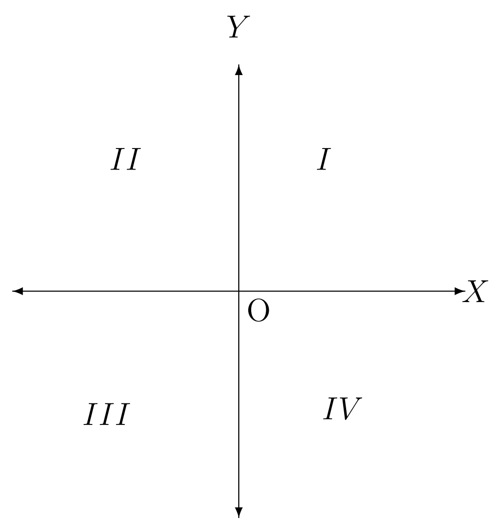
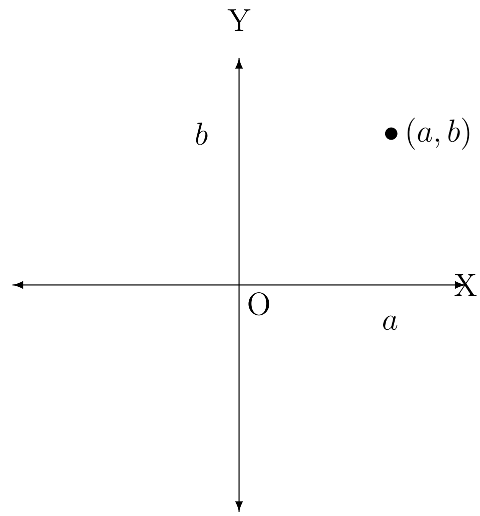
Funciones y gráficas

En este capítulo estudiamos las propiedades de funciones, para lo cual usamos métodos algebraicos y gráficos que incluyen la localización de puntos, determinación de simetrías y desplazamientos horizontales y verticales.

Introducimos un *sistema de coordenadas rectangulares* o *cartesianas* en un plano por medio dos rectas coordenadas perpendiculares llamadas *ejes coordenados*, que se cortan en el *origen* O (ver figura). La recta horizontal recibe el nombre de "eje x"y la vertical el de "eje y"; se indican con X e Y respectivamente. Con lo anterior, se trata de un *plano coordenado* o *plano xy*. Los ejes coordenados lo dividen en cuatro partes llamadas *primero*, *segundo*, *tercero* y *cuarto cuadrantes* (ver figura; I, II, III, IV). Los puntos de los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.



A cada punto P de un plano xy se le puede asignar un par ordenado (a, b), según se aprecia en la figura siguiente. El primer elemento del par ordenado es llamado la *coordenada x* (o *absisa*) de P y el segundo elemento del par ordenado es llamado la *coordenada y* (u *ordenada*) de P. Decimos que P *tiene coordenadas* (a, b) y nos referimos al *punto* (a, b) o al punto $P(a, b)$. A la inversa, todo par ordenado (a, b) determina al punto P con coordenadas a y b.



Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para definir la distancia entre dos puntos de un plano coordenado.

Definición 1 *La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de un plano coordenado es*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

La fórmula anterior para defininir la distancia entre dos puntos del plano no es la única. Otra definición es:

$$d(P_1, P_2) = \max\{|x_2 - x_1|\,, \,|y_2 - y_1|\}.$$

Podemos hallar el *punto medio* de un segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ como:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Nótese que la coordenada x del punto medio corresponde al *promedio* de las coordenadas x. Análogamente para la coordenada y.

Ejemplo: El punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2,3)$ a $P_2(4,-2)$ es

$$M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

observemos, adicionalmente, que la distancia de P_1 a M es igual a la distancia de P_2 a M ya que:

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1+2)^2 + (\frac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}$$

y

$$d(P_2, M) = \sqrt{(1-4)^2 + (\frac{1}{2} + 2)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}.$$

Así, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

0.1 Gráficas de ecuaciones

En ocasiones, dos cantidades se relacionan por medio de una ecuación o fórmula con dos variables. Por ejemplo $y = x^2$ ó $y^2 = 5x - 1$. En esta sección, analizaremos cómo representar geométricamente tal ecuación con una gráfica en un plano coordenado. La gráfica puede servir para descubrir propiedades de las cantidades que no eran evidentes en la simple ecuación.

Cada solución (a, b) de una ecuación en x y y tiene un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos estos números es la gráfica de la ecuación.

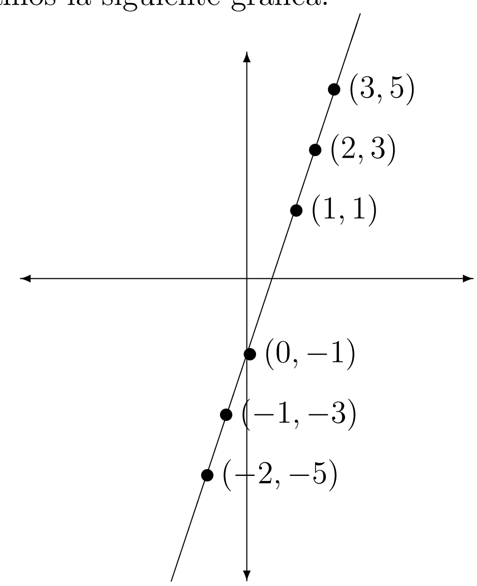
Para *trazar la gráfica de la ecuación*, ilustramos las características relevantes de la gráfica de un plano coordenado. En casos sencillos se traza localizando unos cuantos puntos, si los hay. Con una ecuación complicada, la ubicación de puntos puede dar muy poca información sobre la gráfica. En tales casos, conviene utilizar métodos de cálculo.

Ejemplo: Trazar la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

Deseamos encontrar los puntos (x, y) de un plano coordenado que correspondan a las soluciones de la ecuación. Es útil anotar las coordenadas de varios de tales puntos en una tabla, donde para cada x obtenemos el valor de y para $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Es evidente que los puntos con estas coordenadas se encuentran en una recta por lo que trazamos la siguiente gráfica:



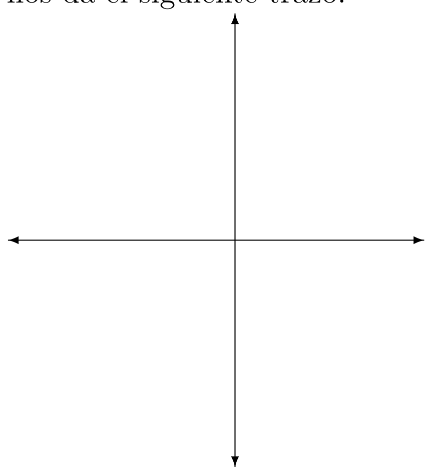
Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo, pues se pueden asignar valores a x tan grandes como se desee. En general, el trazo de una gráfica ha de ilustrar sus características esenciales, de manera que las partes restantes (no dibujadas) sean evidentes.

