Elementos de Álgebra

Lógica, Conjuntos, Relaciones, Funciones

y algo más...

Dr. Carlos Lizama

Departamento de Matemática y C.C.

Facultad de Ciencias

Universidad de Santiago de Chile

Prefacio

Este texto de estudio está dirigido a estudiantes de primer ciclo de enseñanza en la Universidad de Santiago de Chile. En él se abordan los aspectos básicos de matemática, como son sus fundamentos axiomáticos a partir de la lógica y la teoría de conjuntos. Se han escrito los primeros capítulos de este libro en la convicción que una buena base formativa en el primer año de enseñanza universitaria son fundamentales para el buen avance y progreso del estudiante en su trayecto en la universidad. De esta manera se aborda desde un principio la idea de la demostración o prueba matemática pero de una manera simple y gradual, avanzando hacia formas más abstractas hacia el final del segundo capítulo. En el tercer capítulo se aborda un clásico tema: Inducción Matemática. Se espera que con una buena comprensión y ejercitación de los contenidos previos, el estudiante pueda abordar este tópico con menor grado de dificultad que el que tradicionalmente ocurre.

Los capítulos siguientes son una elección arbitraria del autor. Se pretende cubrir materias que requieren de un manejo fluido y que son el mínimo necesario para tratar de asegurar el éxito posterior del estudiante. Es común encontrar jóvenes con falencias cuya causal es motivo de discusión y preocupación en diversos estamentos. Sin embargo el objetivo aquí es ocuparse del problema, e intentar dar los elementos para resolverlo. Para ello, el cuarto y quinto capítulos comienzan abordando conceptos básicos de geometría analítica. La idea de gráfico, recta y funciones cuadráticas son cubiertos con gran detalle. El sexto capítulo cubre el material de función exponencial y logaritmo. Es común encontrar fallas en el estudiante cuando ocupa propiedades básicas de estas funciones que son fundamentales en álgebra y cálculo avanzado. Sin embargo un adecuado estudio mediante la visualización gráfica y, a partir de ello, el estudio de sus principales propiedades subsana notablemente el problema. Finalmente, el séptimo capítulo introduce la noción de sistemas de ecuaciones y matrices, a fin de preparar el camino para un curso posterior sobre teoría de matrices y álgebra lineal.

No es fácil escribir un texto de matemática a nivel elemental cuando ya se han escrito muchos y de muy buena calidad. Es factible, sin embargo, reorganizar el material ya existente en un texto que esté orientado a las condiciones particulares de los estudiantes de una universidad o de un programa particular. Esto es precisamente lo que se ha pretendido hacer de estos apuntes.

El autor agradece desde ya a aquellos lectores que puedan contribuir a la mejoría de estos apuntes y a la enseñanza de la matemática mediante sus opiniones y sugerencias.

Especiales agradecimientos a Maricel Cáceres, quien escribió en Latex, en tiempo récord y con mucha dedicación y paciencia el material de este texto.

Dr. Carlos Lizama

Santiago, 2002.

Índice General

Capítulo 1

Lógica

1.1 Tablas de verdad

La construcción de la lógica se realiza mediante *proposiciones.* Una proposición es una sentencia declarativa la cual puede ser verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo, por ejemplo, "2 es mayor que 3"y "todos los triángulos equiláteros son equiangulares"son proposiciones, mientras que "$x < 3$"y "esta afirmación es falsa"no lo son (la primera de estas es una sentencia declarativa pero no se le puede asignar un valor de verdad hasta que se conozca lo que "x"representa; por otro lado, no es posible asignarle un valor verdad a la segunda).

Denotaremos las proposiciones por letras minúsculas : p, q, r, s, etc. En cualquier discusión dada, diferentes letras pueden o no representar diferentes proposiciones, pero una letra que aparezca más de una vez en una discusión representa siempre la misma proposición. A una proposición verdadera co - responde el valor de verdad V (verdadero) y a una proposición falsa un valor de verdad F (falso). Así, "$2 + 3 < 7$"tiene un valor de verdad V, mientras que "$2 + 3 = 7$"tiene un valor de verdad F.

Nos interesa combinar proposiciones simples (o subproposiciones) para construir proposiciones más complicadas (o proposiciones compuestas). Se combinan proposiciones con *conectivos* que, entre otros, son " y ", " o "e " implica ".

Si p, q son dos proposiciones, entonces "p y q"es también una proposición llamada la *conjunción* de p y q, y denotada por

$$p \wedge q.$$

El valor de verdad de $p \wedge q$ depende de los valores de verdad de las proposiciones p y q : $p \wedge q$ es verdadera cuando p y q son ambas verdaderas, de otra manera es falsa. Notar que este es el significado usual que se asigna a "y"

Una manera conveniente de describir lo anterior es por una *tabla de verdad*. Como cada una de las proposiciones p, q tiene dos valores posibles de verdad, juntas ellas tienen $2 \times 2 = 4$ posibles valores de verdad de manera que la siguiente tabla combina todas las posibilidades :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla anterior se considera también como la definición del conectivo $\wedge$.

Notar que la tabla anterior no tiene nada que ver con p y q; estos últimos son sólo variables, en la misma forma que tiene el rol de x en la notación funcional $f(x) = 2x - 3$.

Para mejor comprensión de este punto se propone el siguiente :

Ejercicio : Se define el conectivo $\star$ como $p \star q$ es verdadero sólo cuando q es verdadero y p es falso, y es falso de otra forma.

a) Escribir la tabla de verdad de $p \star q$.

b) Escribir la tabla de verdad de $q \star p$.

