

Conjuntos, Relaciones y Funciones

0.1 Conjuntos

El término *conjunto* y *elemento de un conjunto* son términos primitivos y no definidos. De un punto de vista intuitivo parece ser que cualquier colección de objetos puede ser considerado un conjunto. Sin embargo esto no es así, ya que de lo contrario se llega a paradojas. En general podemos decir informalmente que los conjuntos no pueden ser “demasiado grandes”. (El lector interesado puede consultar la referencia: Charles C. Pinter, *Set Theory*, Addison-Wesley, 1971)

De esta manera, siempre supondremos que todos los conjuntos son elementos de un conjunto universal, U . A menudo U no se menciona explícitamente, tal como ocurre con el dominio de una función proposicional.

Los conjuntos los denotamos por letras mayúsculas:

$$A, B, C, \dots$$

y los elementos por letras minúsculas

$$a, b, c, \dots$$

“ a es un elemento del conjunto A ” (o “ a es un miembro de A ” o “ a está en A ” o “ a pertenece a A ”) se denota: $a \in A$.

Si un conjunto no tiene muchos elementos se pueden escribir todos ellos. Por ejemplo si A es el conjunto con los elementos 1, 2, 3, 4 se indica como:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Otra forma de especificar los elementos de un conjunto es dando una regla.
Por ejemplo:

$$A = \{a : a \text{ es un entero y } 1 \leq a \leq 4\}$$

o

$$A = \{x : (x - 2)(x - 1)(x - 4)(x - 3) = 0\}$$

representan el mismo conjunto.

La notación $\{a : p(a)\}$ se lee: “El conjunto de todos los a tales que $p(a)$ es verdadero”. También se escribe $\{a / p(a)\}$.

Note que el orden en el cual se escriben los elementos de un conjunto no es importante.

Definición 1 *Un conjunto A es igual a un conjunto B , denotado $A = B$, si y sólo si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A . En símbolos:*

$$(A = B) \longleftrightarrow [(\forall x, x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \longrightarrow x \in A)]$$

o

$$(A = B) \longleftrightarrow (\forall x, x \in A \longleftrightarrow x \in B).$$

Ejemplo

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{x : 1 \leq x \leq 3 \text{ y } x \text{ es un entero}\}.$$

Los siguientes conjuntos son usualmente empleados en matemática:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{x : x \text{ es un número entero } x \geq 1\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{Conjunto de los números naturales})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{x : x \text{ es un entero}\} \\ &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{Conjunto de los números enteros})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= \left\{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\right\} \\ &= \left\{\dots, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \quad (\text{Conjunto de los números racionales})\end{aligned}$$

$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ es número real}\}.$$

Definición 2 Sean A, B conjuntos. Se dice que A es un subconjunto de B si y sólo si cada elemento de A es un elemento de B . Se denota por:

$$A \subseteq B \quad \text{ó} \quad B \supseteq A.$$

En símbolos:

$$A \subseteq B \iff (\forall x, x \in A \implies x \in B).$$

Si A no es subconjunto de B , se escribe $A \not\subseteq B$.

Note que $A \subseteq A$. Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ se dice que A es un *subconjunto propio* de B , y se escribe

$$A \subset B \quad \text{ó} \quad B \supset A.$$

Si A no es un subconjunto propio de B , se escribe:

$$A \not\subset B.$$

Es posible tener un conjunto *sin* elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los estudiantes que miden 6 metros. Tal conjunto se llama *conjunto vacío* y se denota \emptyset . En símbolos:

$$\emptyset = \{x : p(x) \wedge \neg p(x)\}$$

donde $p(x)$ es cualquier función proposicional.

Definición 3 Sean A, B conjuntos. La unión de A y B (denotada $A \cup B$) es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B . En símbolos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

La intersección de A y B (denotada $A \cap B$) es el conjunto de todos los elementos que están en A y en B . En símbolos:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

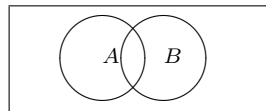
Si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son *disjuntos*.

El complemento relativo de A en B (o complemento de A con respecto a B), denotado por $B - A$ (o $B \setminus A$) es el conjunto de todos los elementos en B que no están en A . En símbolos:

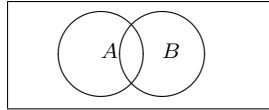
$$B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Si B es U , el conjunto universal, entonces $U \setminus A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\} = \{x : x \notin A\}$ es llamado el complemento de A y se denota A^c (o $C_U A$).

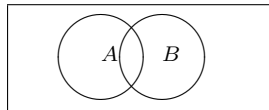
Es útil representar la definición anterior en términos de Diagramas de Venn:



$$A \cap B$$

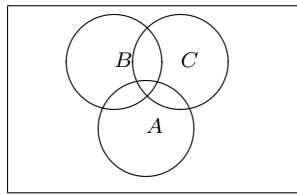


$$A \cup B$$



$$A \setminus B$$

Análogamente se puede representar, por ejemplo, $A \cap (B \cup C)$:



Note que un diagrama de Venn con dos conjuntos consiste de 4 regiones, mientras que un diagrama con tres conjuntos consiste de 8 regiones ($2 \times 2 \times 2 = 8$). Así, un diagrama con 6 conjuntos requiere de $2^6 = 64$ regiones. Esto hace que los diagramas de Venn sean de uso limitado.

Definición 4 Sea A un conjunto. El conjunto de todos los subconjuntos de A , denotado por $\mathbb{P}(A)$ (o 2^A) se llama conjunto potencia de A (o partes de A). En símbolos:

$$\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Ejemplo: Sea $U = \mathbb{N} = \{x : x \text{ es un entero, } x \geq 1\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Sean $A = \{x : x \text{ es par}\}$, $B = \{x : x = 2k - 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$,

$$C = \{y : y \leq 4\}, \quad D = \{1, 3\}.$$

Entonces

$$A \cup B = U \quad ; \quad A \cap B = \emptyset \quad ; \quad A^c = B \quad ; \quad A \setminus B = A \quad ;$$

$$\begin{aligned}
B^c &= A & ; & & B \setminus A &= B & & ; & C \cap D &= D & & ; & C &\not\subseteq D & ; \\
D \setminus C &= \emptyset & ; & & D &\subseteq C & & ; & D &\subset C & & ; & D^c &\supseteq A & ; \\
\mathbb{P}(D) &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\} & ; & & 1 &\not\subseteq D & ; & & 1 &\in D & ; & & A \cup C &= A \cup D & ; \\
\emptyset &\in \mathbb{P}(D) & & ; & \{1\} &\in \mathbb{P}(D) & & ; & 1 &\notin \mathbb{P}(D) & . & & & & .
\end{aligned}$$

En lo que sigue veremos algunos teoremas con respecto a propiedades de conjuntos.

Teorema 5 Sean A y B conjuntos, tales que $A \cap B = A$. Entonces $A \subseteq B$.

Demostración. Sean A y B conjuntos, tales que $A \cap B = A$. Sea $a \in A$. Entonces

⋮

“Algo usando la hipótesis $A \cap B = A$ ”

⋮

Así, $a \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

Comentarios

Se comenzó la demostración “copiando el enunciado”. Esto es positivo pero, en general, las demostraciones en matemática y especialmente en textos avanzados, omiten esto y asumen que el lector lo infiere del contexto.

¿Cuán detallada debe ser una demostración? No hay una respuesta a ello, pero por regla general se debe incluir suficiente información como para que una persona de un nivel menor a lo que se lee, sea capaz de entender la demostración.

Cuando se comienza a hacer demostraciones en matemática una buena idea es escribirla con el suficiente detalle de manera que al volver a leerla, a

la semana siguiente, seamos capaces de entenderla. De lo contrario, debemos incluir mayores detalles.

Note que la demostración comienza: “Sea $a \in A$ ”. Este es otro ejemplo del uso de una variable “fija pero arbitraria”. Se asume que a es un elemento de A pero nada más.