Ejemplo: Dibujar la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

Al sustituir los valores de x y hallar los valores correspondientes de y con $y = x^2 - 3$, llegamos a una tabla de coordenadas con varios puntos de la gráfica

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Localizar los puntos dados por la tabla y dibujar una curva suave que pase por estos puntos nos da el siguiente trazo:



La gráfica anterior es una *parábola*, y el eje y es el *eje de la parábola*. El punto más bajo $(0, -3)$ es el *vértice* de la parábola y decimos que la parábola *abre hacia arriba*. Si invertimos la gráfica, la parábola *abre hacia abajo* y el vértice es el punto más alto de la gráfica.

En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma

$$y = ax^2 + c \ , \ a \neq 0$$

es una parábola con vértice $(0, c)$ que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$. Cuando $c = 0$, la ecuación se reduce a $y = ax^2$ y el vértice está en el origen $(0, 0)$. Las parábolas también pueden abrir a la derecha o a la izquierda o en otras direcciones.

La gráfica de una ecuación puede cortar (o no) el eje de las x o al eje de las y.

Una intersección con el eje de las x se conoce también como *cero* de la gráfica de una ecuación o como *raíz* de una ecuación.

Ejemplo: Encontremos las intersecciones en x y en y de la gráfica de $y = x^2 - 3$.

a) Intersecciones en x: Hacemos $y = 0$ en la ecuación y despejamos x.

$$0 = x^2 - 3$$

obtenemos $x^2 = 3$ ó $x = \pm\sqrt{3}$. Por lo tanto, los puntos en que la gráfica cruza el eje x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

b) Intersecciones en y: Hacemos $x = 0$ en la ecuación y despejamos y.

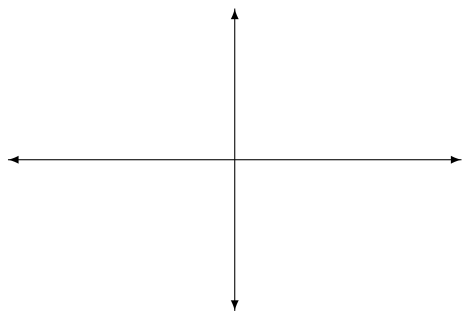
$$y = 0 - 3$$

obtenemos $y = -3$. Así, el punto en que la gráfica cruza el eje y es $(0, -3)$.

Diremos que una gráfica es *simétrica con respecto al eje* y siempre que el punto $(-x, y)$ se encuentre en la gráfica cuando (x, y) también lo esté. La gráfica de $y = x^2 - 3$ del ejemplo anterior tiene esta propiedad, ya que la sustitución de $-x$ por x da la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3.$$

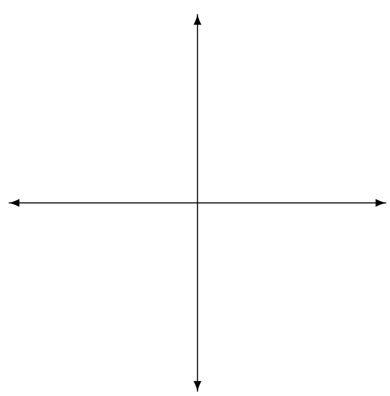
Diremos que una gráfica es *simétrica con respecto al eje* x siempre que la sustitución de y con $-y$ lleve a la misma ecuación. Por ejemplo $x = y^2$ es simétrica con respecto al eje x y su gráfica es como sigue



Análogamente, diremos que una gráfica es *simétrica con respecto al origen* si la sustitución simultánea de x con $-x$ y y con $-y$ lleva a la misma ecuación. Por ejemplo $4y = x^3$, ya que

$$4(-y) = (-x)^3$$

es equivalente a $4y = x^3$. La gráfica de esta ecuación es como sigue



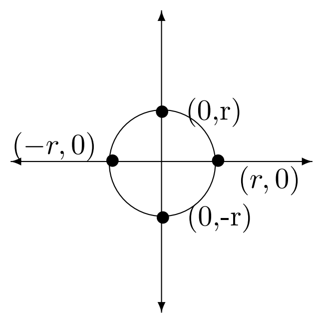
Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, basta determinar la gráfica en la mitad del plano coordenado, ya que el resto se puede trazar tomando una *imagen espejo*, o *reflexión*, en el eje apropiado.

Recordemos que si $C(h, k)$ es un punto en un plano coordenado, entonces un *círculo con centro* C *y radio* $r > 0$ está formado por todos los puntos del plano que están a una distancia r de C. Así, la ecuación estándar de un círculo con centro (h, k) y radio r está dada por la fórmula

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Si $h = 0$ y $k = 0$, esta ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de un círculo de radio r con centro en el origen. Si $r = 1$, la gráfica es un *círculo unitario*

$[x^2 + y^2 = r^2]$



Ejemplo: Encontremos la ecuación de un círculo que tiene centro $C(-2, 3)$ y contiene el punto $D(4, 5)$.

Puesto que D está en el círculo, el radio r es $d(C, D)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Escribiendo la ecuación estándar de un círculo con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40,$$

equivalentemente,

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$

Obsérvese del ejemplo anterior que al elevar al cuadrado los términos de una ecuación de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y simplificar lleva a una ecuación del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

donde a, b, c son números reales.

A la inversa, si comenzamos con esta ecuación es posible, al *completar los cuadrados*, obtener una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = d.$$

Ejemplo: Encontremos el centro y radio del círculo cuya ecuación es

$$3x^2 + 3y^3 - 12x + 18y = 9.$$

En vista de que es más fácil completar el cuadrado si los coeficientes de x^2 y y^2 son 1, comencemos dividiendo la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^3 - 4x + 6y = 3.$$

En seguida reescribimos la ecuación como sigue (los espacios subrayados representan números por determinar):

$$(x^2 - 4x + \_\_) + (y^2 + 6y + \_\_) = 3 + \_\_ + \_\_.$$

Luego, completamos los cuadrados para las expresiones dentro de paréntesis, cuidando de sumar los números adecuados a *ambos* lados de la ecuación. A fin de completar el cuadrado para una expresión de la forma $x^2 + ax$, añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (esto es $\left(\frac{a}{2}\right)^2$) a ambos lados de la ecuación. En este ejemplo, $a = -4$, luego $(\frac{a}{2})^2 = (-2)^2 = 4$ y $a = 6$ lleva a $(\frac{a}{2})^2 = (3)^2 = 9$. Estas operaciones llevan a:

$$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9}$$

equivalentemente

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16.$$

Al comparar la última ecuación con la ecuación estándar de un círculo, vemos que $h = 2$ y $k = -3$. Concluimos que el círculo tiene centro $(2, -3)$ y radio $\sqrt{16} = 4$.

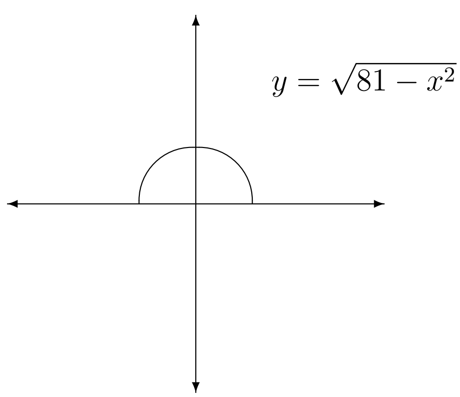
En algunas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de un círculo; es decir, un *semicírculo*. El próximo ejemplo indica como hallar ecuaciones para semicírculos de círculos con centro en el origen.

