Transformaciones lineales

0.1 Espacios vectoriales normados

Definiremos por medio de tres axiomas lo que entenderemos por una norma, concepto ya conocido.

Definición 1 *Sea E e.v. sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita o infinita. Una norma en E es una función $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades :*

$N1 : \|x\| \geq 0 \qquad \forall x \in E \quad y \quad \|x\| = 0 \;\; ssi \;\; x = 0$

$N2 : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$N3 : \|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|.$

Un e.v. donde se define una norma se llama e.v *normado.* La distancia entre dos vectores x e y en un e.v. normado se define por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Observación : $N1$, $N2$ y $N3$ implican, respectivamente :

$d(x, y) > 0$ si $x \neq y$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad triangular)

$d(x, y) = d(y, x).$

Esto dice que d es una *métrica* en E y define una *topología* en E.

Ejemplos

1) Cada espacio producto interno es un espacio normado, con la norma definida por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

2) Si $C = C[0,1]$ entonces una norma se define por

$$\|f\| := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

3) Sea E e.v. de dimensión n. Sea $\{e_n\}$ base de E. Se define la norma de un vector $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ por

$$\|x\| = \sum_i |\alpha_i|.$$

0.1.1 Transformaciones lineales acotadas

Definición 2 *Sea E e.v. normado. Una transformación lineal $\varphi : E \longrightarrow E$ se llama acotada si existe un número M tal que*

$$\|\varphi(x)\| \leq M\|x\| \quad \text{; para cada } x \in E.$$

Proposición 3 *Una transformación lineal es acotada si y sólo si es continua.*

Demostración. Sea $T : E \longrightarrow E$ una transformación lineal. Supongamos que T es acotada.
Sea $x_n \longrightarrow x$ entonces $\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \longrightarrow 0.$

Por lo tanto, T es continua.

Reciprocamente, supongamos que T es continua. Entonces para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|T(x)\| < 1$.
Sea $y \in E$. Entonces para $x := \dfrac{y}{\|y\|}\dfrac{\delta}{2}$ se tiene que $\|x\| < \delta$. Luego

$$\|T(y)\| = \left\| T\left(\frac{2\|y\|}{\delta}x\right)\right\| \leq \frac{2\|y\|}{\delta}\|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|y\| = M\|y\|.$$

Por lo tanto, T es acotada. ∎

Observación : Se define el conjunto

$$\mathcal{B}(E,E) := \{T : E \longrightarrow E \ / \ T \text{ es lineal y acotado } \},$$

el cual es un subespacio de $L(E;E) := \{L : E \longrightarrow E \ / \ T \text{ es lineal } \}$.

Sea $\varphi \in \mathcal{B}(E,E)$. Entonces el conjunto

$$\{\|\varphi(x)\| \ : \ \|x\| = 1\}$$

es acotado. Denotemos :

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\|.$$

Notar que $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\| \ \|x\|$.

Proposición 4 *$\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{B}(E,E)$.*

Demostración.

$N1$: $\|\varphi\| \geq 0$ es obvio por definición. Si $\|\varphi\| = 0$ entonces $\sup_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| = 0$, esto implica que $\varphi(x) = 0$ para todo x, $\|x\| = 1$. Luego, $\varphi \equiv 0$ (Ejercicio).

Inversamente, si $\varphi \equiv 0$ entonces $\|\varphi\| = 0$ evidentemente.

$N3$: $\|\lambda\varphi\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\lambda\varphi(x)| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = |\lambda| \; \|\varphi\|.$

$N2$: Para cada $x \in E$,

$$\|(\varphi + \psi)(x)\| = \|\varphi(x) + \psi(x)\| \leq \|\varphi(x)\| + \|\psi(x)\| \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\|;$$

por lo tanto, $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$. ■

Observación : $\|\cdot\|$ tiene la propiedad adicional :

$$\|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\| \; \|\varphi\|.$$

Ejercicios

1. Una sucesión infinita de vectores (x_n) en un e.v. normado E se dice *convergente* a x si : $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon\ \ \forall\ n > N$

   (a) Demuestre que cada sucesión convergente satisface el siguiente criterio de Cauchy : $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ si $n > N$, $m > M$.

