqrt[3]{y} - 3\log\left(\frac{x}{y}\right)$.

d) $\ln y^3 + \frac{1}{3}\ln(x^3y^6) - 5\ln y$.

e) $\ln y - 4\ln(1/y) - 3\ln(xy)$.

f) $\log(x^2/y^3) + 4\log y - 6\log\sqrt{xy}$.

6. Usar logaritmos naturales para resolver x en términos de y en las siguientes ecuaciones:

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

b) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

c) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

7. Usar logaritmos comunes para resolver x en términos de y en las siguientes ecuaciones:

a) $y = \dfrac{1}{10^x - 10^{-x}}$.

b) $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$.

c) $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$.