Secciones Cónicas

0.1 Parábolas

Las *secciones cónicas*, también llamadas *cónicas*, se obtienen cortando un cono circular recto doble con un plano. Al cambiar la posición del plano se tiene un *círculo*, una *elipse*, una *parábola* o una *hipérbola*.

Las *cónicas degeneradas* (o degradadas) se obtienen si el plano corta al cono en un sólo punto o a lo largo de una o dos rectas situadas en el cono.

Con base al trabajo del capitulo anterior, si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una *parábola* con eje vertical. A continuación daremos una definición general de una parábola y llegaremos a ecuaciones de parábolas que tienen eje vertical u horizontal.

Definición 1 *Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo F (foco) y de una recta fija l (directriz) situada en el plano.*

Supondremos que f no está en l, si estuviera, tendríamos una recta en lugar de una parábola.

Si P es un punto del plano y P' es el punto en l determinado por una recta que pasa por P y es perpendicular a l (ver figura), por la definición anterior, P está sobre la parábola si y sólo si

$$d(P, F) = d(P, P').$$

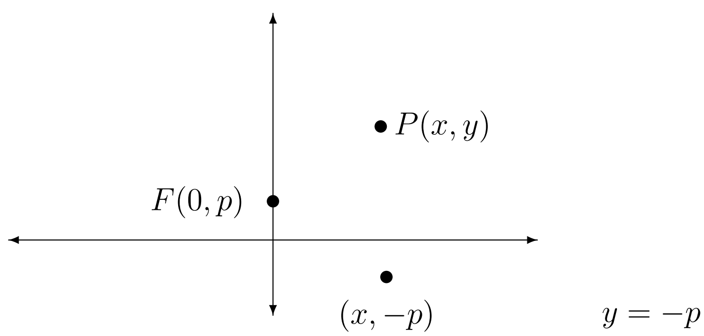
El *eje* de la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz.

El *vértice* de la parábola es el punto V sobre el eje que se encuentra a la mitad de F a l.

Ejemplo: A fin de obtener una ecuación sencilla para una parábola, consideremos $F(0,p)$ como foco $(p \neq 0)$ y $y=-p$ como directriz.

Por la fórmula de la distancia, un punto $P(x,y)$ está sobre la parábola si y sólo si $d(P,F)=d(P,P')$, esto es, si

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$



Elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos:

$$\begin{aligned} x^2+(y-p)^2 &= (y+p)^2 \\ x^2+y^2-2py+p^2 &= y^2+2py+p^2 \\ x^2 &= 4py. \end{aligned}$$

Una ecuación equivalente es: $y=\frac{1}{4p}x^2$. Si $p>0$, la parábola abre hacia arriba; si $p<0$, la parábola abre hacia abajo.

Si intercambiamos los papeles de x e y, resulta $y^2=4px$ o bien, lo que es equivalente $x=\frac{1}{4p}y^2$. Esta es una ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco $F(p,0)$ y abre a la derecha si $p>0$, o la izquierda si $p<0$. La ecuación de la directriz es $x=-p$.

Ejemplo: Encontremos el foco de la parábola $y=-\frac{1}{6}x^2$. Para ello observemos que tiene la forma $y = ax^2$ con $a = -\frac{1}{6}$. Dado, por el ejemplo anterior, que $a = \frac{1}{4p}$, entonces $p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(-\frac{1}{6})} = \frac{1}{-\frac{4}{6}} = -\frac{3}{2}$.

Así, la parábola abre hacia abajo y tiene foco $F(0, -\frac{3}{2})$. La directriz es la recta horizontal $y = \frac{3}{2}$.

Si tomamos una ecuación estándar de una parábola, esto es de la forma $x^2 = 4py$, y cambiamos x por $x - h$ y y por $y - k$, entonces $x^2 = 4py$ se convierte en

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Por nuestro análisis sobre traslaciones del capítulo anterior, reconocemos que la gráfica de la segunda ecuación se puede obtener a partir de la gráfica de la primera. De esta manera, el vértice pasa de $(0,0)$ a (h,k).

Elevando al cuadrado el lado izquierdo de la ecuación anterior y simplificando, nos lleva a una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Análogamente, si comenzamos con $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, podemos escribir en la forma $x = ay^2 + by + c$.