Otro conectivo común es "o", llamado también *disjunción*. La disjunción de p y q denotada por

$$p \vee q,$$

es verdadera cuando *al menos uno* de p, q es verdadero. Este es llamado el "o inclusivo ". Observemos que en la conversación habitual se usa a menudo "o"en el sentido exclusivo, esto es, válido sólo cuando *exactamente una* de las subproposiciones es verdadera. Por ejemplo, la verdad de "cuando me llames estaré en el dormitorio o paseando al perro"no incluye usualmente ambas posibilidades. En matemática se usa siempre el "o"en el sentido inclusivo y su tabla de verdad es la siguiente :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dada cualquier proposición p, se puede formar una nueva proposición con el valor de verdad opuesto, llamado la *negación* de p, que se denota por

$$\neg p.$$

También se lee :"no p". La tabla de verdad es

p	$\neg\, p$
V	F
F	V

Ejemplos

a) $3 + 5 > 7$.

b) No es el caso que $3 + 5 > 7$.

c) $3 + 5 \leq 7$.

d) $x^2 - 3x + 2 = 0$ no es una ecuación cuadrática.

e) No es verdad que $x^2 - 3x + 2 = 0$ no es una ecuación cuadrática.

f) $x^2 - 3x + 2 = 0$ es una ecuación cuadrática.

Observemos que (b) y (c) son negaciones de (a); (e) y (f) son negaciones de (d). Sin embargo, (c) y (f) se prefieren sobre (b) y (e) respectivamente.

Se usará la misma convención para $\neg$ que como para $-$ en álgebra, esto es, se aplica sólo al símbolo siguiente, que en nuestro caso representa una proposición. Así $\neg p \vee q$ significa $(\neg p) \vee q$ en vez de $\neg(p \vee q)$, tal como $-3+4$ representa 1 y no -7.

La convención anterior no es siempre fácil de entender en el lenguaje habitual. Supongamos que p representa "$2+2=4$"y q representa "$3+2<4$ ". Entonces "No es el caso que $2+2=4$ ó $3+2<4$"¿significa $\neg(p \vee q)$ o $(\neg p) \vee q$?

Si adoptamos la primera forma entonces ¿Cómo escribimos la segunda en palabras? Adoptaremos la siguiente convención: la frase "no es el caso que "(o cualquier otra similar como "es falso que") se aplica a todo lo que sigue, salvo por algún tipo de puntuación gramatical. Así " no es el caso que $2+2=4$ ó $3+2<4$"significa $\neg(p \vee q)$, mientras que "no es el caso que $2+2=4$, o $3+2<4$"significa $\neg p \vee q$.

Las tablas de verdad se pueden utilizar para expresar los posibles valores de verdad de proposiciones compuestas. Por ejemplo, construyamos la tabla de verdad para $\neg(p \vee \neg q)$:

p	q	$\neg\ q$	$p\vee\neg\ q$	$\neg(p\vee\neg\ q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

Ejercicio : Construir las tablas de verdad para

a) $\neg p \vee q$.

b) $\neg p \wedge p$.

c) $(\neg p \vee q) \wedge r$.

d) $\neg(p \wedge q)$.

e) $\neg p \wedge \neg q$.

f) $\neg p \vee \neg q$.

g) $p \vee \neg p$.

h) $\neg(\neg p)$.

1.2 Implicación y Bicondicional

Si escribimos las tablas de verdad de $\neg(p\wedge q)$ y $\neg p\vee\neg q$ (Ejercicio (d) y (f) de la sección anterior) y las comparamos, notaremos que estas dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad de manera que, en algún sentido, son lo mismo. Este es un concepto importante que requiere una definición.

Definición 1 *Suponga que dos proposiciones p, q tienen la misma tabla de verdad. Entonces diremos que p y q son lógicamente equivalentes, lo cual se denotará*

$$p \Longleftrightarrow q.$$

Básicamente, cuando dos proposiciones son lógicamente equivalentes ellas tienen la misma forma, y se puede sustituir una por la otra en cualquier otra proposición o teorema. Es importante notar que es la *forma* y no el valor de verdad de una proposición lo que determina si ella es (o no es) lógicamente equivalente a otra proposición. Por ejemplo, "$2+2=4$"y "$7-5=2$"son ambas proposiciones verdaderas pero *no son* lógicamente equivalentes ya que ellas tienen diferentes tablas de verdad (si se representa la primera por p entonces la otra necesita tener otro símbolo, digamos q, y sabemos que estas no tienen la misma tabla de verdad). Por otra parte, "$2+3=5$ ó $3-4=2$"y "$3-4=2$ ó $2+3=5$" *son* lógicamente equivalentes. Para comprobar esto, sea p que represente "$3-4=2$"y q represente "$2+3=5$". Entonces la primera es de la forma $q \vee p$ y la segunda es de la forma $p \vee q$. Si construimos la tabla de verdad comprobamos que ambas son iguales (Ejercicio).

Usando la idea anterior de equivalencia lógica se puede establecer la relación entre negación, conjunción y disjunción, llamado *Leyes de De Morgan* : Sean p, q proposiciones. Entonces

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

La segunda de ellas se verificó en ejercicio (d) y (f) de la sección anterior. La primera se deja como ejercicio.

Una de las formas proposicionales más importantes en matemática es la implicación, llamado también *condicional.* En efecto, todos los teoremas en matemática tienen la forma de una implicación : Si "hipótesis"entonces "conclusión".