   (b) Demuestre que cada sucesión de Cauchy en un e.v. normado de dimensión finita es convergente.

   (c) De un ejemplo que muestre que (b) no es cierto si la dimensión es infinita.

2. Un e.n. se llama *completo* si cada sucesión de Cauchy es convergente. Sea E e.n. completo y $\varphi : E \longrightarrow E$ una transformación lineal tal que

$\|\varphi\| \leq 1$. Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n$ es convergente y que la transformación lineal

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n$$

tiene las siguientes propiedades :

(a) $(1-\varphi) \circ \psi = \psi \circ (1-\varphi) = 1$

(b) $\|\varphi\| \leq \dfrac{1}{1-\|\varphi\|}$.

0.2 Transformaciones lineales en espacios con producto interno

En todo lo que sigue se supone que los espacios vectoriales son de dimensión finita.

0.2.1 Transformación adjunta

Sean E, F e.v. Sea $\varphi : E \longrightarrow F$ lineal. Sean E^*, F^* e.v. duales de E y F respectivamente. Entonces φ induce $\varphi^* : F^* \longrightarrow E^*$ una transformación lineal definida por

$$\langle \varphi^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, \varphi(x) \rangle \; ; \; x \in E \; , \; y^* \in F^*.$$

En el sentido anterior φ^* y φ se llaman duales.

Definición 5 *φ^* se llama la transformación adjunta.*

Si E y F son e.v. con producto interno; reemplazando la dualidad $\langle , \rangle$ por el producto interno, se obtiene la relación

$$\langle \varphi(x), y \rangle_F = \langle x, \varphi^*(y) \rangle_E \qquad ; x \in E \ , \ y \in F \tag{1}$$

de esta manera cada $\varphi : E \longrightarrow F$ determina una transformación lineal $\varphi^* : F \longrightarrow E$.

Observación : $(\varphi^*)^* = \varphi$.

Demostración. φ^* y $(\varphi^*)^*$ están relacionadas por :

$$\langle \varphi^*(y), x \rangle = \langle y, (\varphi^*)^*(x) \rangle \tag{2}$$

luego, de (1) y (2) se tiene que

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle (\varphi^*)^*(x), y \rangle \qquad \forall\, y \in F \ , \ x \in E$$

con lo que $\varphi^{**} = \varphi$. ∎

Ejercicio : Mostrar que, con respecto a bases ortonormales, la matriz de una transformación adjunta corresponde a la matriz traspuesta.

0.2.2 Transformación lineal adjunta

Sea E e.v. con producto interno y consideremos el caso $F = E$. Entonces a cada transformación lineal $\varphi : E \longrightarrow E$ le corresponde una transformación lineal adjunta $\varphi^* : E \longrightarrow E$. Si e y $\widetilde{e}$ son vectores propios de φ y φ^* respectivamente. Entonces

$$\varphi(e) = \lambda e$$

y

$$\varphi^*(\widetilde{e}) = \mu\widetilde{e}.$$

Pero, por definición

$$\langle \varphi(e), \widetilde{e} \rangle = \langle \lambda e, \widetilde{e} \rangle = \lambda \langle e, \widetilde{e} \rangle$$

y

$$\langle e, \varphi^*(\widetilde{e}) \rangle = \langle e, \mu\widetilde{e} \rangle = \overline{\mu} \langle e, \widetilde{e} \rangle$$

lo que implica que $\lambda = \overline{\mu}$ si $\langle e, \widetilde{e} \rangle \neq 0$. Por lo tanto, si $\varphi(e) = \lambda e$ entonces $\varphi^*(\widetilde{e}) = \overline{\lambda}\widetilde{e}$.