Ejemplo: Analicemos la gráfica de $2x = y^2 + 8y + 22$. Ya que el término al cuadrado es en y, la gráfica es una parábola con un eje horizontal. Escribimos la ecuación dada como

$$y^2 + 8y + \_\_ = 2x - 22 + \_\_$$

y luego completamos el cuadrado al sumar $[\frac{1}{2}8]^2$ a ambos lados:

$$\begin{aligned} y^2 + 8y + 16 &= 2x - 6 \\ (y+4)^2 &= 2(x-3). \end{aligned}$$

De esta manera, el vértice $V(h,k)$ es $V(3,-4)$.

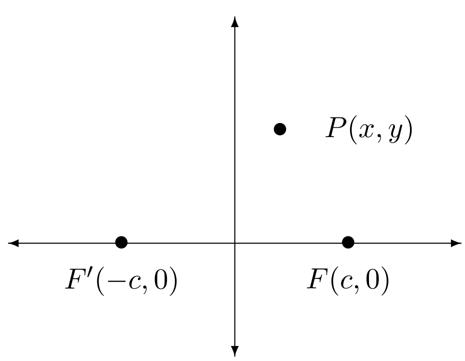
Obsservemos también que $4p = 2$ ó $p = \frac{1}{2}$. Esto da que el foco es $F(h+p,k) = F(3+\frac{1}{2},-4) = F(\frac{7}{2},-4)$. Finalmente, la directriz es $x = h - p = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

0.2 Elipses

Definición 2 *Una elipse es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano (los focos) sea una constante positiva.*

Ejemplo: A fin de obtener una ecuación sencilla para una elipse, escojemos el eje x como la recta que pasa por los dos focos F y F', con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene coordenadas $(c, 0)$ con $c > 0$, entonces, como en la figura siguiente, F' tiene coordenadas $(-c, 0)$. La suma de las distancias de un punto $P(x, y)$ desde F y F' se denotará con $2a$. Así, por definición, $P(x, y)$ está en la elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$



Por la fórmula de la distancia, lo anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2+y^2} \ + \ \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la expresión anterior obtenemos

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Desarrollando los términos al cuadrado y simplificando queda

$$-2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc$$

ó

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$$

Volviendo a elevar al cuadrado se obtiene

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2.$$

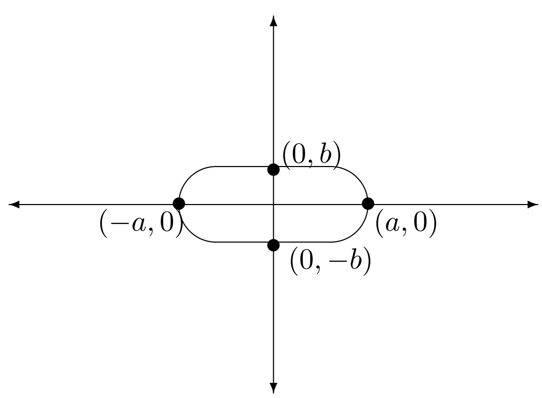
Desarrollando el término al cuadrado y simplificando se tiene

$$\begin{aligned} ax^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + x^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Dividiendo por a^2b^2 donde $b := a^2 - c^2$, se obtiene la *forma estándar* de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gráficamente



Observe que si $x = 0$, entonces $y = \pm b$. El segmento que une los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ de la elipse se llama *eje menor*.

Análogamente si $y = 0$, entonces $x = \pm a$. El segmento que une los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llama *eje mayor* de la elipse.

En particular, los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se denominan *vértices* de la elipse.

Nótese que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = c^2 > 0$ implica $a > b$. Esto justifica los nombres ejes menor y mayor utilizados anteriormente.

Una situación diferente plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplos:

a) Consideremos la elipse con ecuación $2x^2 + 9y^2 = 18$ y obtengamos las coordenadas de los focos. Para ello, escribimos la ecuación en la forma estándar

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Se deduce que $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$. Luego calculamos c de la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ obteniendo

$$c^2 = 9 - 2 = 7$$

ó $c = \pm\sqrt{7}$. Por lo tanto, los focos son $(\sqrt{7}, 0)$ y $(-\sqrt{7}, 0)$.

b) Encontremos la ecuación de la elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$. Para ello usamos nuevamente la forma estándar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a > b$.

Como los vértices son $(\pm 4, 0)$, concluimos que $a = 4$. Análogamente, como los focos son $(\pm 2, 0)$, conluimos que $c = 2$. Luego, la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ nos da

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12,$$

de donde $b = \pm\sqrt{12}$. Obtenemos así que la ecuación tiene la forma explícita

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Finalmente, observemos que un círculo es un caso particular de una elipse ($a = b$).

0.3 Hipérbolas

La definición de una hipérbola es semejante a la de una elipse. El único cambio es que en lugar de usar la *suma* de distancias desde dos puntos fijos, usamos la *diferencia*.