Observemos que en “Sea $a \in A$ ” estamos en realidad incluyendo *dos* casos, uno de los cuales no hemos mencionado. Cuando se dice “Sea $a \in A$ ”, estamos asumiendo que $A \neq \emptyset$. ¿Qué sucede si $A = \emptyset$? La razón de lo anterior es que si $A = \emptyset$ la demostración es trivial. En efecto, \emptyset es subconjunto de cualquier conjunto, en particular de B . Así, cada vez que escribamos algo de la forma :

“Sea $a \in A$ ”

debemos estar siempre seguros que el caso $A = \emptyset$ no causa problemas.

Ejercicio: Complete la demostración anterior.

Teorema 6 Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A - B = A \cap B^c.$$

Demostración. Sean A y B conjuntos. Primero se prueba que $A - B \subseteq A \cap B^c$.

Sea $x \in A - B$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$ (definición de $A - B$). Pero $x \notin B$ implica que $x \in B^c$. Por lo tanto $x \in A$ y $x \in B^c$. Luego $x \in A \cap B^c$. Esto prueba que $A - B \subseteq A \cap B^c$.

Supongamos ahora que $x \in A \cap B^c$. Esto significa que $x \in A$ y $x \in B^c$ (por definición de intersección). Pero $x \in B^c$ significa que $x \notin B$. Por lo tanto $x \in A$ y $x \notin B$, esto es, $x \in A - B$. Así $A \cap B^c \subseteq A - B$. Ya que se ha probado que $A - B \subseteq A \cap B^c$ y $A \cap B^c \subseteq A - B$, se tiene demostrado que $A - B = A \cap B^c$. ■

Teorema 7 Si A, B, C son conjuntos con $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Demostración. Sean A, B, C conjuntos con $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Sea $a \in A$. Ya que $A \subseteq B$ se tiene $a \in B$. Además, ya que $B \subseteq C$ y $a \in B$ se tiene que $a \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$. ■

Teorema 8 Sean A, B conjuntos. Entonces

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A.$$

Demostración. Sean A, B conjuntos. Primero, mostraremos que $A \subseteq B$ implica $A \cap B = A$.

Supongamos que $A \subseteq B$. Sea $z \in A \cap B$. Entonces $z \in A$ y $z \in B$. Luego $z \in A$ y, por lo tanto, $A \cap B \subseteq A$.

Ahora, sea $z \in A$. Ya que $A \subseteq B$, $z \in B$. Por lo tanto $z \in A$ y $z \in B$, lo que significa $z \in A \cap B$. Así, hemos probado que $A \subseteq A \cap B$. Esto, junto a $A \cap B \subseteq A$, implica que $A = A \cap B$.

Ahora, para demostrar que $A \cap B = A$ implica $A \subseteq B$, supongamos que $A \cap B = A$. Sea $a \in A$. Entonces, ya que $A = A \cap B$, $a \in A \cap B$. Luego, $a \in B$. Esto implica que $A \subseteq B$. ■

Teorema 9 Sean A, B conjuntos. Entonces $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Demostración. Sean A, B conjuntos. Como \emptyset es un subconjunto de cualquier conjunto se tiene $\emptyset \subseteq A \cap (B - A)$. De esta manera, sólo debemos mostrar que $A \cap (B - A) \subseteq \emptyset$. Haremos esto indirectamente, esto significa que asumiremos que existe un elemento en $A \cap (B - A)$ que no es un elemento de \emptyset y obtendremos una contradicción. Note que como \emptyset no tiene elementos, lo único que se puede hacer es asumir un elemento en $A \cap (B - A)$ y llegar a una contradicción.

Suponga que existe $y \in A \cap (B - A)$. Entonces $y \in A$ y $y \in B - A$. Pero $y \in B - A$ implica que $y \in B$ y $y \notin A$. Así, se tiene que $y \in A$ y $y \notin A$, una contradicción. Esto completa la prueba. ■

0.2 Conjuntos de validez de funciones proposicionales

Como una aplicación de la teoría de conjuntos desarrollada, consideremos la siguiente definición.

Definición 10 Sea p una función proposicional con dominio D . El conjunto de validez de p es:

$$P := \{x \in D : p(x) \text{ es verdadero} \}.$$

Ejemplos

a) Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $p(x) : “x \text{ es par}”$ y $q(x) : “x \text{ es un primo}”$. Entonces se tiene:

$$P = \{2, 4, 6\} \quad Q = \{2, 3\}.$$

b) Sea $D = \mathbb{R}$, $p(x) : “x^2 - 3x + 2 = 0”$ y $q(x) : “\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1”$. Entonces

$$P = \{1, 2\} \quad Q = \mathbb{R}$$

(Verificación: Ejercicio).

En álgebra se denominan también a los conjuntos anteriores: *Conjuntos solución*.

Se pueden usar las operaciones entre conjuntos para expresar los conjuntos de validez de funciones proposicionales compuestas. Así, por ejemplo, si P , Q corresponden a los conjuntos de validez de funciones proposicionales p , q respectivamente, entonces

$$P \cap Q = \{x : p(x) \wedge q(x)\},$$

es el conjunto de validez para $p(x) \wedge q(x)$.

$$P \cup Q = \{x : p(x) \vee q(x)\},$$

es el conjunto de validez para $p(x) \vee q(x)$.

$$P^c = \{x : \neg p(x)\},$$

es el conjunto de validez de $\neg p(x)$.

¿Qué ocurre con $p(x) \longrightarrow q(x)$? Recordemos que

$$(p \longrightarrow q) \iff (\neg p \vee q)$$

entonces se ve que

$$P^c \cup Q = \{x : \neg p(x) \vee q(x)\}$$

es el conjunto de validez de $p(x) \longrightarrow q(x)$.

Ejemplos

a) Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $p(x)$: “ x es par”, $q(x)$: “ x es impar”, $r(x)$: “ x es 2 ó 3”. Entonces :

i) El conjunto de validez de $p(x) \vee q(x)$ es:

$$P \cup Q = D.$$

ii) El conjunto de validez de $p(x) \wedge q(x)$ es:

$$P \cap Q = \emptyset.$$

iii) El conjunto de validez de $p(x) \longrightarrow q(x)$ es:

$$P^c \cup Q = \{1, 3, 5\}.$$

iv) El conjunto de validez de $\neg r(x)$ es:

$$R^c = \{1, 4, 5, 6\}.$$

b) Sea $D = \mathbb{R}$ y $p(x) : "x^2 - 3x + 2 > 0"$. Entonces sabemos que, algebraicamente, $p(x)$ es equivalente a:

$$(x - 2)(x - 1) > 0.$$

Sean : $p_1(x) : "x - 2 > 0"$

$p_2(x) : "x - 1 > 0"$

$p_3(x) : "x - 2 < 0"$

$p_4(x) : "x - 1 < 0"$

Entonces $p(x)$ es equivalente a:

$$[p_1(x) \text{ y } p_2(x)] \text{ o } [p_3(x) \text{ y } p_4(x)].$$

Observemos ahora que (en notación de intervalos):

$$P_1 = (2, \infty)$$

$$P_2 = (1, \infty)$$

$$P_3 = (-\infty, 2)$$

$$P_4 = (-\infty, 1).$$

Entonces, el conjunto de validez para $p(x)$ es:

$$(P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4),$$

esto es :

$$[(2, \infty) \cap 1, \infty) \cup [(-\infty, 2) \cap (-\infty, 1)] = (2, \infty) \cup (-\infty, 1) = \mathbb{R} - [1, 2].$$

(Verificación: Ejercicio).

0.3 Relaciones

Sabemos que un conjunto está determinado por sus elementos; esto es, $\{a, b\} = \{b, a\}$ y que el orden en el cual los elementos aparecen no hace diferencia.

En ocasiones, deseamos distinguir cuando los mismos elementos están puestos en orden diferente. Para hacer esto introducimos el concepto de *par ordenado*.

Es posible realizar lo anterior en términos de conjuntos (ver lista de ejercicios), sin embargo esta definición no es muy útil, de manera que consideraremos un par ordenado como un *término indefinido*. La notación será estándar:

$$(a, b)$$

donde a es el *primer elemento* y b es el *segundo elemento*. La propiedad en la cual estamos realmente interesados es:

Definición 11 Sean (a, b) , (c, d) pares ordenados. Entonces $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Note que la definición anterior distingue orden: $(a, b) \neq (b, a)$ a menos que $a = b$.