La forma general de una implicación es "si p entonces q", donde p, q son proposiciones. Se denota lo anterior como

$$p \longrightarrow q.$$

En el condicional $p \longrightarrow q$, p se llama la *premisa* (o hipótesis, o antecedente) y q se llama la *conclusión* (o consecuencia, o consecuente). La tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ es

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si pensamos sobre el sentido usual que le damos a *implica*, coincidiremos en que las dos primeras lineas de la tabla anterior corresponde al sentido común, pero las dos últimas no lo son. Naturalmente, esto es propio de una *definición*, sin embargo es interesante observar que la definición anterior también coincide con el sentido común en al menos un ejemplo.

Para este fin consideremos la "parábola del cliente insatisfecho". Supongamos que hemos comprado un detergente llamado *Omo* , después de escuchar un anuncio publicitario que dice "Si usted usa *Omo* entonces su lavado será blanco". ¿Bajo que circunstancias nos quejaríamos con el fabricante? Ciertamente no lo haríamos si no usamos *Omo* (el anuncio publicitario no dice nada de lo que sucederá si, por ejemplo, usamos *Drive*). Tampoco nos quejaríamos si usamos *Omo* y nuestro lavado resulta blanco. De esta manera, sólo podemos quejarnos si usamos *Omo* y nuestro lavado no resulta blanco (como promete el anuncio).

Usando nuestra notación proposicional denotemos por p "usamos *Omo*"y por q "nuestro lavado es blanco". Entonces la promesa del anuncio publicitario es

$$p \longrightarrow q$$

y nos quejaremos (esto es, la promesa es falsa) sólo cuando

$$p \wedge \neg q$$

es verdadera. Así, $p \wedge \neg q$ debería ser lógicamente equivalente a $\neg(p \longrightarrow q)$. Escribiendo la tabla de verdad de $p \wedge \neg q$ obtenemos

p	q	$p \wedge \neg\ q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Como la tabla anterior es lógicamente equivalente a la negación de $p \longrightarrow q$, la tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ debería ser la negación de ésta (chequee esto observando la tabla de $p \longrightarrow q$). De esta forma nuestra definición lógica de implicación coincide con nuestro sentido común (al menos en lo que a lavado se refiere).

Notemos que el único caso en el cual $p \longrightarrow q$ es falso es cuando p es verdadera y q es falsa; esto es, cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa. Así, las siguientes implicaciones son todas verdaderas.

a) Si $2 + 2 = 4$ entonces $1 + 1 = 2$.

b) Si $2 + 3 = 4$ entonces $1 + 1 = 5$.

c) Si verde es rojo entonces la luna está hecha de queso.

d) Si verde es rojo entonces la luna no está hecha de queso.

e) $7 < 2$ si $2 < 1$.

Observando la tabla de verdad debe notarse que si una implicación ($p \longrightarrow q$) es verdadera entonces su conclusión (q) puede ser verdadera o falsa (Ejemplos a) y b)):

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sin embargo, si una implicación es verdadera *y* la hipótesis es verdadera entonces la conclusión *debe* ser verdadera (línea 1 de la tabla anterior). Esta es la forma básica de un teorema en matemática : Si se conoce que un teorema (una implicación) es correcto (verdadero) y la hipótesis del teorema es verdadera entonces podemos tomar la conclusión del teorema como verdadera.

Existen varias formas de establecer el condicional en palabras. Las siguientes son todas equivalentes :

a) Si p entonces q.

b) p implica q.

c) p es más fuerte que q.

d) q es más débil que p.

e) p sólo si q.

f) q si p.

g) p es suficiente para q.

h) q es necesario para p.

i) Una condición necesaria para p es q.

j) Una condición suficiente para q es p .

La mayoría de las veces usamos las dos primeras, pero es importante familiarizarse con el resto.

Si observamos la tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ se nota que no es simétrica con respecto a p y q; esto es, la tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ no es lo mismo que la tabla de verdad de $q \longrightarrow p$. En otras palabras, estas dos proposiciones *no son* lógicamente equivalentes de manera que no podemos sustituir una por la

otra. Debido a esta pérdida de simetría es conveniente hacer las siguientes definiciones:
Dada una implicación $p \longrightarrow q$:

$$q \longrightarrow p \quad \text{se llama la } \textit{recíproca},$$

$$\neg p \longrightarrow \neg q \quad \text{se llama la } \textit{inversa},$$

$$\neg q \longrightarrow \neg p \quad \text{se llama la } \textit{contrapositiva} \text{ .}$$

Nótese que la contrapositiva es lo mismo que la implicación. No así la inversa.

Uno de los errores lógicos más comunes es el de confundir una implicación con su inversa. Por ejemplo si nos dicen "Si usa *Omo* entonces su lavado será blanco"(lo cual puede ser cierto) uno podría creer que si no usamos *Omo* entonces nuestro lavado no será blanco. Pero esto es la inversa de la afirmación original.

Sin embargo, una implicación y su contrapositiva *son* lógicamente equivalentes y se pueden usar indistintamente. En este caso, esto significa que si nuestro lavado no es blanco entonces no usamos *Omo* (forma equivalente del aviso publicitario).

El último conectivo que trataremos será el *bicondicional.* Si p, q son dos proposiciones entonces la proposición "p si y sólo si q"(abreviado "p ssi q"), se denota por

$$p \longleftrightarrow q,$$

y se llama el *bicondicional.* Diremos que $p \longleftrightarrow q$ es verdadero cuando p, q tienen el mismo valor de verdad y falso cuando tienen distintos valores de verdad. La tabla es :

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Otras formas de expresar $p \longleftrightarrow q$ son :

p es necesario y suficiente para q.

p es equivalente a q.