0.2.3 La relación entre transformaciones lineales y funciones bilineales

Sea $\varphi : E \longrightarrow E$ una transformación lineal. Sea E e.v. con producto interno $\langle , \rangle$. Entonces se puede definir una forma bilineal :

$$\phi(x, y) := \langle \varphi(x), y \rangle.$$

De esta manera es posible definir una función

$$\rho : L(E; E) \longrightarrow \mathcal{B}(E \times E) = \{ b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ b \text{ es bilineal } \}$$

por $\rho(\varphi) = \phi$. Esto es, $\rho(\varphi)(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle$, para cada x, $y \in E$.

Teorema 6 *$L(E; E) \cong \mathcal{B}(E \times E)$.*

Demostración. Probaremos que ρ es un isomorfismo.

1) ρ es lineal : Para cada $(x, y) \in E \times E$,

$$\begin{aligned}\rho(\lambda\varphi + \psi)(x, y) &= \langle(\lambda\varphi + \psi)(x), y\rangle \\ &= \langle\lambda\varphi(x), y\rangle + \langle\psi(x), y\rangle \\ &= \lambda\rho(\varphi)(x, y) + \rho(\psi)(x, y) \\ &= (\lambda\rho(\varphi) + \rho(\psi))(x, y).\end{aligned}$$

2) ρ es 1-1 :

Si $\rho(\varphi) = 0$ entonces $\rho(\varphi)(x, y) = 0\ \forall\, x, \forall\, y$. Luego, $\langle\varphi(x), y\rangle = 0\ \forall\, x, \forall\, y$. De esta manera $\varphi(x) = 0\ \forall\, x$. Por lo tanto, $\varphi \equiv 0$.

3) ρ es sobreyectiva :

Sea $\phi \in \mathcal{B}(E \times E)$. Sea $x \in E$ fijo y definamos $f_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_x(y) := \phi(x, y)$ entonces $f_x \in L(E)$.
Por Teorema de Representación de Riesz (Teorema 11), existe un único a_x en E tal que

$$f_x(y) = \langle a_x, y\rangle\ \forall\, y \in E.$$

Sea $\varphi : E \longrightarrow E$ definida por : $\varphi(x) = a_x$. Entonces φ es lineal (Ejercicio) y

$$\langle\varphi(x), y\rangle = \langle a_x, y\rangle = f_x(y) = \phi(x, y)$$

o sea

$$\rho(\varphi)(x, y) = \phi(x, y) \quad \text{ó} \quad \rho(\varphi) = \phi$$

con lo que se prueba el teorema. ■

Así, existe una correspondencia inyectiva entre las funciones lineales y las bilineales en E. En particular, la identidad (en $L(E; E)$) corresponde al producto interno (en $\mathcal{B}(E \times E)$).

Nota : Se tienen las correspondencias siguientes :

$$\begin{array}{rcl} L(E;E) & \stackrel{\rho}{\longleftrightarrow} & B(E\times E) \\ I & \longleftrightarrow & \langle , \rangle \\ \varphi & \longleftrightarrow & \rho(\varphi) := \phi \\ \varphi^* & \longleftrightarrow & \rho(\varphi^*) \end{array}$$

Sea $\widetilde{\phi}$ la función bilineal que corresponde a la transformación adjunta. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\phi}(x,y) & = & \langle \varphi^*(x), y\rangle \\ & = & \langle x, \varphi(y)\rangle \\ & = & \langle \varphi(y), x\rangle \\ & = & \phi(y,x). \end{array}$$

Luego, $\widetilde{\phi}$ es igual a ϕ pero intercambiando los argumentos (esto es, simétrica, lo cual será estudiado en detalle posteriormente.)

0.2.4 Transformaciones normales

Definición 7 *Una transformación lineal $\varphi : E \longrightarrow E$ se dice normal si $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$.*

Proposición 8 *Son equivalentes :*

(a) φ es normal

(b) $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(y)\rangle \ \forall\, x, y \in E$.