Con el concepto de par ordenado, se puede definir una nueva operación entre conjuntos: El producto cartesiano de dos conjuntos:

Definición 12 Sean A, B conjuntos. El producto cartesiano de A con B , denotado $A \times B$; es el conjunto de todos los pares ordenados con primer elemento en A y segundo elemento en B . En símbolos:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \emptyset$ entonces:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A \times C = \emptyset$$

$$B \times C = \emptyset.$$

Se puede graficar $A \times B$ en un arreglo rectangular:

$$\begin{array}{cccc}
 & b & (1, b) & (2, b) & (3, b) \\
 B & & & & \\
 & a & (1, a) & (2, a) & (3, a) \\
 & & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 \\
 & & & A &
 \end{array}$$

Observe en este ejemplo que $A \times B \neq B \times A$ y que $A \times C = B \times C$ no implica que $A = B$.

Definición 13 Sean A, B conjuntos. Una relación de A a B es un subconjunto de $A \times B$. Si \mathcal{R} es una relación de A a B entonces un elemento $(a, b) \in \mathcal{R}$ será denotado como:

$$a\mathcal{R}b.$$

El dominio de \mathcal{R} (denotado $Dom(\mathcal{R})$) es el conjunto de todos los primeros elementos de \mathcal{R} ; en símbolos

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a : (a, b) \in \mathcal{R}\} = \{a : a\mathcal{R}b\}.$$

La *imagen* de \mathcal{R} (denotado por $Im(\mathcal{R})$) es el conjunto de todos los segundos elementos de \mathcal{R} ; en simbolos

$$Im(\mathcal{R}) = \{b : (a, b) \in \mathcal{R}\} = \{b : a\mathcal{R}b\}.$$

Observe que $Dom(\mathcal{R}) \subseteq A$ y $Im(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Si $A = B$ se dice que \mathcal{R} es una *relación en* A .

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y \mathcal{R} la relación “menor que” en A ; esto es: $a\mathcal{R}b$ si y sólo si $a < b$. Se puede ilustrar lo anterior con un diagrama:

	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
A	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)

1	2	3
A		

donde cada elemento de este arreglo es un elemento de $A \times A$ y, $(1, 3)$, $(2, 3)$ y $(1, 2)$ son los pares ordenados de la relación \mathcal{R} .

En este ejemplo: $Dom(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$, $Im(\mathcal{R}) = \{2, 3\}$.

Antes de seguir adelante con la teoría, veremos una serie de ejemplos para fijar ideas.

a) Sea A el conjunto de todas las personas (vivas) del mundo. Para $x, y \in A$ definimos:

$x\mathcal{R}y$ si y sólo si y es el padre de x .

Entonces \mathcal{R} es una relación en A . Los pares ordenados son de la forma: $(x, \text{padre de } x)$ y $Dom(\mathcal{R}) = \{x : \text{uno de los padres de } x \text{ esta vivo}\}$.

Ejercicio: Encuentre $Im(\mathcal{R})$.

b) Sea $A = \mathbb{R}$. Para $x, y \in \mathbb{R}$ definimos

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } y = x^2.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{R} y los pares ordenados son de la forma (x, x^2) . Note que lo anterior corresponde a nuestra familiar *parábola*. $Dom(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$, $Im(\mathcal{R}) = \{x : x \geq 0\}$. En general todas las funciones que conocemos son relaciones.

c) Sea A cualquier conjunto. Para $x, y \in A$ se define

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } x = y.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación en A . Los pares ordenados son de la forma (x, x) , $Dom(\mathcal{R}) = A$ y $Im(\mathcal{R}) = A$.

d) Sea A cualquier conjunto. Si B, C son subconjuntos de A se define:

$$B\mathcal{R}C \text{ si y sólo si } B \subseteq C.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación en $\mathbb{P}(A)$ y $Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = \mathbb{P}(A)$. En particular, si $A = \{1, 2\}$, entonces

$$\mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, A), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, A), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, A), (A, A)\}$$

e) Sea A el conjunto de todos los chilenos y sea B el conjunto de enteros positivos menor que 100.000.000. Para $x \in A$ y $y \in B$ definimos

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } y \text{ es el número de carné de } x.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación de A en B . Los pares ordenados son de la forma:

$$(\text{ persona } , \text{ número de carné de la persona }),$$

$Dom(\mathcal{R}) = \{x : x \text{ es una persona que tiene un número de carné}\}$ y $Im(\mathcal{R}) = \{x : x \text{ es algún número de carné}\}$.

f) Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$. Entonces $\mathcal{R} = \{(3, 1), (3, 2)\}$, $\mathcal{S} = \emptyset$, $\mathcal{T} = A \times B$ son todas relaciones de A en B .

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{3\} , \text{Im}(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$$

$$\text{Dom}(\mathcal{S}) = \emptyset , \text{Im}(\mathcal{S}) = \emptyset$$

$$\text{Dom}(\mathcal{T}) = A , \text{Im}(\mathcal{T}) = B.$$

Note que las relaciones no necesariamente “tienen sentido”, o poseen una particular regla de formación.

g) Sean A, B conjuntos de proposiciones y para $p \in A, q \in B$ se define: $p\mathcal{R}q$ si y sólo si $p \longrightarrow q$ es una tautología. Entonces \mathcal{R} es una relación de A en B y un par ordenado $(p, q) \in \mathcal{R}$ si y sólo si q es una consecuencia lógica de p .

Ejercicio: Encuentre $\text{Im}(\mathcal{R})$.

h) Sea A el conjunto de todos los triángulos en el plano. Si $s, t \in A$ diremos que $s\mathcal{R}t$ si y sólo si s es similar (semejante) a t . Entonces \mathcal{R} es una relación en A y $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \text{Im}(\mathcal{R}) = A$ (Verificación: Ejercicio).

i) Para $x, y \in \mathbb{R}$ se define $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $x \leq y$. Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{R} con $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$.

j) Para $x, y \in \mathbb{Z}$ se define $x\mathcal{R}y$ si y sólo si x divide a y (lo cual se denota: $x|y$) y se define como:

$$x|y \longleftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} \ni y = xz.$$

Así: $3|6, 2|8, -3|6, 3|-9, 2|0$ y 2 no divide a 9 , que se escribe $2 \nmid 9$. Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{Z} , con $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}$ (ya que cada entero se divide a si mismo). Elementos típicos de \mathcal{R} son: $(1, 3), (7, 21), (1001, 1001), (-1, 3)$.

k) Para $x, y \in \mathbb{N}$ se define $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $5|(x - y)$. Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{N} con $Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = \mathbb{N}$ (Verificación: Ejercicio).

Existen ciertas propiedades que una relación puede o no poseer; algunas de las más importantes son las siguientes:

Definición 14 Sea \mathcal{R} una relación en el conjunto A . Diremos que:

- a) \mathcal{R} es reflexiva si y sólo si $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$.
- b) \mathcal{R} es simétrica si y sólo si $\forall a, b \in A, a\mathcal{R}b \longrightarrow b\mathcal{R}a$.
- c) \mathcal{R} es transitiva si y sólo si $\forall a, b, c \in A, (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \longrightarrow a\mathcal{R}c$.
- d) \mathcal{R} es antisimétrica si y sólo si $\forall a, b \in A, (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \longrightarrow a = b$.
- e) \mathcal{R} es irreflexiva si y sólo si $\forall a \in A, \neg(a\mathcal{R}a)$ (ó $a\not\mathcal{R}a$).
- f) \mathcal{R} es completa si y sólo si $\forall a, b \in A, a \neq b \longrightarrow (a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$.
- g) \mathcal{R} es asimétrica si y sólo si $\forall a, b \in A, a\mathcal{R}b \longrightarrow \neg(b\mathcal{R}a)$.
- h) \mathcal{R} es una relación de equivalencia si y sólo si \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.
- i) \mathcal{R} es un orden parcial si y sólo si \mathcal{R} es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
- j) \mathcal{R} es un orden parcial estricto si y sólo si \mathcal{R} es irreflexiva y transitiva.
- k) \mathcal{R} es un orden total si y sólo si \mathcal{R} es un orden parcial y completa.
- l) \mathcal{R} es un orden total estricto si y sólo si es un orden parcial estricto y completa.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$$

$$\mathcal{T} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Entonces:

\mathcal{R} no es reflexiva, no es simétrica, no es transitiva, es antisimétrica, es irreflexiva, no es completa, es asimétrica.