Como los nombres (bicondicional, si y sólo si) y notación sugieren, existe una conexión entre condicional y bicondicional. En efecto, $p \longleftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ (Ejercicio).

1.3 Tautologías

Una clase importante de proposiciones son aquellas cuyas tablas de verdad contienen sólo V en la columna final; esto es, proposiciones que son siempre verdaderas y el hecho que ellas lo sean depende sólo de su forma y no del significado que se le asigne a ellas. Por ejemplo : $p \vee \neg p$. Tales proposiciones son llamadas *tautologías*.

Es importante distinguir entre proposiciones verdaderas y tautologías. Por ejemplo "$2 + 2 = 4$"es una proposición verdadera, pero no es una tautología debido a que su forma es p, la cual no es siempre verdadera (por definición de proposición). Por otro lado "5 es una raíz de 17 ó 5 no es una raíz de 17"es una tautología independientemente de lo que signifique "raíz". Esta es una tautología en virtud sólo de su forma $(p \vee \neg p)$.

La negación de una tautología, esto es, una proposición que es siempre falsa, es llamada una *contradicción*. Debemos distinguir entre contradicciones y afirmaciones falsas en la misma forma en que distinguimos afirmaciones verdaderas y tautologías.

Como ejemplo considere : $p \longrightarrow (p \vee q)$ una tautología y $(p \longrightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$, una contradicción (Ejercicios).

La siguiente es una lista de las tautologías más comunes.

1. $p \vee \neg p$
2. $\neg(p \wedge \neg p)$
3. $p \longrightarrow p$
4. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & p \longleftrightarrow (p \vee p) \\ \text{b)} & p \longleftrightarrow (p \wedge p) \end{array}\right\}$ leyes de idempotencia
5. $\neg\neg p \longleftrightarrow p$
6. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee p) \\ \text{b)} & (p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p) \\ \text{c)} & (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow p) \end{array}\right\}$ leyes conmutativas
7. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (p \vee (q \vee r)) \longleftrightarrow ((p \vee q) \vee r) \\ \text{b)} & (p \wedge (q \wedge r)) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r) \end{array}\right\}$ leyes asociativas
8. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (p \wedge (q \vee r)) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ \text{b)} & (p \vee (q \wedge r)) \longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}\right\}$ leyes distributivas
9. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (p \vee \mathbf{c}) \longleftrightarrow p \\ \text{b)} & (p \wedge \mathbf{c}) \longleftrightarrow \mathbf{c} \\ \text{c)} & (p \vee \mathbf{t}) \longleftrightarrow \mathbf{t} \\ \text{d)} & (p \wedge \mathbf{t}) \longleftrightarrow p \end{array}\right\}$ leyes de identidad
10. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \neg(p \wedge q) \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \\ \text{b)} & \neg(p \vee q) \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \end{array}\right\}$ leyes de De Morgan
11. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \\ \text{b)} & (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ \text{c)} & (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \longleftrightarrow \neg q) \end{array}\right\}$ equivalencias
12. $\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q) \\ \text{b)} & \neg(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \end{array}\right\}$ implicación
13. $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$ contrapositiva
14. $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \longrightarrow \mathbf{c})$ reducción al absurdo
15. $\begin{array}{ll} \text{a)} & ((p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)) \longleftrightarrow ((p \vee q) \longrightarrow r) \\ \text{b)} & ((p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)) \longleftrightarrow (p \longrightarrow (q \wedge r) \end{array}$

16. $((p \wedge q) \longrightarrow r) \longleftrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$
17. $p \longrightarrow (p \vee q)$
18. $(p \wedge q) \longrightarrow p$
19. $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow q$ modus ponens
20. $((p \longrightarrow q) \wedge \neg q) \longrightarrow \neg p$ modus tollens
21. $((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$ silogismo
22. $((p \vee q) \wedge \neg p) \longrightarrow q$ silogismo disjuntivo
23. $(p \longrightarrow \mathbf{c}) \longrightarrow \neg p$
24. $((p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s)) \longrightarrow ((p \vee r) \longrightarrow (q \vee s))$
25. $(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((p \vee r) \longrightarrow (q \vee r))$

En general se debe conocer la tabla anterior lo cual no es dificil si notamos que muchas de las tautologías anteriores están ya incorporadas en nuestra manera de pensar. Por ejemplo, si decimos "Este chaleco es de nylon o lana. No es de nylon"¿Qué podemos concluir sobre el chaleco? Concluimos que es un chaleco de lana, y en esto hemos usado el siguiente silogismo :

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \longrightarrow q.$$

Similarmente, si decimos "Si hago las tareas entonces me gusta la clase. Yo hice las tareas hoy", concluimos que a la persona en cuestión le gusta la clase de hoy. Esto es una aplicación de Modus Ponens

$$(p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow q.$$

1.4 Argumentos y el principio de demostración

¿Cómo ganar un argumento? Aparte de intimidación, abuso de poder, coerción, etc. Estamos hablando de convencer a alguien por medio de un razonamiento lógico. Si decimos : ¿Aceptas que p, q y r son verdaderas? y la respuesta es : Si, por supuesto; se puede decir : Entonces concluimos que t debe ser verdadera. Para ganar un argumento, entonces, debemos hacer uso de que

$$(p \wedge q \wedge r) \longrightarrow t$$

es una tautología, esto es, no hay forma que p, q, r sean verdaderas (aceptadas por nuestro oponente) *y* nuestra conclusión t sea falsa.

En matemática las demostraciones llevan la misma idea : Se debe mostrar que siempre y cuando las premisas del teorema sean verdaderas, la conclusión es también verdadera.