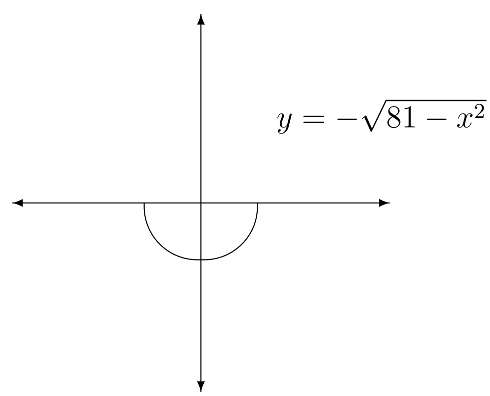
Ejemplo: Encontremos ecuaciones para las mitades superior, inferior, derecha e izquierda del círculo $x^2 + y^2 = 81$.

Notemos que la gráfica de $x^2+y^2 = 81$ es un círculo de radio 9 con centro en el origen. Despejemos y en términos de x con objeto de hallar ecuaciones para la mitad superior e inferior.

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 81 \\ \Longleftrightarrow \quad & y^2 = 81 - x^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & y = \pm\sqrt{81 - x^2}. \end{aligned}$$

Puesto que $\sqrt{81 - x^2} \geq 0$, se deduce que la mitad superior del círculo tiene la ecuación $y = \sqrt{81 - x^2}$ (y es positiva) y la mitad inferior está dada por $y = -\sqrt{81 - x^2}$ (y es negativa).

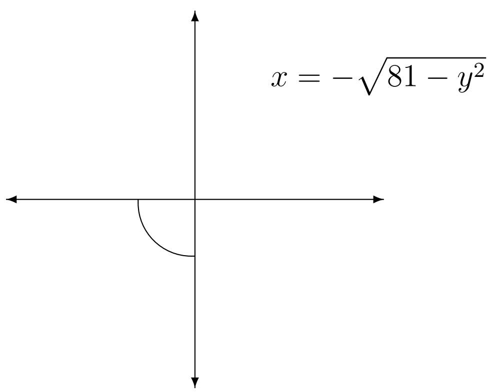


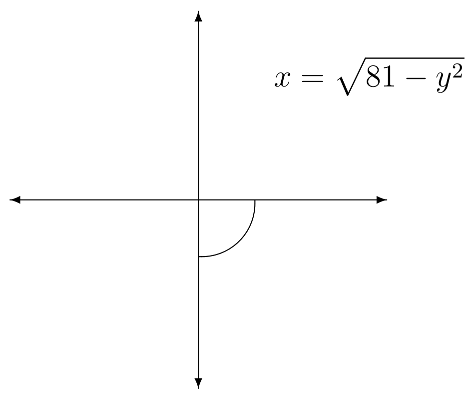


Del mismo modo, a fin de hallar ecuaciones para las mitades derecha e izquierda, se despeja x en términos de y de la ecuación $x^2 + y^2 = 81$ y se obtiene

$$x = \pm\sqrt{81 - y^2}.$$

Dado que $\sqrt{81 - y^2} \geq 0$, se deduce que la mitad derecha del círculo tiene la ecuación $x = \sqrt{81 - y^2}$ (x es positiva) y la mitad izquierda está dada por $x = -\sqrt{81 - y^2}$ (x es negativa).





0.2 Rectas

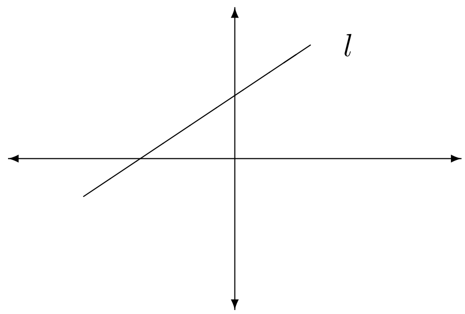
Uno de los conceptos básicos en álgebra es el de *recta*. En esta sección limitaremos nuestro estudio a las rectas de un plano coordenado, lo que nos permitirá el uso de métodos algebraicos para estudiar sus propiedades.

El concepto que sigue es fundamental para el estudio de las rectas.

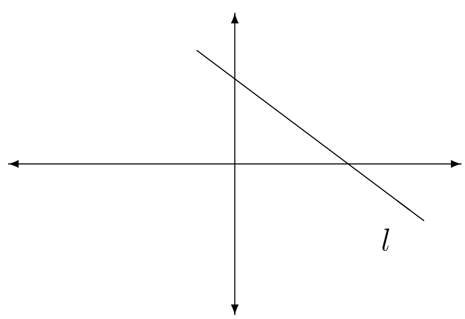
Definición 2 *Sea l una recta que no es paralela al eje y y sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ puntos diferentes de l. La pendiente m de l es*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En la figura siguiente la pendiente es positiva y decimos que la recta se *levanta* o *sube*.



En la figura siguiente la pendiente es negativa y diremos que la recta *baja* o *cae*.



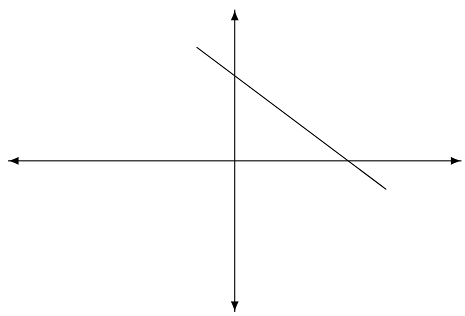
Al hallar la pendiente de una recta no importa que punto marquemos como P_1 y P_2. Asimismo, la elección de los dos puntos que se escojan en l no afectan la definición de pendiente.

Ejemplo: Trazar la recta que pasa por $P_1(-1,4)$ y $P_2(3,2)$ y encontrar su pendiente.

Usamos la definición de pendiente y encontramos

$$m = \frac{2-4}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2},$$

un gráfico es:



A continuación encontramos una ecuación de la recta l que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m.

Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$, entonces P está sobre la recta l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m; es decir, si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Esta ecuación para l se conoce como *forma de punto-pendiente.*

La forma anterior es sólo una posibilidad para una ecuación de una recta. Hay muchas ecuaciones equivalentes. A veces simplificamos la ecuación obtenida usando la forma de punto-pendiente a

$$ax + by = c \quad \text{ó} \quad ax + by + d = 0$$

donde a, b y c son enteros sin factor común, $a > 0$ y $d = -c$.

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(2, 1)$ y tiene pendiente $\frac{5}{3}$.

Usando la forma punto pendiente, encontramos

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{2}(x-2)+1 \\ &= \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} + 1 \\ &= \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo: Encontrar una ecuación de la recta que pasa por $P_1(1,7)$ y $P_2(-3,2)$.

La fórmula de la pendiente m nos da

$$m = \frac{7-2}{1-(-3)} = \frac{5}{4}.$$

Podemos usar las coordenadas de P_1 ó P_2 para (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente. Con $P_1(1,7)$ tendremos

$$y - 7 = \frac{5}{4}(x-1)$$

equivalentemente $4(y-7) = 5(x-1)$ ó $4y-28 = 5x-5$, que también podemos escribir como $5x - 4y = -23$.