Demostración. Si φ es normal se tiene que

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle &= \langle x,(\varphi^*\circ\varphi)(y)\rangle \\ &= \langle x,(\varphi\circ\varphi^*)(y)\rangle \\ &= \langle\varphi^*(x),\varphi^*(y)\rangle.\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que (b) vale, entonces :

$$\langle y,(\varphi^*\circ\varphi)(x)\rangle = \langle\varphi(y),\varphi(x)\rangle = \langle\varphi^*(y),\varphi^*(x)\rangle = \langle y,(\varphi\circ\varphi^*)(x)\rangle\ \forall\, y.$$

Luego, $(\varphi^*\circ\varphi)(x) = (\varphi\circ\varphi^*)(x)\ \forall\, x$. Por lo tanto, $\varphi^*\circ\varphi = \varphi\circ\varphi^*$. ∎

Corolario 9 *Si φ es normal, entonces $\|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$ para cada $x\in E$.*

Demostración.

$$\|\varphi(x)\|^2 = \langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle = \langle\varphi^*(x),\varphi^*(x)\rangle = \|\varphi^*(x)\|^2.$$

∎

Ejercicio: Suponga que E es un espacio vectorial con producto interno. Pruebe que si $\|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|\ \forall\, x\in E$, entonces φ es normal.

0.2.5 Transformaciones autoadjuntas

Definición 10 *Una transformación lineal $\varphi : E \longrightarrow E$ se dice autoadjunta si $\varphi^* = \varphi$.*

Teorema 11 *Sea E e.v. con producto interno de dimensión finita. Sea $\varphi : E \longrightarrow E$ autoadjunta. Entonces E posee una base ortonormal de vectores propios.*

Demostración. Sea $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \dfrac{\langle x, \varphi(x)\rangle}{\|x\|^2}$, $x \neq 0$. Claramente F es continua. Como $\{x \in E \ / \ \|x\| = 1\}$ es un subconjunto cerrado y acotado de E, se tiene que $\inf\limits_{\|x\|=1} F(x)$ se alcanza en el subconjunto, esto es, existe $e_1 \in E$, $\|e_1\| = 1$ tal que

$$F(e_1) = \inf_{\|x\|=1} F(x). \tag{3}$$

Luego : $F(e_1) \leq F(y)$ para cada $y \in E$, $\|y\| = 1$. Más aún

$$F(e_1) \leq F(x) \qquad \forall\, x \in E. \tag{4}$$

En efecto : Si $x \in E$, $x \neq 0$ y se define $y := \dfrac{x}{\|x\|}$, entonces $\|y\| = 1$ y luego por (3) :

$$\begin{aligned} F(e_1) \leq F(y) &= \langle y, \varphi(y)\rangle \\ &= \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \varphi(\frac{x}{\|x\|}) \right\rangle \\ &= \frac{\langle x, \varphi(x)\rangle}{\|x\|^2} \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Afirmación : e_1 es un vector propio de φ.

Más aún, probaremos que el valor propio es $\langle e_1, \varphi(e_1)\rangle$. Esto es :

$$\varphi(e_1) = \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle e_1. \tag{5}$$

En efecto: Sea $y \in E$. Definamos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = F(e_1 + ty).$$

De (4), $f(0) = F(e_1) \leq F(x)\ \forall\, x \in E$. En particular, para cada $e_1 + ty \in E$. Esto es :

$$f(0) \leq F(e_1 + ty) = f(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Esto dice que $f(0)$ es un *mínimo* de f (recuerde que $f'(x)=0$ si y sólo si x es punto critico, esto es máximo o minimo, de f) . Luego :

$$f'(0)=0 \tag{6}$$

De la definición de F obtenemos :

$$\begin{aligned} f(t)=F(e_1+ty) &= \frac{\langle e_1+ty, \varphi(e_1+ty)\rangle}{\langle e_1+ty, e_1+ty\rangle} \\ &= \frac{\langle e_1+ty, \varphi(e_1)+t\varphi(y)\rangle}{\langle e_1+ty, e_1+ty\rangle}. \end{aligned}$$

Derivando esta función y evaluando en $t=0$ se obtiene :

$$f'(0)=\langle e_1, \varphi(y)\rangle+\langle y, \varphi(e_1)\rangle-2\langle e_1, \varphi(e_1)\rangle\langle e_1, y\rangle \tag{7}$$