En lo que sigue, intentaremos poner esta idea de manera formal.

Por un *argumento* (o *teorema*) entenderemos una proposición de la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \longrightarrow q.$$

Llamaremos a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ las *premisas* (o hipótesis) y q la *conclusión.*

Un argumento es *válido* (o el teorema es verdadero) si este es una tautología.

Observemos que un argumento válido es una implicación lógica. Así, si las premisas son todas verdaderas *y* el argumento es válido entonces la conclusión debe ser verdadera. Note que si un argumento es válido, la conclusión podrá ser verdadera o falsa; todo lo que se asegura es que *si* las premisas son todas verdaderas *entonces* la conclusión debe ser verdadera. Por ejemplo, consideremos el siguiente argumento

$$(\neg q \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg p.$$

El argumento anterior también se podría escribir como sigue

$$\begin{array}{c} \neg q \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ \neg p \end{array}$$

Para probar la validez del argumento se puede usar una tabla de verdad:

p	q	$\neg\ p$	$\neg\ q$	$p \longrightarrow q$	$\neg\ q \wedge (p \longrightarrow q)$	$(\neg\ q \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg\ p$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Como el argumento es una tautología, este es una argumento válido. Note que esto significa que siempre y cuando las premisas sean todas verdaderas (en este caso la línea 4), la conclusión es también verdadera.

Ahora consideremos el siguiente argumento

$$\begin{array}{c} \neg p \\ p \longrightarrow q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Escribimos la tabla

p	q	$\neg\ p$	$\neg\ q$	$p \longrightarrow q$	$\neg\ p \wedge (p \longrightarrow q)$	$(\neg\ p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg\ q$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Como este argumento no es una tautología (en línea 3 se observa que las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa) éste no es válido.

Para hacer los ejemplos anteriores un poco más concretos, sea p que representa "$2 + 2 = 4$"y q representa "$3 + 5 = 7$". Entonces el primer argumento se traduce como

$$\begin{array}{l} \quad 3+5 \neq 7 \\ \text{Si } \underline{2+2=4} \text{ entonces } 3+5=7 \\ \quad 2+2 \neq 4 \end{array}$$

El segundo es

$$\begin{array}{l} \quad 2+2 \neq 4 \\ \text{Si } \underline{2+2=4} \text{ entonces } 3+5=7 \\ \quad 3+5 \neq 7 \end{array}$$

En el primer caso (un argumento válido) se ve que la conclusión es falsa, mientras que en el segundo caso (un argumento no válido) se ve que la conclusión es verdadera. ¿Qué sucede? La respuesta es que la validez (o no) de un argumento esta basada solamente en la *forma del argumento* y no tiene nada que ver con la validez o falsedad de las proposiciones involucradas.

Otra vez, es importante recordar que la validez de un argumento garantiza la verdad de la conclusión sólo cuando todas las premisas son verdaderas. En el primer argumento observamos que la segunda premisa, "Si $2+2=4$ entonces $3+5=7$"es falsa.

Aunque el procedimiento anterior usando tablas de verdad para chequear la validez de un argumento es simple, no es muy conveniente cuando hay un gran número de proposiciones.

Otro método de probar la validez de un argumento es llamado el *principio de demostración* :

Una demostración que el argumento $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \longrightarrow q$ es válido es una secuencia de proposiciones $s_1, s_2, \ldots, s_k$ tal que s_k (la última proposición en la secuencia) es q y cada s_i, $1 \leq i \leq k$, en la secuencia satisface uno o más de los siguientes requerimientos :

a) s_i es una de las hipótesis

b) s_i es una tautología

c) s_i es una lógica consecuencia de proposiciones anteriores en la secuencia.

Como un ejemplo de esto, consideremos el siguiente, que chequeamos anteriormente usando tabla de verdad

$$\begin{array}{c} \neg q \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ \neg p \end{array}$$

Una demostración sería como sigue :

	Proposición	*Razón*
1.	¬q	hipótesis
2.	p ⟶ q	hipótesis
3.	¬q ⟶ ¬p	contrapositiva
4.	¬p	modus ponens

Existen varias maneras de hacer una demostración correctamente y aún en este simple caso se puede proceder de manera un poco diferente :

	Proposición	*Razón*
1.	¬q	hipótesis
2.	p ⟶ q	hipótesis
3.	¬p	modus tollens

Ejercicio : Establezca la validez del siguiente argumento usando el método de demostración

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ q \longrightarrow \neg p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ q \end{array}$$

Una extensión del principio de demostración, llamado el método de *prueba indirecta* (o prueba por contradicción), esta basada en la reducción al absurdo. Aplicando esta forma a nuestro argumento, obtenemos

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q) \longleftrightarrow ((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge q) \longrightarrow \mathbf{c}).$$

Ya que esta es una equivalencia lógica podemos substituir el lado derecho por el lado izquierdo. Esto significa, en lo que se refiere a nuestra demostración, que se tiene una hipótesis adicional, $\neg q$ (la negación de la conclusión) y nuestra demostración estará completa cuando se obtiene una contradicción (*cualquier* contradicción).

Como un ejemplo de este método, consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ q \longrightarrow \neg p \\ \underline{p \longrightarrow q} \\ q \end{array}$$

	Proposición	*Razón*
1.	$\neg$ q	hipótesis
2.	p $\vee$ q	hipótesis (negación de conclusión en prueba indirecta)
3.	p	consecuencia de 1 y 2 ($\sharp$ 22 de la lista)
4.	p $\longrightarrow$q	hipótesis
5.	q	consecuencia de 3 y 4 (modus ponens)
6.	q $\wedge\neg$ q	consecuencia de 1 y 5
7.	q	consecuencia de 6 (prueba indirecta)

Es interesante notar que la hipótesis $q \longrightarrow \neg p$ no fue usada en esta demostración. Se deja como ejercicio hallar una prueba directa de la validez del argumento sin usar esta hipótesis.