\mathcal{S} no es reflexiva, no es simétrica, es transitiva, no es antisimétrica, no es irreflexiva, no es completa, no es asimétrica.

\mathcal{T} es reflexiva, es simétrica, es transitiva, es antisimétrica, no es irreflexiva, no es completa, no es asimétrica.

Se puede también tener una idea gráfica de las propiedades anteriores. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces para que \mathcal{R} sea reflexiva, debe contener *al menos* la diagonal principal.

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)

1 2 3 4
A

Si \mathcal{R} es simétrica, entonces su gráfico debe ser simétrico con respecto a la diagonal principal: Así, si (2, 3) y (4, 2) son elementos de \mathcal{R} entonces (3, 2) y (2, 4) deben también estar en \mathcal{R} .

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)

1 2 3 4
A

Algunos de los ejemplos dados (a)-k)) también satisfacen algunas propiedades de la definición 16. Por ejemplo:

$=$: es una relación de equivalencia.

- \leq y \subseteq : son ordenes parciales.
- $<$ y \subset : son ordenes parciales estrictos.
- \leq : es un orden total.
- $<$: es un orden total estricto.

En general, podemos pensar en *relación de equivalencia* como una idea abstracta de igualdad y en *orden parcial* como una idea abstracta del concepto de orden en los números reales.

Definición 15 Sea \mathcal{R} una relación de A en B . La relación inversa, denotada \mathcal{R}^{-1} , es la relación de B en A dada por: $x\mathcal{R}^{-1}y$ si y sólo si $y\mathcal{R}x$. En símbolos:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\}.$$

Se observa que $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R})$ y $Im(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$.

Por ejemplo, si \mathcal{R} es la relación “padre” del ejemplo a), entonces \mathcal{R}^{-1} es la relación “hijo”: $x\mathcal{R}^{-1}y$ si y sólo si y es un hijo de x .

Otro ejemplo es el siguiente: Si \mathcal{R} es la relación en \mathbb{N} dada por $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $x < y$, entonces $x\mathcal{R}^{-1}y$ si y sólo si $y < x$.

Definición 16 Sea \mathcal{R} una relación de A en B y sea \mathcal{S} una relación de B en C . Entonces \mathcal{R} compuesta con \mathcal{S} , denotada $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, es la relación de A en C dada por

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) : \exists y \in B \ni [(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}]\}.$$

La razón de revertir el orden de \mathcal{S} y \mathcal{R} en la notación anterior tendrá sentido al trabajar con funciones posteriormente. Observe que, en efecto, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ es una relación de A en C pues si $(x, y) \in \mathcal{R}$ entonces $x \in A$ y, si $(y, z) \in \mathcal{S}$ entonces $z \in C$. Luego $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq A \times C$.

Como un ejemplo de compuestas de relaciones, sean

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c\}, C = \{4, 5, 6\}$$

y

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}, \mathcal{S} = \{(a, 5), (b, 4), (a, 6), (c, 6)\}.$$

Entonces nos preguntamos: ¿Qué segundas coordenadas de elementos de \mathcal{R} coinciden con primeras coordenadas de elementos de \mathcal{S} ? Esto producirá los elementos de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Por ejemplo, $(1, a) \in \mathcal{R}$ y $(a, 5) \in \mathcal{S}$ nos da $(1, 5) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Continuando, obtenemos:

$$(1, 4) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (1, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, 4) \in \mathcal{S}$$

$$(3, 5) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (3, a) \in \mathcal{R} \text{ y } (a, 5) \in \mathcal{S}$$

$$(1, 6) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (1, a) \in \mathcal{R} \text{ y } (a, 6) \in \mathcal{S}$$

$$(3, 6) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (3, a) \in \mathcal{R} \text{ y } (a, 6) \in \mathcal{S}$$

Así, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 5), (1, 4), (3, 5), (1, 6), (3, 6)\}$.

Definición 17 Sea A un conjunto. La relación identidad en A , denotada por I_A , es definida por

$$I_A = \{(x, x) : x \in A\}.$$

Así aI_Ab si y sólo si $a = b$.

Ejemplo Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y \mathcal{R} la relación en A dada por $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Entonces

a) $\mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

b) $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

c) $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$.

- d) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$.
- e) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$.
- f) $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1)\}$.
- g) $\mathcal{R} \circ I_A = I_A \circ \mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.
- h) $\mathcal{R}^{-1} \circ I_A = I_A \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

Una conclusión adicional que podemos obtener de este ejemplo es:

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \neq \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R},$$

luego la composición no es conmutativa.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ con

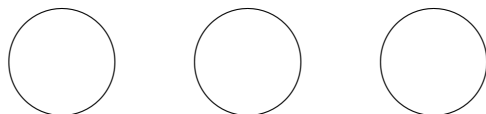
$$\mathcal{R} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 4)\}$$

una relación de A en B , y

$$\mathcal{S} = \{(4, 2), (4, 3), (6, 2)\}$$

una relación de B en C .

Lo anterior se puede mostrar con un diagrama:



Algunos cálculos muestran que:

- a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 2)\}$.
- b) $\mathcal{R}^{-1} = \{(4, 1), (5, 1), (6, 2), (4, 3)\}$.
- c) $\mathcal{S}^{-1} = \{(2, 4), (3, 4), (2, 6)\}$.
- d) $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$.
- e) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (2, 2)\}$.

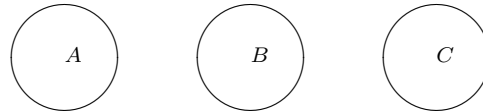
Se observa que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$ no están definidos y que $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$.

A fin de practicar un poco más con demostraciones, veremos que esta última igualdad es siempre verdadera.

Teorema 18 Sean A, B, C conjuntos; \mathcal{R} una relación de A en B y \mathcal{S} una relación de B en C . Entonces

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}.$$

Demostración. Es de ayuda considerar la siguiente figura para tener en mente los diferentes tipos de relaciones involucradas:



Primero, observamos que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ es una relación de C en A , de la misma forma que lo es $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$. Así, al menos hay una chance que sean iguales.

Recordando que las relaciones son conjuntos, para demostrar que son iguales debemos probar que los conjuntos son iguales.

Sea $(x, z) \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$. Entonces $(z, x) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Luego, existe $y \in B$ tal que $(z, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{S}$. Concluimos que $(y, z) \in \mathcal{R}^{-1}$ y $(x, y) \in \mathcal{S}^{-1}$. Por lo tanto $(x, z) \in \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$. Esto prueba que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} \subseteq \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.

Para probar la inclusión opuesta, sea $(x, z) \in \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$. Entonces existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in \mathcal{S}^{-1}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}^{-1}$. Luego $(y, x) \in \mathcal{S}$ y $(z, y) \in \mathcal{R}$. Por lo tanto $(z, x) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, de donde $(x, z) \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ como queríamos. ■

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{6, 7, 8\}$ y $D = \{1, 4, 6\}$.