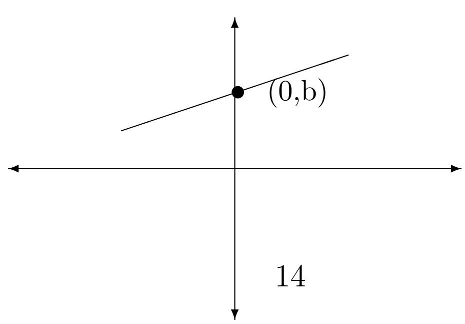
La última ecuación es una de las formas deseadas para la ecuación de una recta. Otra es

$$5x - 4y + 23 = 0.$$

La forma de punto-pendiente para la ecuación de una recta se puede reescribir como: $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

con $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la *intersección en* y (ó *abscisa al origen* ó *ordenada al origen*) de la gráfica como muestra la siguiente figura:



Dado que la ecuación $y = mx+b$ muestra la pendiente m y la intersección igual a b en y de l; se llama *forma de pendiente intersección* o *pendiente-ordenada al origen* para la ecuación de una recta. A la inversa, si comenzamos con $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Al comparar esta ecuación con la forma de punto-pendiente, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$.

Ejemplo: Escribamos la ecuación $2x - 5y = 8$ en forma de pendiente-intersección. Nuestro objetivo es despejar y de la ecuación dada para obtener la forma $y = mx + b$. Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 5y &=& 8 \\ \Longleftrightarrow -5y &=& -2x + 8 \\ \Longleftrightarrow \quad y &=& \left(\dfrac{-2}{-5}\right) x + \dfrac{8}{-5} \\ \Longleftrightarrow \quad y &=& \dfrac{2}{5} x + \dfrac{-8}{5} \end{array}$$

La última ecuación es de la forma pendiente intersección $y = mx + b$ con pendiente $m = \frac{2}{5}$ y ordenada al origen igual a $b = -\frac{8}{5}$.

De la forma de punto-pendiente, se deduce que toda recta es una gráfica de una ecuación

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son números reales y a, b no son cero ambos. Esta ecuación se denomina *ecuación lineal* en x e y.

Por lo visto anteriormente, resulta claro que la gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta y, recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

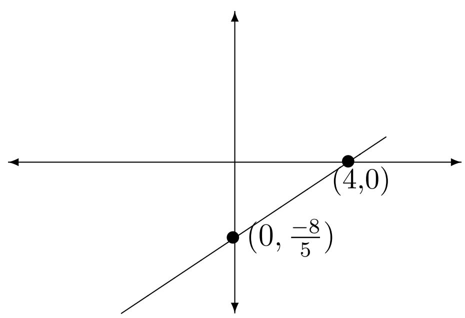
Ejemplo: Trazar la gráfica de $2x - 5y = 8$.

Por nuestro análisis anterior sabemos que la gráfica es una recta, de modo que basta hallar dos puntos de la gráfica. Encontremos las intersecciones en x y y sustituyendo $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, en la ecuación dada, $2x - 5y = 8$.

Intersección x: Si $y = 0$, entonces $2x = 8$, o bien $x = 4$.

Intersección y: Si $x = 0$, entonces $-5y = 8$, o bien $y = \frac{-8}{5}$.

Graficamos las intersecciones $(4, 0)$ y $(0, \frac{-8}{5})$, tendemos una recta que pase por ellos, y llegamos a la gráfica siguiente:



El resultado a continuación especifica la relación entre *rectas paralelas* (rectas en un plano que no se cortan) y pendiente.

Teorema 3 *Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.*

La demostración del teorema anterior es un ejercicio para el lector.

Ejemplo: Encontremos una ecuación de la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

Primero se expresa la ecuación dada en forma pendiente-intersección:

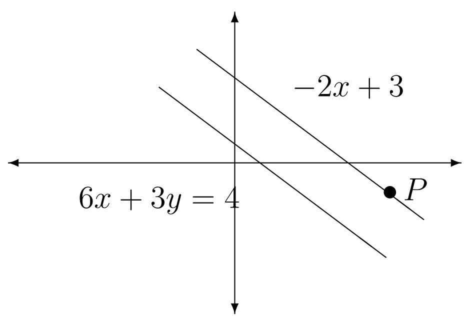
$$y = -2x + \frac{4}{3}.$$

Deducimos que $m = -2$. Puesto que las rectas paralelas poseen la misma pendiente, la recta la recta requerida también tiene pendiente -2.

Con el punto $P(5, -7)$ usamos la forma punto-pendiente y obtenemos

$$\begin{array}{rrcl} & y - (-7) & = & -2(x - 5) \\ \iff & y + 7 & = & -2x + 10 \\ \iff & y & = & -2x + 3. \end{array}$$

Una gráfica es como sigue:

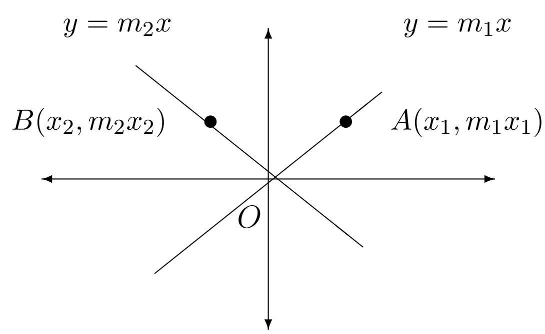


El resultado que sigue nos da información sobre *rectas perpendiculares* (rectas que se cortan en ángulos rectos).

Teorema 4 *Dos rectas con pendientes* m_1 *y* m_2 *son perpendiculares si y sólo si*

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Demostración. Por simplicidad, consideremos el caso especial de dos rectas que se cortan en el origen O. Las ecuaciones de estas rectas son $y = m_1 \cdot x$ y $y = m_2 \cdot x$. Escojamos, como en la figura siguiente, puntos $A(x_1, m_1 \cdot x_1)$ y $B(x_2, m_2 \cdot x_2)$.



Entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es un ángulo recto. Con el teorema de Pitágoras vemos que el ángulo AOB es recto si y sólo si

$$[d(A,B)]^2 = [d(O,B)]^2 + [d(O,A)]^2$$

o bien, por la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2 + x_1^2 + (m_1x_1)^2.$$

Al elevar al cuadrado los términos, simplificar y factorizar, obtenemos

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$

$$-2x_1x_2(m_1m_2 + 1) = 0.$$

Dado que x_1 y x_2 no son cero ambas, podemos dividir ambos lados entre $-2x_1x_2$, con lo cual obtenemos $m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$; por lo tanto, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$. ■

Ejemplo: Encontrar la forma pendiente-intersección para la recta que pasa por el punto $P(5, -7)$ perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

Reescribiendo $6x + 3y = 4$, obtenemos $y = -2x + \frac{4}{3}$. Luego, la pendiente es -2. Por lo tanto, la pendiente de la recta requerida es el recíproco negativo

$-(\frac{1}{(-2)})$, o sea, $\frac{1}{2}$. Con $P(5,-7)$ llegamos a:

$$\begin{aligned} y-(-7) &= \frac{1}{2}(x-5) \\ \iff \qquad y &= \frac{1}{2}x-\frac{19}{2}. \end{aligned}$$

La última ecuación está en forma pendiente-intersección pedida.

0.3 Gráfica de una función real

Recordemos que una función con dominio D es un conjunto W de pares ordenados tales que, para cada $x \in D$, hay exactamente un par ordenado $(x,y) \in W$ con x en primera posición.