El principio de demostración nos da un buen método para establecer la validez de argumentos pero tiene la desventaja de no mostrar que un argumento no es válido. El hecho que no se pueda dar una demostración de un argumento particular, no es suficiente para demostrar que un argumento no es válido.

Sin embargo, existe otra manera, distinta a usar tablas de verdad, de mostrar que un argumento no es válido. Si recapitulamos a que se entiende por un argumento válido, recordaremos que la conclusión debe ser verdadera siempre y cuando todas las premisas sean verdaderas. De esta manera, si se puede hallar *sólo un caso* donde las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa, entonces se tendrá probado que el argumento no es válido.

Por ejemplo consideremos el siguiente argumento

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \underline{\neg p \vee q} \\ q \longrightarrow p \end{array}$$

Se observa que si q es V y p es F entonces

$$\begin{array}{ccc} p \longrightarrow q & \text{es} & V \\ \\ \neg p \vee q & \text{es} & V \end{array}$$

pero $q \longrightarrow p$ es F. Luego, el argumento no es válido.

1.5 Cuantificadores

Vimos en la sección anterior que "$x < 3$"no es una proposición. Sin embargo, se puede considerar como una *función proposicional* (x es una *variable*).

Lo anterior es similar al concepto de función : Por ejemplo, si $f(x) = 2x+3$, entonces $f(-1) = -5$ y $f(5) = 7$.

Denotemos por $p(x)$ a "$x < 3$"y consideremos como dominio de $p(x)$ a $\mathbb{R}$ (conjunto de los números reales). Luego, si $x = 2$ se obtiene $p(2)$: "$2 < 3$"que es una proposición con valor de verdad V. En cambio si $x = 8$ se obtiene $p(8)$: "$8 < 2$"que es una proposición con valor de verdad F.

Otro ejemplo de función proposicional es: "$x < y$". Denotémosla: $p(x, y)$. Entonces: $p(1, 2)$, $p(-2, 14)$ y $p(0, 5)$ son proposiciones con valores de verdad V y $p(0, 0)$, $p(2, 1)$ y $p(\pi, 3)$ son proposiciones con valores de verdad F.

Sea D el dominio de una función proposicional p (en general este dominio se da explícitamente o bien se infiere del contexto).

Un método de hacer de una función proposicional una proposición, es substituyendo elementos de D en p, como vimos. Un segundo método se denomina *cuantificación*.

Básicamente hay dos formas de cuantificar una función proposicional. La primera es anteceder la función proposicional con "Para todo x en D tal que". La notación es:

$$\forall\, x \text{ en } D \ , \ p(x).$$

La segunda es anteceder la función proposicional con "Existe un x en D tal que". La notación es:

$$\exists\, x \text{ en } D \ni p(x) \quad \text{ó} \quad \exists\, x \text{ en } D \text{ tal que } p(x).$$

$\forall$ se denomina *cuantificador universal*
$\exists$ se denomina *cuantificador existencial*.

Se asignan valores de verdad a las proposiciones anteriores: Así,

$$\forall\, x \text{ en } D \ , \ p(x)$$

tiene un valor de verdad V si $p(x)$ es verdadero *para cada* interpretación de x en D. De otra manera tiene el valor de verdad F.

Por ejemplo, si $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ entonces

$$\forall\, x \text{ en } D \text{ , } p(x)$$

es equivalente a la conjunción:

$$p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge p(x_3) \wedge \cdots \wedge p(x_n).$$

Por otra parte,

$$\exists\, x \text{ en } D \ni q(x)$$

es equivalente a la disjunción, esto es:

$$p(x_1) \vee p(x_2) \vee p(x_3) \vee \cdots \vee p(x_n).$$

Por ejemplo, si $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ y p es la función proposicional $p(x)$: "$x < 3$"entonces

$$\forall\, x \text{ en } D \text{ , } p(x)$$

es falsa (ya que $p(3)$ es falsa). Por otra parte,

$$\forall\, x \text{ en } S \text{ , } p(x) \text{ ; } \exists\, x \text{ en } D \ni p(x)$$

son verdaderas.

Observación : El valor de verdad de una función proposicional cuantificada depende del dominio utilizado.

1.6 Métodos de Demostración

La mayoría de las demostraciones en matemática están escritas de manera "informal". Sin embargo, ellas utilizan la misma estructura lógica en cada caso: Asumiendo que las hipótesis son verdaderas, se escribe una secuencia de proposiciones que son consecuencia lógica de lo que se ha escrito previamente, finalizando con la conclusión del teorema.

Por ejemplo:

Teorema 2 *Si m y n son enteros pares entonces $m+n$ es un entero par.*

(Recordemos que un entero n es par si existe un entero k tal que $n = 2k$; n es impar si existe un entero k tal que $n = 2k + 1$.)

Demostración. Sean m y n enteros pares. Entonces existen enteros j, k tales que $m = 2j$, $n = 2k$. Así $m + n = 2j + 2k = 2(j + k)$. Por lo tanto, $m + n$ es par. ■

La demostración anterior es *directa*.