En efecto: Se tiene la igualdad :

$$\langle e_1+ty, e_1+ty\rangle f(t)=\langle e_1+ty, \varphi(e_1)+t\varphi(y)\rangle$$

o equivalentemente

$$(1+2t\langle y, e_1\rangle+t^2\langle y, y\rangle)f(t)=\langle e_1, \varphi(e_1)\rangle+t\langle e_1, \varphi(y)\rangle+t\langle y, \varphi(e_1)\rangle+t^2\langle y, \varphi(y)\rangle.$$

Derivando con respecto a t, obtenemos

$$\begin{aligned} & (2\langle y, e_1\rangle+2t\langle y, y\rangle)f(t)+(1+2t\langle y, e_1\rangle+t^2\langle y, y\rangle)f'(t) \\ = \ & \langle e_1, \varphi(y)\rangle+\langle y, \varphi(e_1)\rangle+2t\langle y, \varphi(y)\rangle. \end{aligned}$$

Evaluando en $t=0$:

$$2\langle y, e_1\rangle f(0)+f'(0)=\langle e_1, \varphi(y)\rangle+\langle y, \varphi(e_1)\rangle.$$

Notar que $f(0)=F(e_1)=\langle e_1, \varphi(e_1)\rangle$ luego,

$$f'(0)=\langle e_1, \varphi(y)\rangle+\langle y, \varphi(e_1)\rangle-2\langle y, e_1\rangle\langle e_1, \varphi(e_1)\rangle$$

lo cual prueba (7).

Teniendo probado (7) y usando el hecho que φ es autoadjunta se tiene:

$$f'(0) = 2\langle\varphi(e_1), y\rangle - 2\langle e_1, \varphi(e_1)\rangle\langle e_1, y\rangle.$$

Usando ahora (6) da:

$$\begin{aligned}\langle\varphi(e_1), y\rangle &= \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle\langle e_1, y\rangle \\ &= \langle e_1\langle e_1, \varphi(e_1)\rangle, y\rangle\end{aligned}$$

de esta manera

$$\langle\varphi(e_1) - \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle e_1, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in E.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(e_1) = \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle e_1.$$

Esto prueba la afirmación.

Veamos ahora como se construye una base de vectores ortonormales. Sea $F_1 := \langle e_1\rangle$ el subespacio (de dimensión 1) generado por e_1. Entonces $\varphi(F_1) \subseteq F_1$ pues $\varphi(e_1) = \lambda e_1$. Esto, y el hecho que φ es autoadjunta, implica que $\varphi(F_1^{\perp}) \subseteq F_1^{\perp}$. (En efecto: Sea $y \in F_1^{\perp}$ entonces $< y, f >= 0$ para cada $f \in F_1$. Luego, para cada $g \in F_1$ se tiene $< \varphi(y), g >=< y, \varphi(g) >= 0$ donde $\varphi(g) \in F_1$. Esto implica que $\varphi(y) \in F_1^{\perp}$).

Sea $\varphi_1 : F_1^{\perp} \longrightarrow F_1^{\perp}$ definida como la restricción de φ a $F_1^{\perp}$. Claramente φ_1 es autoadjunta y luego se puede aplicar la construcción anterior para obtener un vector $e_2 \in F_1^{\perp}$. Así $\langle e_2, e_1\rangle = 0$. Continuando de esta manera se obtiene un sistema de n vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tales que

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

estos vectores $\{e_i\}$ forman una base ortonormal de E. En esta base, la aplicación φ toma la forma :

$$\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$$

donde λ_i es el valor propio de e_i. Esto prueba el teorema. ■

Definición 12 *Sea λ un valor propio de una transformación lineal $\varphi : E \longrightarrow E$. Se define el espacio propio correspondiente al valor propio λ como el conjunto*

$$E(\lambda) := \{x \in E \ / \ \varphi(x) = \lambda x\}.$$

Proposición 13 *Sean λ_1 y λ_2 valores propios de una transformación lineal autoadjunta. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $E(\lambda_1) \perp E(\lambda_2)$ (i.e. espacios propios correspondientes a valores propios diferentes de una transformación lineal autoadjunta, son ortogonales).*