Por ejemplo, los pares ordenados $(x, \sqrt{x-1})$ establecen la función $f(x) = \sqrt{x-1}$.

En esta sección la frase "f es una función"significa que dominio y rango son conjuntos de números reales. Si una función se define por medio de una expresión, como en el ejemplo anterior, y el dominio D no se expresa, entonces consideramos que D es la totalidad de números reales x tales que $f(x)$ es real. A veces esto recibe el nombre de *dominio implícito* de f. Para ilustrar lo anterior, si $f(x) = \sqrt{x-1}$, el dominio implícito es el conjunto de números reales x tal que $\sqrt{x-1}$ es real; esto es, $x-1 \geq 0$ ó $x \geq 1$; por lo tanto, el dominio es el intervalo infinito $[1,\infty)$. Si x está en el dominio, decimos que "f está definida en x" o que "f existe". El concepto "f no está definida en x"quiere decir que x no está en el dominio de f.

Ejemplo: Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{1-x}$. La expresión anterior es un número real si y sólo si el radicando $4+x$ es no negativo y el denominador $1-x$ no es igual a 0; por lo tanto, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4+x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1-x \neq 0$$

o bien, lo que es igual,

$$x \geq -4 \quad \text{y} \quad x \neq 1.$$

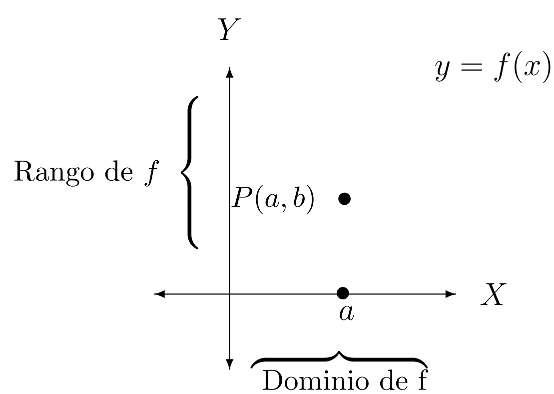
Podemos expresar el dominio en términos de intervalos como

$$[-4, 1) \cup (1, \infty).$$

Si f es una función, podemos emplear una gráfica para indicar el cambio de $f(x)$ a medida que x varía en todo el dominio de f.

Definición 5 *La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f.*

Con frecuencia colocamos la leyenda $y = f(x)$ en un dibujo de la gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, coordenada y igual a b es el valor de la función $f(a)$, según se ilustra en la figura siguiente



La figura muestra el dominio de f (conjunto de valores posibles de x) y el rango de f (valores correspondientes de y). Aún cuando hemos trazado el dominio y el rango como intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos u otros conjuntos de números reales.

Puesto que hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a en el dominio de f, sólo *un* punto de la gráfica de f tiene una coordenada x igual a a. En consecuencia, la gráfica de un conjunto de puntos de un plano coordenado es la gráfica de una función si toda recta vertical corta la gráfica a lo más en un punto. Así, la gráfica de una función no puede ser una figura circular, pues una recta vertical podría cortarla en más de un punto.

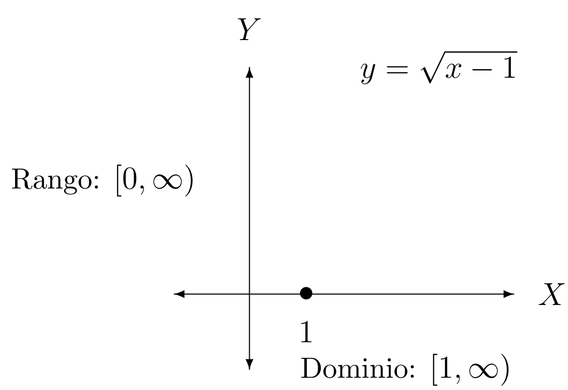
Las intersecciones x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se llaman *ceros* de la función. La intersección y de la gráfica es $f(0)$, si existe.

Ejemplo: Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$ y tracemos la gráfica de f.

Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x-1}$. La próxima tabla enumera las coordenadas de varios puntos de la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
y=$f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

Al trazar los puntos se obtiene el dibujo de la figura siguiente:



Al consultar la figura anterior vemos que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ ó, lo que es equivalente, el intervalo $[1, \infty)$. El rango de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$ ó, lo que es equivalente, $[0, \infty)$.

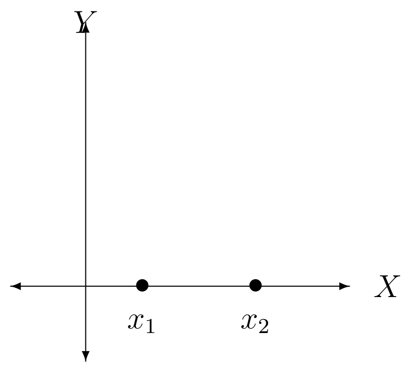
La *función raíz cuadrada*, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, tiene una gráfica similar a la figura anterior pero el punto extremo está en $(0, 0)$. Esta relación gráfica puede ayudarnos a recordar que $\sqrt{9}$ es 3 y que $\sqrt{9}$ *no es* ± 3.

En el ejemplo anterior, a medida que x aumenta, igual ocurre con la función $f(x)$ y decimos que la gráfica de f "*sube*". Consideremos que una función de este tipo es *creciente*.

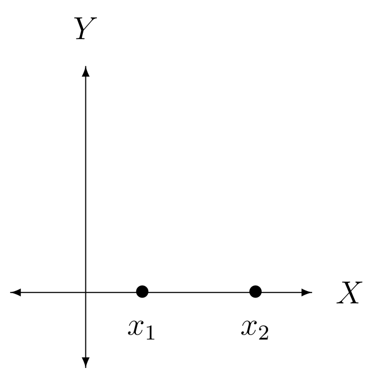
Para ciertas funciones, $f(x)$ disminuye a medida que x aumenta. En este caso la gráfica "*cae*"y f es una función *decreciente*. Las definiciones precisas son las siguientes:

Definición 6 *Una función se dice creciente en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.*

Gráficamente se puede interpretar como en la figura siguiente:



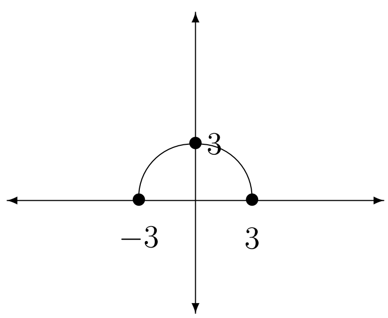
Definición 7 *Una función f se dice decreciente en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.*



Un ejemplo de función creciente es la *función identidad*, cuya ecuación es $f(x) = x$ y cuya gráfica es la recta que pasa por el origen con pendiente 1. Un ejemplo de función decreciente es $f(x) = -x$, ecuación de la recta que pasa por el origen con pendiente -1. Si $f(x) = c$ para todo número real x, entonces f se llama *función constante*.

Utilizaremos en forma indistinta las frases "f es creciente"y "$f(x)$ es creciente", al igual que los términos "decreciente"y "constante".

Ejemplo: Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Por nuestro trabajo con círculos en la sección anterior sabemos que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es un círculo de radio 3 con centro en el origen. Al despejar y de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ obtenemos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Deducimos que la gráfica de f es la mitad superior del círculo como en la figura siguiente:



Al consultar la figura anterior, vemos que el dominio de f es el intervalo $[-3, 3]$ y el rango de f es el intervalo $[0, 3]$.