Observemos que en el enunciado del Teorema hay cuantificadores "bajo la superficie". Un enunciado más cuidadoso debiera ser :

$$\text{“}\forall m\ ,\ \forall n\ (m \text{ es par y } n \text{ es par}) \ \rightarrow\ (m+n \text{ es par})\ \text{”}.$$

¿Cómo es que probamos el teorema considerando sólo dos enteros (m y n) siendo que queremos probar que el resultado vale para *todos* los enteros? ¿Habría sido diferente si hubiésemos solamente observado que 2 y 4 son enteros pares y que su suma, 6, es también par?

En efecto, es *muy diferente.* La demostración anterior contiene un ejemplo de el uso de: *variables fijas pero arbitrarias.*

Hay otros métodos usados comúnmente para una demostración:

· Contrapositiva

· Reducción al absurdo.

Ambas están basadas en las correspondientes equivalencias lógicas:

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$$

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \longrightarrow \mathbf{c}).$$

Ejemplo: Prueba contrapositiva del Teorema 2. Nuestra hipótesis es $m+n$ no es par (la negación de la conclusión).

Demostración. Supongamos que m, n son enteros y $m+n$ no es par, entonces impar. Luego existe un entero k tal que $m+n=2k+1$.

Ahora, m es ya sea par o impar.

Si m es impar, entonces la demostración está concluida.

Si m es par, entonces existe un entero j tal que $m=2j$.

Luego

$$n=(m+n)-m=2k+1-2j=2(k-j)+1.$$

Esto prueba que n es impar y la demostración es completa. ∎

Analicemos esta demostración en detalle:

Sea p: "m es un entero par"

q: "n es un entero par"

r: "$m+n$ es un entero par"

Entonces el Teorema es:

$$(p \wedge q) \longrightarrow r.$$

Así, la contrapositiva es:

$$\neg r \longrightarrow \neg(p \wedge q).$$

Usando las leyes de De Morgan, se obtiene la forma equivalente:

$$\neg r \longrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

y esta es la forma que se utilizó en la demostración anterior. Una traducción de lo anterior en palabras sería:

" Si $m+n$ es impar entonces m es impar ó n es impar ".

Así la forma contrapositiva del teorema tiene una disjunción como conclusión y, recordemos, una disjunción es verdadera cuando al menos una de sus subproposiciones es verdadera. Así, para demostrar que la conclusión es verdadera se necesita demostrar que m es impar o n es impar.

La demostración anterior hizo esto diciendo que m es impar o par (recordar que $p \vee \neg p$ es una tautología) y entonces se consideran ambos casos (un ejemplo de análisis exaustivo): Si m es impar entonces "m es impar o n es impar"es verdadero y la demostración está concluida. Si m es par entonces n es impar (aqui se requirió un poco más de trabajo), luego "m es impar o n es impar"es verdadero, lo que concluye la demostración.

Ejemplo: Prueba indirecta o por contradicción del Teorema 2

$$\begin{aligned}(p \longrightarrow q) &\iff (\neg(p \longrightarrow q) \longrightarrow \mathbf{c}) \\ &\iff ((p \wedge \neg q) \longrightarrow \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Observe que esta prueba involucra partir con una hipótesis adicional: La negación de la conclusión. La demostración está completa cuando se obtiene una contradicción.

Demostración. Supongamos que m y n son enteros pares tales que $m+n$ es impar. Entonces existen enteros j, k tales que $m = 2j$ y $m+n = 2k+1$. Así

$$n = (m+n) - m = 2k + 1 - 2j = 2(k-j) + 1$$

por lo tanto n es al mismo tiempo par e impar, una contradicción, lo cual completa la demostración. ∎

Una de las ventajas de la prueba indirecta es que nos da una hipótesis adicional con la cual podemos trabajar. Esto es particularmente útil para demostrar la no existencia de objetos matemáticos.

Resumiendo las tres formas de demostración, se tiene:

a) Prueba directa : Se asume hipótesis

(cuerpo de la demostración)

Conclusión.

b) Prueba contrapositiva: Se asume negación de la conclusión

(cuerpo de la demostración)

Conclusión.

c) Prueba indirecta: Se asume hipótesis y negación de la conclusión

(cuerpo de la demostración)

Conclusión.

Es importante notar que: *No existe una forma de demostración en la cual se asuma la conclusión. Tampoco existe forma de demostración en la cual se asuma la negación de la hipótesis.*

Si el teorema a demostrarse tiene la forma $p \longleftrightarrow q$ entonces la demostración se puede realizar en dos partes, una mostrando que $p \longrightarrow q$ y la otra mostrando que $q \longrightarrow p$.

Usualmente no se puede usar una técnica de demostración para mostrar que una conjetura es falsa. En este caso se procede por contraejemplos. Como ilustración, la conjetura:

" Si x es un entero impar e y es un entero par entonces $x + y$ es par "

se puede mostrar que es falsa produciendo el contraejemplo $x = 3$, $y = 2$ y observando que $x + y = 5$ es impar. Así, se ha construido un ejemplo que satisface las hipótesis pero no la conclusión.

1.7 Ejercicios

1. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   a) Si $2+1=4$ entonces $3+2=5$.
   b) Rojo es blanco si sólo si verde es azul.
   c) $2+1=3$ y $3+1=5$ implica que 4 es impar.
   d) Si 4 es impar entonces 5 es impar.
   e) Si 4 es impar entonces 5 es par.
   f) Si 5 es impar entonces 4 es impar.