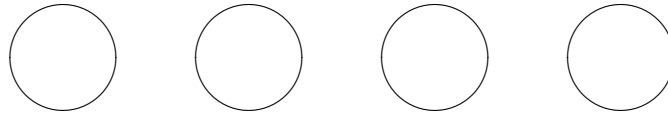
Definimos las siguientes relaciones

$$\mathcal{R} = \{(1, 4), (3, 5), (3, 6)\} \text{ relación de } A \text{ en } B$$

$$\mathcal{S} = \{(4, 6), (6, 8)\} \text{ relación de } B \text{ en } C$$

$$\mathcal{T} = \{(6, 1), (8, 6), (6, 4)\} \text{ relación de } C \text{ en } D.$$

Estas relaciones se ilustran en la siguiente figura:



Entonces podemos formar

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 6), (3, 8)\} \text{ una relación de } A \text{ en } C$$

y

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = \{(4, 1), (4, 4), (6, 6)\} \text{ una relación de } B \text{ en } D.$$

Ahora, las relaciones anteriores se pueden componer con \mathcal{T} y \mathcal{R} para obtener

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \{(1, 1), (1, 4), (3, 6)\} \text{ una relación de } A \text{ en } D$$

y

$$(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (3, 6)\} \text{ una relación de } A \text{ en } D.$$

Observemos que son iguales. Esto no es excepcional a este ejemplo. La propiedad se denomina: Composición de relaciones es asociativa. El resultado es como sigue:

Teorema 19 Sean A, B, C, D conjuntos y \mathcal{R} una relación de A en B , \mathcal{S} una relación de B en C y \mathcal{T} una relación de C en D . Entonces

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}.$$

Se deja la demostración del resultado anterior como un ejercicio, así como la del siguiente:

Teorema 20 *Sea \mathcal{R} una relación en A . Entonces \mathcal{R} es transitiva si y sólo si*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}.$$

0.4 Particiones y relaciones de equivalencia

Veamos con un poco más de detalle la relación de equivalencia del ejemplo siguiente: \mathcal{R} es una relación en \mathbb{N} dada por:

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } 5|(x - y) \quad (\longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 5k = x - y).$$

Si definimos

$$S_i = \{x : x\mathcal{R}i\}, i \in \mathbb{N},$$

se tiene

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x : x\mathcal{R}1\} = \{1, 6, 11, 16, \dots\} \\ S_2 &= \{x : x\mathcal{R}2\} = \{2, 7, 12, 17, \dots\} \\ S_3 &= \{x : x\mathcal{R}3\} = \{3, 8, 13, 18, \dots\} \\ S_4 &= \{x : x\mathcal{R}4\} = \{4, 9, 14, 19, \dots\} \\ S_5 &= \{x : x\mathcal{R}5\} = \{5, 10, 15, 20, \dots\} \\ S_6 &= \{x : x\mathcal{R}6\} = \{1, 6, 11, 16, \dots\} = S_1 \\ S_7 &= S_2, S_8 = S_3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Gráficamente

\mathbb{N}

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5

Hay varias cosas interesantes de observar.

En una primera impresión, se podría haber supuesto que los conjuntos S_i eran infinitos, pero sólo hay 5 de ellos.

También, la unión de estos conjuntos es \mathbb{N} ; esto es, dado cualquier elemento $y \in \mathbb{N}$, y es un elemento de estos cinco conjuntos. Más precisamente, *hay exactamente uno* de estos conjuntos que tiene “ y ” como un elemento.

Lo anterior significa también que, dados dos conjuntos S_i entonces ya sea son iguales o disjuntos.

Veremos que cada relación de equivalencia genera conjuntos con las propiedades anteriores. Para ello necesitaremos previamente de algunas definiciones.

Definición 21 *Sea A un conjunto no vacío. Una partición Π de A es una colección de subconjuntos no vacíos de A tales que cada elemento de A es un elemento de exactamente uno de estos conjuntos.*

Observe que si Π es una partición de A , entonces los elementos de Π son subconjuntos de A , que denominaremos *bloques* de Π . Se nota que si B y C son bloques de Π , entonces $B = C$ ó $B \cap C = \emptyset$. También, la unión de todos los elementos de Π es A .

Podemos pensar de una partición de un conjunto como en un “corte” del conjunto en pedazos disjuntos.

Ejemplos

a) Sea A un conjunto no vacío. Entonces $\Pi_1 = \{\{x\} : x \in A\}$ y $\Pi_2 = \{A\}$ son particiones de A . En cierto sentido, Π_1 es la partición “más fina” de A mientras que Π_2 es la partición “menos fina”.

b) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces $\Pi_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ y $\Pi_2 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ son particiones de A .

c) Con respecto a los conjuntos S_i de la introducción, se observa que $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ es una partición de \mathbb{N} .

Hay una interrelación muy estrecha entre particiones y relaciones de equivalencia. En efecto, dada una relación de equivalencia en un conjunto se puede generar una partición (Ejemplo de \mathbb{N} anteriormente) y dada una partición se puede generar una relación de equivalencia.

Para analizar lo anterior en detalle, requerimos la siguiente definición.

Definición 22 Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A . Sea $x \in A$. La clase de equivalencia de x módulo \mathcal{R} , denotada $[x]_{\mathcal{R}}$ (ó $x|\mathcal{R}$), es el conjunto de todos los elementos de A que están \mathcal{R} -relacionados a x . En símbolos:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : y\mathcal{R}x\}.$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia se denota $[A]_{\mathcal{R}}$ (ó $A|\mathcal{R}$) y se llama A módulo \mathcal{R} . En símbolos

$$[A]_{\mathcal{R}} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in A\}.$$

Con respecto al ejemplo de la introducción, tenemos:

$$\begin{aligned} [2]_{\mathcal{R}} &= S_2 = \{2, 7, 12, 17, \dots\} \\ [4]_{\mathcal{R}} &= [9]_{\mathcal{R}} = [14]_{\mathcal{R}} \\ [\mathbb{N}]_{\mathcal{R}} &= \{[1]_{\mathcal{R}}, [2]_{\mathcal{R}}, [3]_{\mathcal{R}}, [4]_{\mathcal{R}}, [5]_{\mathcal{R}}\} \\ &= \{[6]_{\mathcal{R}}, [12]_{\mathcal{R}}, [18]_{\mathcal{R}}, [9]_{\mathcal{R}}, [25]_{\mathcal{R}}\} \end{aligned}$$

Como otros ejemplos, sea A un conjunto no vacío y \mathcal{R} la relación de igualdad: $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $x = y$. Sea $\mathcal{S} = A \times A$ (también una relación de equivalencia). Entonces, para cada $x \in A$:

$$\begin{aligned} [x]_{\mathcal{R}} &= \{x\} \text{ y } [x]_{\mathcal{S}} = A \\ [A]_{\mathcal{R}} &= \{\{x\} : x \in A\} \text{ y } [A]_{\mathcal{S}} = \{A\}. \end{aligned}$$

Algunas propiedades generales de las clases de equivalencia se presentan en el siguiente resultado.

Teorema 23 *Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia en el conjunto no vacío A . Entonces*

- a) $\forall x \in A, [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
- b) $\forall x, y \in A, [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ si y sólo si $x\mathcal{R}y$.
- c) $\forall x, y \in A, [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$ si y sólo si $x\mathcal{R}y$.
- d) $\forall x, y \in A, [x]_{\mathcal{R}} \neq [y]_{\mathcal{R}}$ si y sólo si $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

Demostración.

a) Ya que \mathcal{R} es reflexivo, $x\mathcal{R}x \forall x \in A$. Luego, $x \in [x]_{\mathcal{R}}$ y, por lo tanto $\forall x \in A, [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

b) Suponga que x, y son elementos de A y que $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Sea $z \in [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}}$. Entonces $x\mathcal{R}z$ y $y\mathcal{R}z$. Ya que \mathcal{R} es simétrica, $z\mathcal{R}y$. Además \mathcal{R} es transitiva por lo que $x\mathcal{R}y$ como deseábamos.

Supongamos que $x\mathcal{R}y$. Entonces $y \in [x]_{\mathcal{R}}$. Pero $y \in [y]_{\mathcal{R}}$ también.

Luego, $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

c) Si $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$ entonces $y \in [x]_{\mathcal{R}}$, luego $x\mathcal{R}y$.

Supongamos ahora que $x\mathcal{R}y$ y sea $z \in [x]_{\mathcal{R}}$. Entonces $x\mathcal{R}z$. Por la simetría de \mathcal{R} se tiene $y\mathcal{R}x$. Luego, por transitividad, $y\mathcal{R}z$. Luego $z \in [y]_{\mathcal{R}}$. Esto prueba que $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$.

Se deja como ejercicio probar que $[y]_{\mathcal{R}} \subseteq [x]_{\mathcal{R}}$.