La gráfica sube a medida que x aumenta de -3 a 0, así que f se incrementa en el intervalo cerrado $[-3, 0]$; por lo tanto, si $x_1 < x_2$ en $[-3, 0]$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

La gráfica cae conforme x aumente de 0 a 3, de manera que f decrece en el intervalo cerrado $[0, 3]$. En este caso, si $x_1 < x_2$ en $[0, 3]$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

El siguiente tipo de función es fundamental en álgebra.

Definición 8 *Una función f es función lineal si*

$$f(x) = ax + b$$

donde x es cualquier número real y a, b son constantes.

La gráfica de f de la definición anterior es la gráfica de $y = ax + b$, que, por la forma pendiente-intersección, es una recta con pendiente a y ordenada al origen igual a b; por lo tanto, la *gráfica de una función lineal es una recta.* Dado que $f(x)$ exsite para toda x, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Es claro que, si $a \neq 0$, el rango de f es también $\mathbb{R}$.

En lo que sigue estudiaremos otros conceptos que nos ayudarán a trazar las gráficas de ciertos tipos de ecuaciones.

Definición 9 *Una función f se llama par si $f(x) = f(-x)$ para toda x en su dominio.*

En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no cambia si x se sustituye por $-x$ y, por lo tanto, por lo estudiado en la sección anterior, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

Definición 10 *Una función se dice impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio.*

Si aplicamos lo estudiado en la sección anterior a la ecuación $y = f(x)$, vemos que la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Ejemplos:

a) La función $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$ es par ya que

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = 3x^4 - 2x^2 + 5 = f(x).$$

b) La función $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$ es impar ya que

$$f(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) = -2x^5 + 7x^3 - 4 = -f(x).$$

c) La función $f(x) = x^3 + x^2$ no es par y no es impar, ya que

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2.$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, la función no es par ni impar.

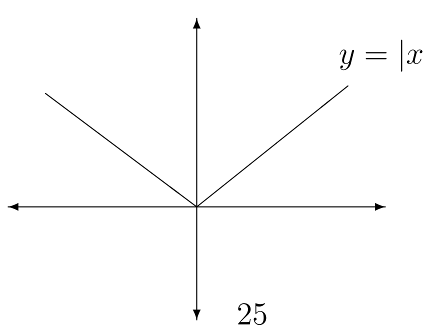
Para el próximo ejemplo, recordemos que el *valor absoluto* de un número real x se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ejemplo: Sea $f(x) = |x|$. El dominio de f es $\mathbb{R}$ porque el valor absoluto de x existe para todo número real x. Si x está en $\mathbb{R}$, entonces

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por lo tanto, f es una función par. Así, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$; así pues, la parte de la gráfica del primer cuadrante coincide con la recta $y = x$. Trazamos esta semirecta, usamos simetría y llegamos a la figura siguiente:



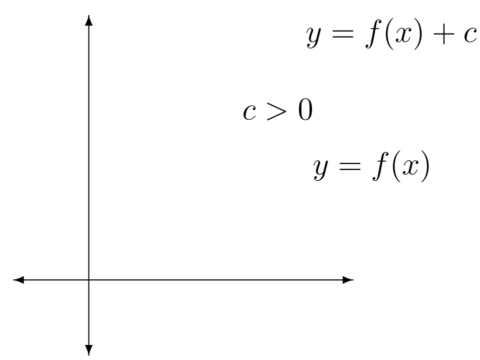
Al consultar la gráfica vemos que f decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$.

Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, es fácil graficar

$$y = f(x) + c \quad \text{y} \quad y = f(x) - c$$

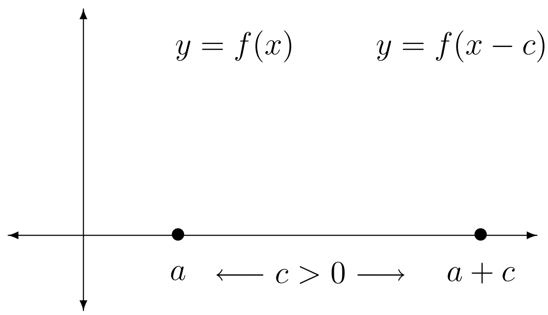
para cualquier número real positivo c.

Para $y = f(x) + c$, se suma c a la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Esto *desplaza* la gráfica "hacia arriba" una distancia c, como muestra la figura siguiente



Para $y = f(x) - c$ con $c > 0$, se resta c de cada coordenada y, lo cual corre la gráfica de f una distancia c "hacia abajo". Estos cambios se llaman *desplazamientos verticales* de gráficas.

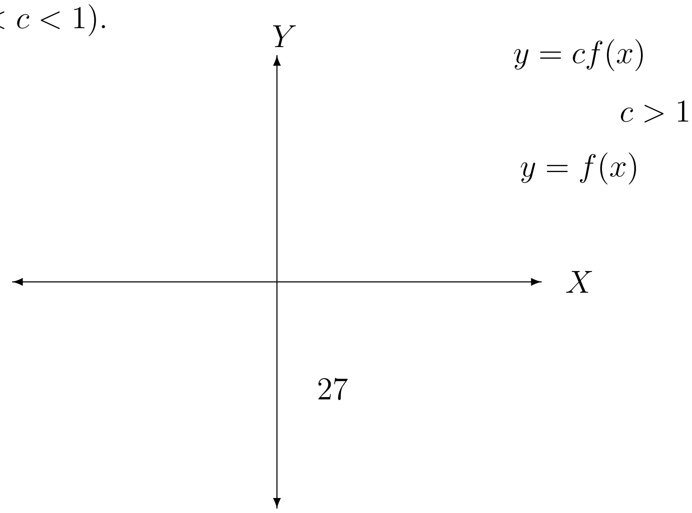
También podemos considerar *desplazamientos horizontales* de gráficas. En particular, si $c > 0$, consideremos las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$ trazadas en el mismo plano coordenado según se ilustra en la figura siguiente



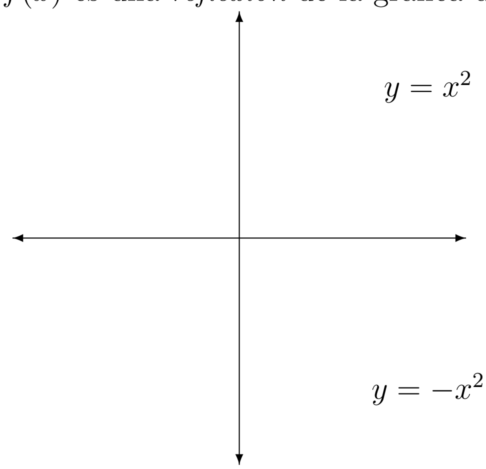
Puesto que $f(a) = f([a+c]-c)$ el punto con coordenada x igual a a en la gráfica de $y = f(x)$ tiene la misma coordenada y que el punto con coordenada x igual a $a+c$ en la gráfica de $y = f(x-c)$. Esto significa que la gráfica de $y = f(x-c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ *a la derecha* una distancia c. En forma análoga, la gráfica de $y = f(x+c)$ se obtiene corriendo la gráfica de f *a la izquierda* una distancia $c > 0$.