Definición 3 *Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la diferencia de las distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos del plano (los focos) sea una constante (positiva).*

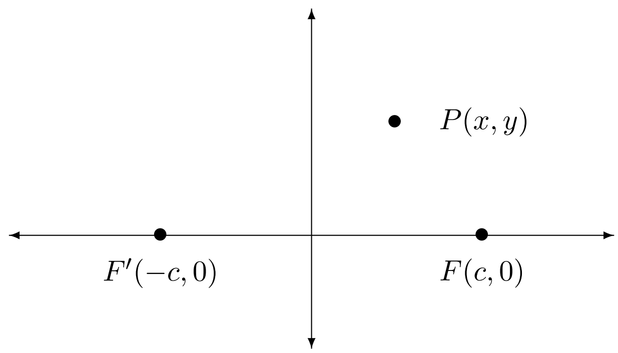
Ejemplo: Escojamos un sistema de coordenadas con focos $F(c, 0)$ y $F(-c, 0)$ y denotamos la distancia (constante) con $2a$. Así, un punto $P(x, y)$ pertenece a la hipérbola si y sólo si

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Utilizando la fórmula de la distancia y procediendo como en el caso de la elipse, obtenemos la *ecuación estándar*

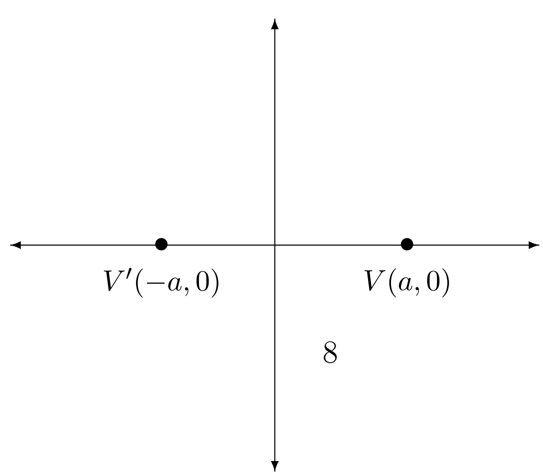
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$. La situación geométrica aparece en la figura siguiente:



Aplicando pruebas de simetría, observamos que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes (x e y) y al origen.

Podemos encontrar las intersecciones en x de la hipérbola con $y = 0$ en la ecuación; de esta manera llegamos a $\frac{x^2}{a^2} = 1$, o sea $x^2 = a^2$ y, en consecuencia, las intersecciones x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ de la gráfica se llaman *vértices* de la hipérbola. El segmento de recta que une V y V' se llama *eje transverso*.



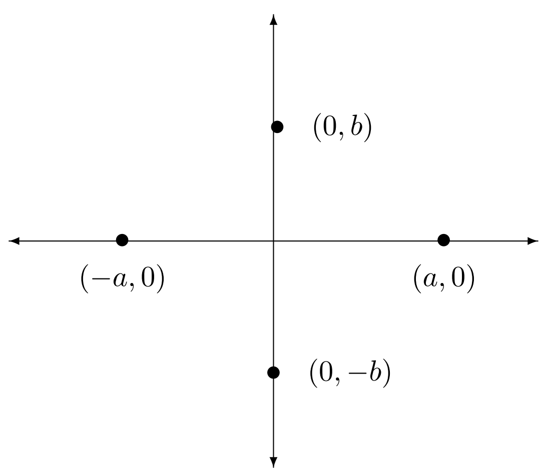
La gráfica carece de intersección con eje y porque la ecuación $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ no tiene soluciones en $\mathbb{R}$. Los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ son puntos extremos del *eje conjugado* WW'. Los puntos W y W' no pertenecen a la gráfica pero son útiles para describir la gráfica. En efecto, es posible probar (Ejercicio) que las rectas

$$y = \pm \left(\frac{b}{a}\right) x$$

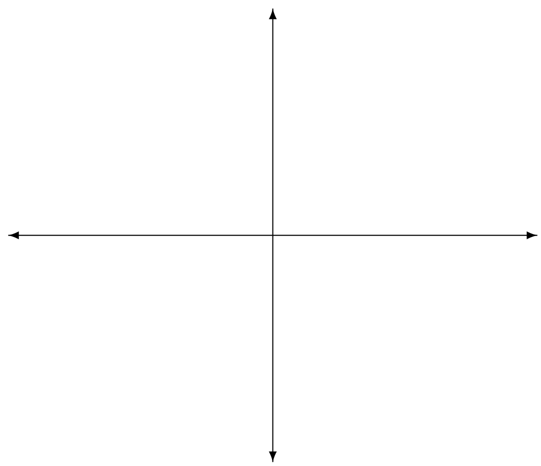
son *asíntotas para la hipérbola*. Estas asíntotas sirven como guías para dibujar la gráfica.