Finalmente, observe que d) se obtiene directamente de b) y c). ■

Teorema 24 *Sea A un conjunto no vacío y \mathcal{R} una relación de equivalencia en A . Entonces $[A]_{\mathcal{R}}$ es una partición de A .*

Demostración. Ejercicio.

Hemos visto que una relación de equivalencia induce una partición del conjunto. Este proceso también trabaja en reversa, esto es, una partición de un conjunto induce una relación de equivalencia en el conjunto.

Antes de probar lo anterior, daremos un nombre a dicha relación.

Definición 25 *Sea Π una partición de un conjunto A . Se define una relación $A|\Pi$ (“ A módulo Π ”) en A por: $(x, y) \in A|\Pi$ si y sólo si existe $B \in \Pi$ tal que $\{x, y\} \subseteq B$.*

En palabras: x está relacionado con y si y sólo si x e y son ambos elementos del mismo bloque de la partición.

Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\Pi_2 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, entonces

$$A|\Pi_2 = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}.$$

Teorema 26 *Sea Π una partición de un conjunto no vacío A . Entonces $A|\Pi$ es una relación de equivalencia en A .*

Demostración. Sea Π una partición de A . Por conveniencia, denotemos \mathcal{R} a $A|\Pi$. Debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

\mathcal{R} es reflexiva: Sea $x \in A$. Como x es un elemento de algún bloque de Π , se tiene $x\mathcal{R}x$. Luego, \mathcal{R} es reflexiva.

\mathcal{R} es simétrica: Si $x\mathcal{R}y$, donde x e y están en el mismo bloque de Π lo cual implica que $y\mathcal{R}x$. Así \mathcal{R} es simétrica.

\mathcal{R} es transitiva: Suponga que $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$. Entonces existen $B, C \in \Pi$ tales que $\{x, y\} \subseteq B$ y $\{y, z\} \subseteq C$. Ahora, $y \in B \cap C$, luego $B \cap C \neq \emptyset$. Por lo tanto, $B = C$. Así $\{x, z\} \subseteq B$ lo que dice que $x\mathcal{R}z$. Concluimos que \mathcal{R} es transitiva y luego una relación de equivalencia. ■

0.5 Funciones

Las funciones juegan un papel muy importante en matemática. Una precisa definición es la siguiente.

Definición 27 *Sea f una relación de A en B . Entonces f es una función de A en B (denotado $f : A \rightarrow B$ y se lee “ f es una función de A en B ”) si y sólo si*

$$a) \text{ Dom}(f) = A$$

$$b) \forall x \in A, \forall y, z \in B \quad [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f] \rightarrow y = z.$$

En palabras, lo anterior dice que si f es una relación de A en B tal que para cada $x \in A$ existe exactamente un $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, entonces f es una función.

La condición a) garantiza que para cada $x \in A$ existe *al menos* un tal “ y ” y la condición b) garantiza que hay *a lo más* uno. Así, tomados juntos, hay *exactamente uno*.

Si f es una función de A en B entonces la “propiedad funcional” de *cada* $x \in A$ relacionado a *exactamente un* $y \in B$ permite el uso de la notación funcional

$$y = f(x).$$

Como ejemplos de relaciones que son funciones y algunas que no lo son, consideremos los siguientes:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ f &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\} \\ g &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\} \\ h &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}. \end{aligned}$$

Entonces f , g y h son relaciones de A en B , pero sólo f es una función; g no es función ya que $(1, 2)$ y $(1, 3)$ son elementos de g . Tampoco h es una función ya que $Dom(h) = \{1, 2, 3\} \neq A$.

Observemos que f tiene una simple forma y puede ser descrita por una fórmula: $\forall x \in A, f(x) = x + 1$.

La mayoría de las funciones conocidas en cálculo son dadas por una fórmula. Sin embargo esto no es necesario y, en general en matemática, las funciones no están dadas por fórmulas.

Usaremos las siguientes notaciones y nombres cuando trabajemos con funciones.

Sea $f : A \rightarrow B$ y $(x, y) \in f$ entonces escribimos $y = f(x)$.

Observe que el nombre de la función es f y que $f(x)$ no es el nombre de la función sino un elemento de B .

Si $y = f(x)$ entonces decimos que y es *la imagen* de x y que x es *una preimagen* de y .

Observe que se usa “la” cuando se habla de imagen y se usa “una” cuando se habla de preimágenes ya que un elemento de B puede tener varios elementos de A relacionados.

Ya que f es una relación se puede hablar de su dominio e imagen, componer f con otras relaciones y analizar su inversa.

Note que aunque $Dom(f) = A$, no necesariamente es $Im(f) = B$. De esta manera es conveniente tener también un nombre para B . Usualmente se le denomina *codominio* de f .

Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y definamos $f : A \rightarrow B$ por $f(1) = b$, $f(2) = b$, $f(3) = a$, $f(4) = d$, $f(5) = a$. Gráficamente:



La imagen de 2 es b . Una preimágen de a es 5 (otra es 3). c no tiene preimágenes.

El siguiente resultado es útil para determinar cuando dos funciones son iguales.

Teorema 28 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$. Entonces $f = g$ si y sólo si $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Demostración. Primero, supongamos que $f = g$ y sea $z \in A$. Entonces $\exists y \in B \ni (z, y) \in f$. Ya que $f = g$, $(z, y) \in g$. Luego $y = g(z)$ y $y = f(z)$. Esto prueba que $g(z) = f(z)$.

Ahora supongamos que $\forall x \in A, f(x) = g(x)$. Ya que funciones son relaciones y relaciones son conjuntos de pares ordenados, para mostrar que $f = g$ se debe mostrar que ellos son iguales como conjuntos de pares ordenados. Con este fin, sea $(w, z) \in f$. Entonces $z = f(w) = g(w)$. Luego

$(w, z) \in g$ y se tiene $f \subseteq g$. Intercambiando los roles de f y g se puede mostrar que $g \subseteq f$ de lo cual se obtiene que $f = g$. ■

Existen ciertas propiedades que las funciones pueden o no tener. Si estas propiedades son usadas frecuentemente entonces requieren nombres. Algunos de estos son dados en la siguiente definición.

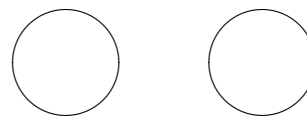
Definición 29 Sea $f : A \rightarrow B$. Entonces:

- a) Se dice que f es uno a uno (o f es inyectiva) si y sólo si $\forall w, z \in A$, $f(w) = f(z)$ implica $w = z$.
- b) Se dice que f es sobre (o f es sobreyectiva) si y sólo si $Im(f) = B$.
- c) Se dice que f es biyectiva (o biunivoca) si y sólo si f es a la vez uno a uno y sobre.

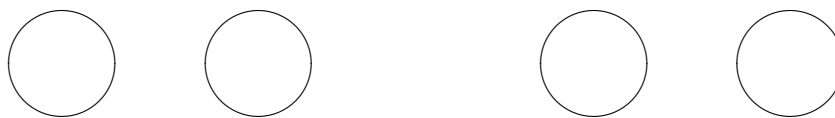
Las siguientes figuras ilustran varias posibilidades.



Sobreyectiva pero no 1-1



1-1 pero no sobre



No es sobre y no es 1-1

1-1 y sobre

Recordemos que ya que funciones son relaciones, ellas tienen inversas que son relaciones. Así, podemos hablar de la inversa de cualquier función, pero no hay razón para esperar que esta inversa sea también una función.

En este sentido las funciones biyectivas son importantes, ya que ellas son exactamente aquellas funciones cuyas inversas son también funciones.

Teorema 30 Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ es una función si y sólo si f es biyectiva.

Demostración. Primero, supongamos que f^{-1} es una función de B en A . Debemos mostrar que f es 1-1 y sobre.

Supongamos que $f(x) = f(y) = z$. Esto significa que $(x, z) \in f$ y $(y, z) \in f$. Entonces $f^{-1}(z) = x$ y $f^{-1}(z) = y$. Pero f^{-1} es una función, luego $x = y$. Esto muestra que f es 1-1.