Los desplazamientos horizontales y verticales también se denominan *traslaciones*.

Con el objeto de obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c, *multiplicamos* por c las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, duplicamos las coordenadas y; o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ cada coordenada y. Este procedimiento se conoce como *alargar verticalmente* la gráfica de f (si $c > 1$), o *comprimir verticalmente* la gráfica (si $0 < c < 1$).



Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ multiplicando por -1 la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$; por lo tanto, todo punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentre "arriba"del eje x, determina un punto $(a, -b)$ de la gráfica de $y = -f(x)$ que está "abajo"del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una *reflexión* de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.



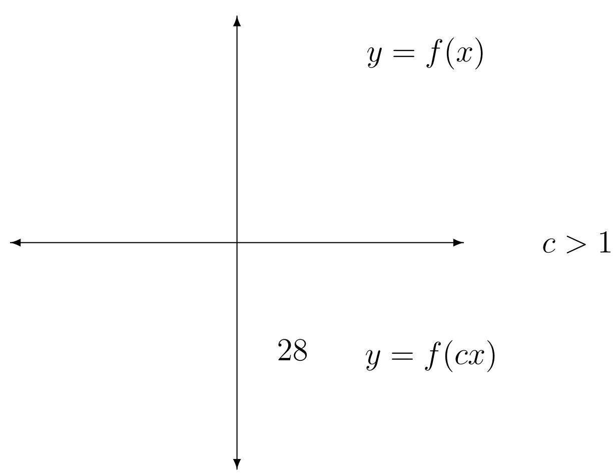
A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$ si $c \neq 0$. En este caso los valores de la función $f(x)$ para

$$a \leq x \leq b$$

son los mismos que los de la función $f(cx)$ para $a \leq cx \leq b$ o bien

$$\frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}.$$

Esto significa que la gráfica de f está *horizontalmente comprimida* (si $c > 1$) u horizontalmente alargada (si $0 < c < 1$).



Si $c < 0$, llegamos a la gráfica de $y = f(cx)$ reflejando la gráfica de $y = f(|c|x)$ en el eje y; por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, reflejamos la gráfica de $y = f(2x)$ en el eje y. Como caso especial, la gráfica de $y = f(-x)$ es una *reflexión* de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.

En general, el proceso de desplazar, alargar, comprimir y reflejar una gráfica se denomina *transformación* de una gráfica.

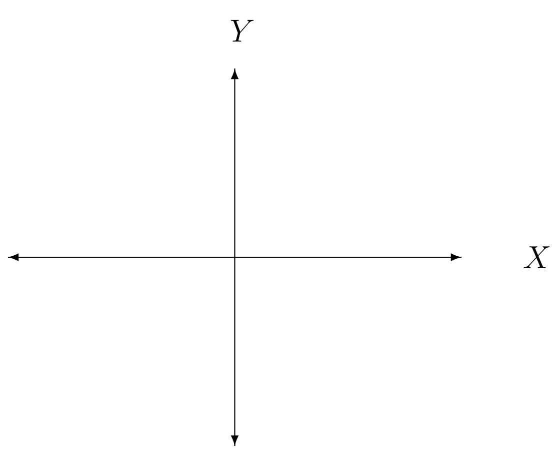
0.4 Funciones cuadráticas

Definición 11 *Una función f es una función cuadrática si*

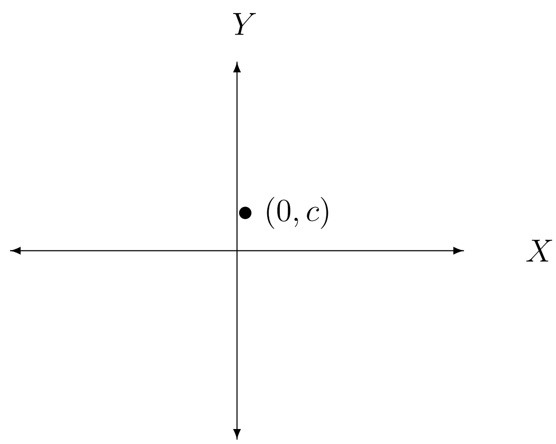
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Si $b = c = 0$ en la definición anterior, entonces $f(x) = ax^2$ y la gráfica es una parábola con vértice en el origen, como muestra la figura siguiente:



Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces $f(x) = ax^2 + c$ y, de acuerdo a nuestro análisis de desplazamientos verticales de la sección anterior, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ en el eje de las y, como ilustra la figura siguiente:



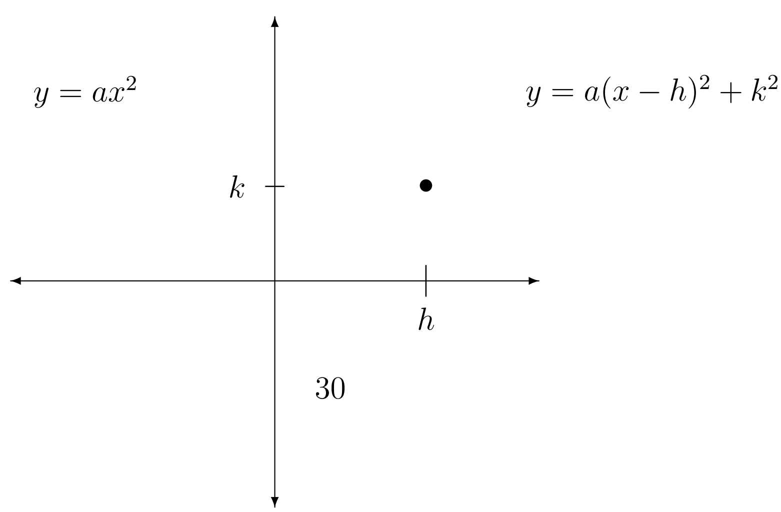
Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, completamos el cuadrado y podemos cambiar la forma a

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k.

La forma anterior también se conoce como *ecuación estándar*.

Podemos obtener la gráfica de esta ecuación a partir de la gráfica de $y = ax^2$ por medio de un desplazamiento horizontal y uno vertical. se deduce que *la gráfica de una función cuadrática es una parábola con un eje vertical.* La situación geométrica se ilustra en la figura siguiente:



Si $a > 0$, el punto (h, k) es el más bajo de la parábola, y la función f tiene un *valor mínimo* $f(h) = k$.

Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y su punto (h, k) es el punto más alto. En este caso, la función f tiene un *valor máximo* $f(h) = k$.

Ejemplo: Expresemos $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$ en forma estándar.

Para ello, antes de completar el cuadrado, *es esencial factorizar el coeficiente de* x^2 *de los primeros dos términos de* $f(x)$, de esta manera

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 \\ &= 3(x^2 + 8x + \_\_) + 50 \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado para la expresión x^2+8x dentro del paréntesis, sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, esto es, $(\frac{8}{2})^2$, o sea 16.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + 16) - 3 \cdot 16 + 50 \\ &= 3(x + 4)^2 - 48 + 50 \\ &= 3(x + 4)^2 + 2. \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$.

Ejemplo: Encontremos la ecuación de una parábola con vértice $V(2, 3)$ y que pasa por el punto $(5, 1)$.