2. Sean $p:$ "7 es un entero par", $q:$ "$3+1=4$" y $r:$ "24 es divisible por 8"

   a) Escriba en forma simbólica y asigne valores de verdad:
      i) $3+1\neq 4$ y 24 es divisible por 8.
      ii) No es cierto que 7 es impar o $3+1=4$.
      iii) $3+1=4$ pero 24 no es divisible por 8.
   b) Escriba en palabras y asigne valores de verdad:
      i) $p\vee\neg q$.
      ii) $\neg(r\wedge q)$.
      iii) $\neg r\vee\neg q$.

3. Suponga que se define el conectivo $\star$ diciendo que $p\star q$ es verdadera solamente cuando q es verdadera y p es falsa y es falsa en cualquier otro caso.

   a) Escriba la tabla de verdad para $p\star q$.

b) Escriba la tabla de verdad para $q \star p$.

c) Escriba la tabla de verdad para $(p \star p) \star q$.

4. Dé ejemplos de proposiciones lógicas con las siguientes condiciones.

    a) Implicación verdadera con la conclusión falsa.

    b) Implicación verdadera con la conclusión verdadera.

    c) Implicación falsa con la conclusión verdadera.

    d) Implicación falsa con la conclusión falsa.

    e) Implicación falsa con la hipótesis falsa.

    f) Implicación falsa con la hipótesis verdadera.

    g) Implicación verdadera con la hipótesis verdadera.

    h) Implicación verdadera con la hipótesis falsa.

5. Suponga que las proposiciones p, $\neg q$ y r son verdaderas. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

    a) $p \longrightarrow q$.

    b) $q \longrightarrow p$.

    c) $p \longrightarrow (q \vee r)$.

    d) $p \longleftrightarrow q$.

    e) $p \longleftrightarrow r$.

    f) $(q \vee p) \longrightarrow p$.

    g) $(q \wedge p) \longrightarrow q$.

6. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias?

a) $(\neg q \wedge p) \longrightarrow (q \vee \neg p)$.

b) $\neg p \longrightarrow p$.

c) $\neg p \longleftrightarrow p$.

d) $(\neg p \wedge p) \longrightarrow p$.

e) $(\neg p \wedge p) \longrightarrow q$.

f) $(\neg q \wedge p) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$.

g) $[(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow r] \longleftrightarrow [p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)]$.

7. Encuentre:

a) La contrapositiva de $\neg p \longrightarrow q$.

b) La recíproca de $\neg q \longrightarrow p$.

c) La inversa de la recíproca de $q \longrightarrow \neg p$.

d) La negación de $p \longrightarrow \neg q$.

e) La recíproca de $\neg p \wedge q$.

8. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?

a) $(p \longleftrightarrow q) \Longrightarrow (p \longrightarrow q)$.

b) $(p \longrightarrow q) \Longrightarrow (p \longleftrightarrow q)$.

c) $(p \longrightarrow q) \Longrightarrow q$.

9. ¿Es $\longrightarrow$ asociativa?; esto es: $((p \longrightarrow q) \longrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$.

10. ¿Es $\longleftrightarrow$ asociativa?; esto es: $((p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r))$.

11. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautología?

a) Si $2 + 2 = 4$ entonces 5 es impar.

b) $3 + 1 = 4$ y $5 + 3 = 8$ implica $3 + 1 = 4$.

c) $3 + 1 = 4$ y $5 + 3 = 8$ implica $3 + 2 = 5$.

d) Rojo es amarillo o rojo no es amarillo.

e) Rojo es amarillo o rojo es rojo.

f) Si 4 es impar ó 2 es par y 2 es impar implica que 4 sea impar.

g) Si 4 es impar ó 2 es par y 2 es impar implica que 4 sea par.

12. Determine la validez de los siguientes argumentos usando tablas de verdad.

a) $$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \underline{q \vee \neg p} \\ q \longrightarrow p \end{array}$$

b) $$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{r \longrightarrow q} \\ \neg r \end{array}$$

c) $$\begin{array}{c} p \vee \neg q \\ \underline{\neg p} \\ \neg q \end{array}$$

13. Dé ejemplos de proposiciones con las condiciones, donde sea posible y si no es posible explique por qué.

a) El argumento no válido con la conclusión falsa.

b) El argumento válido con la conclusión verdadera.

c) El argumento no válido con la conclusión verdadera.

d) El argumento válido con la conclusión falsa.

e) El argumento válido con la la hipótesis verdadera y la conclusión falsa.

f) El argumento no válido con la la hipótesis verdadera y la conclusión falsa.

g) El argumento válido con la la hipótesis falsa y la conclusión verdadera.

14. Establezca la validez de los siguientes argumentos usando las propiedades lógicas o, dé contraejemplos en caso que estos no sean válidos.

a) $\dfrac{\begin{array}{c}\neg p \vee q \\ p\end{array}}{q}$

b) $\dfrac{\begin{array}{c}p \longrightarrow q \\ r \longrightarrow \neg q\end{array}}{p \longrightarrow \neg r}$

c) $\dfrac{\begin{array}{c}\neg p \vee q \\ \neg r \longrightarrow \neg q\end{array}}{p \longrightarrow \neg r}$

d) $\dfrac{\begin{array}{c}p \longrightarrow q \\ \neg q \longrightarrow \neg r \\ s \longrightarrow (p \vee r) \\ s\end{array}}{q}$

e) $\dfrac{\begin{array}{c}p \vee q \\ q \longrightarrow \neg r \\ \neg r \longrightarrow \neg p\end{array}}{\neg(p \wedge q)}$

f) $\dfrac{\begin{array}{c}p \longrightarrow q \\ \neg q \longrightarrow \neg r \\ r \longrightarrow \neg p\end{array}}{\neg p}$