Para mostrar que f es sobre, sea $y \in B$. Ya que $Dom(f^{-1}) = B$, existe un $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$. Luego $(y, x) \in f^{-1}$, lo cual implica que $(x, y) \in f$.

Así, $y \in Im(f)$. Esto prueba que $B \subseteq Im(f)$. Ya que es evidente que $Im(f) \subseteq B$ se tiene mostrado que $Im(f) = B$.

Ahora supongamos que f es 1-1 y sobre. Se debe mostrar que f^{-1} es una función de B en A ; esto es, se debe mostrar que $Dom(f^{-1}) = B$ y que si $(y, x) \in f^{-1}$ y $(y, z) \in f^{-1}$ entonces $x = z$.

Primero, sea $y \in B$. Entonces ya que f es sobre, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$ ó $(x, y) \in f$. Así $(y, x) \in f^{-1}$ y luego $x \in Dom(f^{-1})$. Esto prueba que $B = Dom(f^{-1})$.

Ahora, supongamos que $(y, x) \in f^{-1}$ y $(y, z) \in f^{-1}$. Entonces $f(x) = y$ y $f(z) = y$. Pero f es 1-1, luego lo anterior implica que $x = z$. Luego f^{-1} es una función. ■

Se observa que el hecho que f es 1-1 implica que f^{-1} tiene la propiedad de función y que f^{-1} sobre implica que $Dom(f^{-1}) = B$.

Así, si $f : A \rightarrow B$ es tal que f es 1-1 pero no sobre B , entonces f^{-1} es una función de $Im(f)$ en A pero no es una función de B en A .

Se deja como un ejercicio mostrar que la composición de funciones es también una función.

Si $f : A \rightarrow B$ y $G : B \rightarrow C$ entonces $(g \circ f) : A \rightarrow C$ denota la

composición de f y g .

Si $(g \circ f)(x) = z$, entonces $(x, z) \in (g \circ f)$, lo cual significa que existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ y $(y, z) \in g$. Luego, $f(x) = y$ y $g(y) = z$. Por lo tanto, $z = g(y) = g(f(x))$ ó

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

que es la notación usual.

Ya que funciones son relaciones se pueden componer y, en consecuencia, los resultados para relaciones valen para funciones. Así, si f, g son funciones con dominios e imágenes apropiadas, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

aunque $(g \circ f)^{-1}$, f^{-1} y g^{-1} pueden no ser funciones.

El teorema 32 nos dice que si f, g son biyectivas entonces f^{-1} y g^{-1} serán funciones.

Teorema 31 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ biyectivas. Entonces $(g \circ f) : A \rightarrow C$ es biyectiva.

Demostración. Debemos probar que $(g \circ f) : A \rightarrow C$ es biyectiva.

Primero, supongamos que existen $x, y \in A$ tales que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Entonces $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g es 1-1, $f(x) = f(y)$. Ahora, como f es 1-1, $x = y$. Luego, $g \circ f$ es 1-1.

Segundo, para demostrar que $g \circ f$ es sobre, sea $z \in C$. Ya que g es sobre, existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Pero f también es sobre, luego existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto, $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Así, $g \circ f$ es sobre. ■

La demostración anterior es típica para mostrar que una cierta función es biyectiva. Sin embargo hay otras alternativas.

Sea $f : A \rightarrow B$. Una demostración *directa* para probar que f es 1-1 podría tomar la siguiente forma: Sean $x, y \in A$ con $f(x) = f(y)$.

⋮

“Alguna cosa u otra dependiente de f ”

⋮

Así $x = y$ y f es 1-1.

Una demostración *contrapositiva* debería ser de la forma: Sean $x, y \in A$, con $x \neq y$.

⋮

“Alguna cosa dependiendo de f ”

⋮

Así $f(x) \neq f(y)$ y f es 1-1.

Una demostración *directa* para mostrar que f es sobre, podría ser: Sea $y \in B$

⋮

“Algo dependiente de f ”

⋮

Así, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Luego f es sobre.

En resumen: Para mostrar que f es 1-1 se debe probar que distintos elementos en el dominio tienen distintas imágenes y para mostrar que f es sobre se debe probar que cada elemento de B tiene una preimagen.

Ejemplo: Demostremos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es biyectiva.

Primero una prueba directa que f es 1-1.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $f(x) = f(y)$. Entonces $ax + b = ay + b$, lo cual implica que $ax = ay$. Ya que $a \neq 0$, se tiene $x = y$ y por lo tanto f es 1-1.

Una prueba contrapositiva podría ser: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$. Entonces ya que $a \neq 0$, $ax \neq ay$. Luego se tiene $ax + b \neq ay + b$ y así $f(x) \neq f(y)$.

Para mostrar que f es sobre, sea $z \in \mathbb{R}$. Entonces $\frac{z-b}{a}$ es también un elemento de \mathbb{R} (ya que $a \neq 0$) y

$$f\left(\frac{z-b}{a}\right) = a\left(\frac{z-b}{a}\right) + b = z - b + b = z.$$

Luego f es sobreyectiva.

Observe que la elección de $\frac{z-b}{a}$ fué el resultado de resolver la ecuación $f(x) = ax + b = z$ para x .

Teorema 32 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ biyectivas. Entonces $(g \circ f)^{-1} : C \rightarrow A$ y $\forall x \in C$,

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)).$$

La demostración queda como ejercicio. Sin embargo note que la mayor parte ya fué mostrada previamente.

Observemos que la relación identidad en A , I_A , es una función de A en A que llamaremos *función identidad*. Usando una notación funcional: $I_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

La razón del nombre anterior se aclara en el siguiente resultado.

Teorema 33 Sea $f : A \rightarrow B$. Entonces

a) $f \circ I_A = f$.

b) $I_B \circ f = f$.

c) Si f es biyectiva entonces $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$ (ó $\forall x \in A$, $f^{-1}(f(x)) = x$ y $\forall x \in B$, $f(f^{-1}(x)) = x$).

Demostración.

a) y b) son fáciles de probar, pues si $x \in A$, entonces

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

y

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x).$$

Para mostrar c), observemos primero que como f es biyectiva, f^{-1} es una función, de modo que $f(x) = y$ si y sólo si $f^{-1}(y) = x$.

Ahora, sea $x \in A$ y sea $y = f(x)$. Entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_A(x).$$

Análogamente, sea $x \in B$ y sea $f^{-1}(x) = y$. Entonces

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(y) = x = I_B(x).$$

■

Se puede extender la idea de función en una manera natural desde elementos individuales del dominio a subconjuntos del dominio. Esto es, $f : A \rightarrow B$ puede ser extendido a $f : \mathbb{P}(A) \rightarrow \mathbb{P}(B)$.

Definición 34 Sea $f : A \rightarrow B$. Si $C \subseteq A$ entonces se define

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

Si $D \subseteq B$ entonces

$$f^{-1}(D) = \{x : f(x) \in D\}.$$

$f(C)$ se llama la imagen de C y $f^{-1}(D)$ la preimagen de D .

Ejemplo: Sea $f : A \rightarrow B$ donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y f es dada por $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5$, $f(4) = 5$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\{1, 3\}) &= \{1, 5\} \text{ , } f(\{1, 2\}) = \{1\} \text{ ,} \\ f^{-1}(\{1\}) &= \{1, 2\} \text{ , } f^{-1}(\{4\}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Teorema 35 Sea $f : A \rightarrow B$ y sean $C \subseteq D \subseteq B$. Entonces

$$f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D).$$

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(C)$. Entonces $x \in A$ y $f(x) \in C$. Ya que $C \subseteq D$, $f(x) \in D$. Pero esto dice que $x \in f^{-1}(D)$. ■

Observemos que nuestras familiares operaciones aritméticas ($+$, $-$, \cdot , \div) son funciones, como también lo son los conectivos lógicos (\vee , \wedge , \longrightarrow , \longleftrightarrow) y las operaciones entre conjuntos (\cap , \cup , \setminus). Hay un nombre especial para funciones de esta clase.