Con la ecuación estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

con $h = 2$ y $k = 3$ obtenemos

$$y = a(x - 2)^2 + 3.$$

Para hallar a, aprovechamos que $(5, 1)$ está en la parábola. Así pues, es una solución de la última ecuación; por lo tanto,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3$$

ó $a = -\frac{2}{9}$. En consecuencia, una ecuación para la parábola es

$$y = -\frac{2}{9}(x-2)^2 + 3.$$

0.5 Álgebra de funciones

A menudo las funciones se definen en términos de sumas, diferencias, productos o divisiones de varias expresiones; por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x+1},$$

podemos considerar $h(x)$ como una suma de valores de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{5x+1}.$$

Nos referimos a h como la *suma* de f y g y la denotamos $f+g$. Así,

$$h(x) = (f+g)(x) = x^2 + \sqrt{5x+1}.$$

Observe que la posibilidad de definir esta operación depende de que ella esté presente en el rango de la función f (en este caso los números reales). Una definición precisa es como sigue:

Definición 12 *Sean f y g funciones. Se define la suma de f y g, denotada $f+g$, como*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

para cada x en un dominio común de f y g.

Análogamente se define: La *diferencia* de f y g, denotada $f-g$, como

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

y el *producto* de f y g, denotado $f \cdot g$, como

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Finalmente, definimos el *cuociente* de f y g, denotado $\dfrac{f}{g}$, como

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde x pertenece a un dominio común de f y g, y siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo: Sean $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$. El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, y el dominio de g es $\mathbb{R}$. La intersección de estos dominios es $[2, 2]$, que es el dominio de $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$. Para el dominio de $\dfrac{f}{g}$ se excluye todo número x en $[-2, 2]$ tal que $g(x) = 3x + 1 = 0$ (es decir $x = -\frac{1}{3}$); por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1)\ , \qquad -2 \leq x \leq 2 \\
(f - g)(x) &= \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1)\ , \qquad -2 \leq x \leq 2 \\
(f \cdot g)(x) &= \sqrt{4 - x^2} \cdot (3x + 1)\ , \qquad -2 \leq x \leq 2 \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}\ , \qquad -2 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad x \neq -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Una función f puede ser:

a) *Polinomial*, esto es si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo $c \cdot x^k$, donde c es número real y

k es un entero no negativo.

b) *Algebraica*, esto es una función que es una combinación de sumas, diferencias, productos, cocientes o raíces de funciones polinomiales.

Ejemplo: $f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x}}}$.

c) *Trascendentales*, esto es aquellas funciones que no son algebraicas.

Ejemplos: $f(x) = e^x$ y $f(x) = \log(x)$.

Las funciones trascendentales serán el objeto de estudio de un capítulo posterior.

0.6 Ejercicios

1. Describa el conjunto de todos los puntos (x, y) de un plano coordenado tal que $y/x < 0$.

2. Demuestre que el triángulo con vértices $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$ y $C(4, -1)$ es un triángulo rectángulo y encuentre su área.

3. Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, hallar

   a) La distancia $d(P, Q)$.

   b) El punto medio del segmento PQ.

   c) Un punto R tal que Q sea el punto medio de PR.

4. Encuentre todos los puntos del eje y localizados a una distancia 13 de $P(12,6)$.

5. ¿ Para qué valores de a la distancia entre $P(a,1)$ y $q(-2,a)$ es menor de 3?

6. Encuentre una ecuación del círculo que tenga centro $C(7,-4)$ y pasa por $P(-3,3)$.

7. Halle una ecuación para la mitad izquierda del círculo dado por $(x+2)^2+y^2=9$.

8. Determine la pendiente de la recta que pasa por $C(11,-5)$ y $D(-8,6)$.

9. Demuestre que $A(-3,1)$, $B(1,-1)$, $C(4,1)$ y $D(3,5)$ son los vértices de un trapecio.

10. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ que es

    a) Paralela a la recta $6x+2y+5=0$.

    b) Perpendicular a la recta $6x+2y+5=0$.

11. Exprese $8x+3+3y-24=0$ en forma de punto-pendiente.

12. Encuentre una ecuación de la recta que tiene intersección x en -3 y pase por el centro del círculo con ecuación: $x^2+y^2-4x+10y+26=0$.

13. Halle la ecuación general de la recta que pasa por $P(4,-3)$ con pendiente 5.

14. Encuentre el centro y radio del círculo con la ecuación dada

    a) $x^2+y^2-12y+31=0$.

    b) $4x^2+4y+24x-16y+39=0$.

15. Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$, halle

   a) $f(1)$

   b) $f(-1)$

   c) $f(0)$

   d) $f(-x)$

   e) $-f(x)$

   f) $f(x^2)$

   g) $[f(x)]^2$

16. Hallar $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ si $h \neq 0$ para las siguientes funciones

   a) $f(x) = \sqrt{3x-4}$

   b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+4x}$.

   b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2-x^3}$.

   c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4+3x^2+5}$.

18. Trace la gráfica de la ecuación y nombre (o etiquete) las intersecciones x y y

   a) $9y + 2x^2 = 0$.

   b) $y = \sqrt{1-x}$.

   c) $y^2 = 16 - x^2$.

   d) $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$.

   e) $x^2 + y^2 - 8x = 0$.

f) $y = (x-3)^2 - 2$.

19. Para las siguientes funciones trace la gráfica, encuentre el dominio y el rango f, y halle los intervalos en que f es creciente, decreciente o constante

   a) $f(x) = \frac{1-3x}{2}$.
   b) $f(x) = |x+3|$.
   c) $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$.
   d) $f(x) = 9 - x^2$.
   e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.
   f) $f(x) = 1 + 2[x]$.

20. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones, usando desplazamiento, alargamiento o reflexión:

   a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{x+4}$ c) $y = \sqrt{x} + 4$
   d) $y = 4\sqrt{4}$ e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ f) $y = -\sqrt{x}$

21. Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$:

   a) $f(x) = 5x^2 + 30x + 49$.
   b) $f(x) = -3x^2 + 30x - 82$.
   c) $f(x) = -12(x+1)^2 - 37$.
   d) $f(x) = 3(x+2)(x-10)$.

22. Exprese la función $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$ en la forma $a(x-h)^2 + k$.

23. Halle la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que tenga vértice $V(3, -2)$ y pase por $(5, 4)$.

24. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre el dominio de

a) fg b) f/g

25. Si $f(x) = 8x - 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, halle

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(2)$

26. Para las siguientes funciones encuentre: $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ $g(x) = 3x + 2$.

b) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$ $g(x) = 1/x^2$.

27. Para las siguientes funciones, determine: $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$, y $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$:

a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ $g(x) = \sqrt{x - 3}$.

b) $f(x) = \frac{x}{3x+2}$ $g(x) = \frac{2}{x}$.

28. Encuentre una forma de función composición para $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$.

29. ¿$f(x) = 2x^3 - 5$ es una función biunívoca?

30. Para las siguientes funciones, halle: $f^{-1}(x)$ y trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.

a) $f(x) = 10 - 15x$ b) $f(x) = 9 - 2x^2$, $x \leq 0$.

31. Supongamos que f y g son funciones biunívocas tales que $f(2) = 7$, $f(4) = 2$ y $g(2) = 5$. Encuentre el valor, si es posible

a) $(g \circ f^{-1})(7)$.

b) $(f \circ g^{-1}(5)$.

c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$.

d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$.