Una forma sencilla de trazar las asíntotas consiste en encontrar primero los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$.

Si se dibujan las líneas verticales y horizontales que pasen por estos puntos extremos de los ejes transverso y conjugado, respectivamente, entonces las diagonales del *rectángulo auxiliar* resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$; por lo tanto, al prolongar estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = (\pm b/a)x$.



La hipérbola se traza entonces usando las asíntotas como guías. Las dos partes que conforman la hipérbola se llaman *rama derecha* y *rama izquierda* de la hipérbola.



0.4 Ejercicios

1. Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola. Trace su gráfica, mostrando el foco y la directriz.

   a) $8y = x^2$.

   b) $2y^2 = -3x$.

   c) $(x+2)^2 = -8(y-1)$.

   d) $(y-2)^2 = \frac{1}{4}(x-3)$.

   e) $y = x^2 - 4x + 2$.

   f) $x^2 + 20y = 10$.

2. Encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

   a) Foco $F(2,0)$, directriz $x = -2$.

b) Foco $F(6,4)$, directriz $y=-2$.

c) Vértice $V(3,-5)$, directriz $x=2$.

d) Vértice $V(-1,0)$, foco $F(-4,0)$.

e) Vértice en el origen, simétrico al eje y y que pasa por el punto $(2,-3)$.

f) Vértice $V(-3,5)$, eje paralelo al eje x y que pasa por el punto $(5,9)$.

g) Vértice $V(3,-2)$, eje paralelo al eje x e intersección y de 1.

3. Encuentre los vértices y focos de la elipse. Trace su gráfica y muestre los focos.

a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

b) $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{416}=1$.

c) $4x^2+y^2=16$.

d) $4x^2+25y^2=1$.

e) $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y+4)^2}{9}=1$.

f) $4x^2+9y^2-32x-36y+64=0$.

g) $25x^2+4y^2-250x-16y+541=0$.

4. Encuentre una ecuación para la elipse con centro en el origen y que satisfaga las condiciones dadas.

a) Vértices $V(\pm 8,0)$, focos $F(\pm 5,0)$.

b) Vértices $V(0,\pm 5)$, eje menor de longitud 3.

c) Focos $F(\pm 3,0)$, eje menor de longitud 2.

d) Vértices $V(0,\pm 6)$, que pasa por $(3,2)$.

e) Intersecciones en $x = \pm 2$, intersecciones en $y = \pm\frac{1}{3}$.

f) Intersecciones en $x = \pm 1/2$, intersecciones en $y = \pm 4$.

g) Eje mayor horizontal de longitud 8, eje menor de longitud 5.

h) Eje mayor vertical de longitud 8, eje menor de longitud 6.

5. Encuentre los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Trace su gráfica y muestre las asíntotas y focos.

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

b) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$.

c) $x^2 - \dfrac{y^2}{24} = 1$.

d) $y^2 - 4x^2 = 16$.

e) $16x^2 - 36y^2 = 1$.

f) $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$.

g) $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$.

h) $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$.

6. Encuentre una ecuación para la hipérbola que tenga su centro en el origen y satisfaga las condiciones dadas.

a) Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$.

b) Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$.

c) Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4.

d) Vértices $V(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$.

e) Intersecciones $x = \pm 5$, asíntotas $y = \pm 2x$.

f) Eje transverso vertical de longitud 10, eje conjugado de longitud 14.

g) Eje transverso horizontal de longitud 6, eje conjugado de longitud 2.

7. Encuentre los vértices y focos de la cónica y trace su gráfica.

a) $y^2 = 64x$.

b) $9y^2 = 144 - 16x^2$.

c) $x^2 - y^2 - 4 = 0$.

d) $25y = 100 - x^2$.

e) $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$.

f) $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$.

g) $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$.

h) $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$.

8. a) Determine A de modo que el punto $(2, -3)$ pertenezca a la cónica $Ax^2 + 2y^2 = 4$.

b) ¿La cónica es una elipse o una hipérbola?

9. Si un cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados está inscrito en la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, exprese el área A del cuadrado en términos de a y b

10. Encuentre la ecuación estándar del círculo con centro en el foco de la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ y que pasa por el origen.