Definición 36 Sea A un conjunto. $*$ se llama una operación binaria en A si y sólo si $*$: $A \times A \rightarrow A$ es una función.

Se observa que una operación binaria en A asocia a cada par de elementos de A otro elemento de A . Debido a esto, en este caso nos apartamos de nuestra notación usual y escribimos

$$a * b = c \text{ en vez de } *((a, b)) = c.$$

Por ejemplo, con $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (suma de números reales) se escribe $2+3 = 5$ en vez de $+((2, 3)) = 5$.

Hay varias propiedades que una operación binaria puede o no poseer.

Definición 37 Sea $*$ una operación binaria en un conjunto A . Entonces:

a) Se dice que $*$ es conmutativa si y sólo si $\forall a, b \in A$,

$$a * b = b * a.$$

b) Se dice que $*$ es asociativa si y sólo si $\forall a, b, c \in A$,

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

c) Se dice que $e \in A$ es una identidad para $*$ si y sólo si $\forall a \in A$, $a * e = e * a = a$.

d) Si e es una identidad para $*$ y $x \in A$ se dice que x es invertible si y sólo si $\exists y \in A \ni x * y = y * x = e$. El elemento “ y ” es llamado una inversa de x .

e) Se dice que $a \in A$ es idempotente para $*$ si y sólo si $a * a = a$.

Ejemplos:

a) $+$ en \mathbb{R} es conmutativo, asociativo, tiene 0 como una identidad y cada elemento es invertible (el inverso de x es $-x$). El único elemento idempotente es 0.

b) $-$ en \mathbb{R} no es conmutativo, no es asociativo, no tiene elemento identidad y el único elemento idempotente es 0.

c) \cup en $\mathbb{P}(A)$, para algún conjunto A . Esta operación es conmutativa, asociativa, \emptyset es una identidad y cada elemento es idempotente.

Algunos resultados sobre operaciones binarias son los siguientes.

Teorema 38 *Sea $*$ una operación binaria en A . Entonces existe a lo más una identidad para $*$.*

Demostración. Supongamos que e y e' son identidades para $*$. Entonces,

$$e = e * e' = e'.$$

(Observe que la primera igualdad es verdadera pues e' es una identidad y la segunda es válida pues e es una identidad). Concluimos que $e = e'$ y luego $*$ tiene a lo más una identidad. ■

Teorema 39 *Si $*$ es una operación binaria asociativa con identidad e en A y $x \in A$, entonces x tiene a lo más una inversa.*

Demostración. Suponga que $x \in A$ tiene y e y' como inversas. Entonces $x * y = y * x = e$ y $x * y' = y' * x = e$. Luego

$$y = y * e = y * (x * y') = (y * x) * y' = e * y' = y'.$$

■

En virtud de los teoremas anteriores podemos hablar de *la* identidad y *el* inverso de un elemento (si existe).

0.6 Ejercicios

1. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x : (x - 2)^2(x - 3) = 0\}$ y $C = \{x : x \text{ es impar}\}$. Hallar

a) $A \cup B$ b) $A \cap (B \cup C)$ c) $C - A$ d) $C \cup A^c$
e) $(A \cup C)^c$ f) $A^c \cap C^c$ g) $\mathbb{P}(B)$

2. Sean A , B , C conjuntos y U el conjunto universal. Demuestre las siguientes propiedades

a) $A \cup \emptyset = A$ b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
c) $A - \emptyset = A$ d) $A \cup U = U$
e) $A \cap U = A$ f) $A \cup A^c = U$
g) $A \cap A^c = \emptyset$ h) $A - A = \emptyset$
i) $A - B \subseteq A$ j) $A \cap B \subseteq A$
k) $A \cup B \supseteq A$ l) $A \cap B \subseteq A \cup B$
m) $(A^c)^c = A$ n) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
o) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ p) $A \cup (B - A) = A \cup B$
q) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
r) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
s) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
t) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Sean A , B conjuntos. Considere las conjeturas siguientes. Demuestre que son verdaderas ó bien de un contraejemplo para mostrar que son falsas.

a) $\mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B) \subseteq \mathbb{P}(A \cup B)$

- b) $\mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B) \subseteq \mathbb{P}(A \cap B)$
- c) $\mathbb{P}(A \cup B) \subseteq \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$
- d) $\mathbb{P}(A \cap B) \subseteq \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$
- e) $\mathbb{P}(A \cap B) \subseteq \mathbb{P}(A \cup B)$.
4. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{4, 5, 6\}$.
- a) Dé la lista de los elementos de $A \times B$, $B \times A$, $A \times C$.
- b) Dé ejemplos de relaciones de A en B y de B en A , con 4 elementos cada una.
5. Sean A, B, C, D conjuntos. Demuestre o de contraejemplos para las siguientes conjeturas.
- a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- c) $(A \times B) \cap (A^c \times B) = \emptyset$
- d) $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \longrightarrow A \times C \subseteq B \times D$
- e) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$
- f) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$
- g) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
- h) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$
6. Sean A, B conjuntos y \mathcal{R}, \mathcal{S} relaciones de A en B . Demuestre:
- a) $Dom(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = Dom(\mathcal{R}) \cup Dom(\mathcal{S})$
- b) $Dom(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq Dom(\mathcal{R}) \cap Dom(\mathcal{S})$
- c) $Im(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = Im(\mathcal{R}) \cup Im(\mathcal{S})$
- d) $Im(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq Im(\mathcal{R}) \cap Im(\mathcal{S})$

7. Se define el par ordenado (a, b) por: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Demuestre que con la definición anterior se tiene:

$$(a, b) = (c, d) \longleftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

8. Sean $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$. Sean $R = \{(1, 3), (1, 4), (4, 4)\}$ una relación de A en B , $S = \{(1, 1), (3, 4), (3, 2)\}$ una relación de B en A y $T = \emptyset$ una relación de A en B . Encuentre:

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---------------|
| a) $Dom(R)$ | b) $Dom(S)$ | c) $Dom(T)$. |
| d) $Im(R)$ | e) $Im(S)$ | f) $Im(T)$. |
| g) $S \circ R$ | h) $R \circ S$. | |
| i) $Dom(S \circ R)$ | j) $Im(S \circ R)$. | |
| k) $Dom(R \circ S)$ | l) $Im(R \circ S)$. | |
| m) R^{-1} | n) S^{-1} . | |
| o) I_A | p) I_B . | |
| q) $R^{-1} \circ S^{-1}$ | r) $S^{-1} \circ R^{-1}$. | |
| s) $(R \circ S)^{-1}$ | t) $(S \circ R)^{-1}$. | |
| u) T^{-1} | v) I_B^{-1} . | |
| w) $(R \circ S) \circ R$ | x) $R \circ (S \circ R)$. | |

9. Sean R una relación de A en B y S una relación de B en C . Muestre que:

- $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$.
- $Im(S \circ R) \subseteq Im(S)$.
- $Im(R) \subseteq Dom(S)$ implica $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$.

10. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\Pi = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 5\}, \{3\}\}$. Liste los elementos de $A|\Pi$. Encuentre $[2]_{A|\Pi}$.

11. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $f : A \rightarrow A$ una función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ si } x \neq 6; \\ 1 & , \text{ si } x = 6. \end{cases}$$

- Encuentre $f(3)$, $f(6)$, $f \circ f(3)$, $f(f(2))$.
- Encuentre una preimagen de 2 y de 1.
- Muestre que f es inyectiva.

12. Muestre que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es 1-1 y sobre mientras que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$ no es 1-1 ni es sobre.

13. Sean A , B y $f : A \rightarrow B$ tales que

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$f = \{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Encuentre $f^{-1} \circ f$.

14. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $f : A \rightarrow B$ dada por

$$f(1) = f(4) = f(6) = 3 ; f(2) = 5 \text{ y } f(3) = f(5) = 4.$$

Encuentre:

- $f(\{1, 2, 3\})$, $f(A - \{2\})$, $f(A) - \{2\}$.
- $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{4, 5\})$, $f^{-1}(\{2\})$.
- $f(\{1, 2\} \cap \{2, 6\})$, $f(\{1, 2\}) \cap f(\{2, 6\})$.