Demostración. Sea $e_1 \in E(\lambda_1)$ y $e_2 \in E(\lambda_2)$. Entonces $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1$, $\varphi(e_2) = \lambda_2 e_2$. Luego :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)\langle e_1, e_2\rangle &= \langle \lambda_1 e_1, e_2\rangle - \langle e_1, \lambda_2 e_2\rangle \\ &= \langle \varphi(e_1), e_2\rangle - \langle e_1, \varphi(e_2)\rangle \\ &= \langle \varphi(e_1), e_2\rangle - \langle \varphi(e_1), e_2\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\langle e_1, e_2\rangle = 0$. ■

Proposición 14 *Sean $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ los valores propios diferentes de φ (autoadjunta) entonces $E = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r)$.*

Demostración. Claramente $E(\lambda_i) \cap E(\lambda_j) = \{0\}$ (pues $E(\lambda_i) \perp E(\lambda_j)$) $\forall\, i \neq j$. Por otra parte, si $x \in E$; como existe una base ortonormal de vectores propios, digamos $\{e_i\}$, se tiene :

$$x = \underbrace{\langle x, e_1\rangle e_1}_{\in E(\lambda_1)} + \cdots + \underbrace{\langle x, e_n\rangle e_n}_{\in E(\lambda_r)}$$

esto prueba la proposición. ∎

0.2.6 Vectores propios de funciones bilineales

Recordemos que $L(E;E) := \{\varphi : E \longrightarrow E \ / \ \varphi \text{ es lineal}\}$. Vimos que $L(E;E) \cong \mathcal{B}(E \times E)$ siendo el isomorfismo explícitamente dado como $\rho : L(E;E) \longrightarrow \mathcal{B}(E \times E)$ tal que

$$\rho(\varphi)(x,y) = \langle \varphi(x), y \rangle.$$

En particular, a cada función bilineal $b \in \mathcal{B}(E \times E)$ le corresponde $\varphi \in L(E;E)$ tal que se verifica la siguiente relación

$$\langle \varphi(x), y \rangle = b(x,y) \qquad \forall\, x, y \in E.$$

Usando esta relación se definen *vectores* y *valores propios* para $b \in \mathcal{B}(E \times E)$ como los que corresponden a φ. En otras palabras : $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio para b si lo es para φ, donde φ es la única transformación lineal tal que

$$\langle \varphi(x), y \rangle = b(x,y).$$

Análogamente se pueden definir vectores propios (Ejercicio).

Como una aplicación de lo anterior se tiene el siguiente resultado.

Teorema 15 *Sea b una función bilineal simétrica (i.e. $b(x,y) = b(y,x)$) en $E \times E$. Entonces existe una base ortonormal $\{e_n\}$ de E tal que b tiene una forma diagonal. Esto es, existen escalares $\{\lambda_i\}$ en $\mathbb{C}$ tal que*

$$b(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Demostración. Sea b bilineal. Entonces existe una única φ en $L(E)$ tal que $b(x,y) = \langle \varphi(x), y \rangle$. Como $b(x,y) = b(y,x)$, entonces $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$. Luego; $\varphi = \varphi^*$ (i.e. φ es autoadjunta). Por lo tanto, existe una base $\{e_n\}$ de E que consiste de vectores propios de E. Sean $\{\lambda_n\}$ los correspondientes valores propios. Entonces $\varphi(e_n) = \lambda_n e_n$. Luego :

$$\begin{aligned} b(e_i, e_j) &= \langle \varphi(e_i), e_j \rangle \\ &= \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle \\ &= \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \lambda_i \delta_{ij}. \end{aligned}$$

■

0.2.7 Proyecciones ortogonales

Sea E un e.v. con producto interno $\langle , \rangle$, no necesariamente de dimensión finita. La siguiente definición generaliza el concepto de proyección.

Definición 16 *Una transformación lineal* $\pi : E \longrightarrow E$ *se dice una proyección ortogonal si es autoadjunta y satisface* $\pi^2 = \pi$.

Ejemplo. Sea $e \in E$ tal que $||e|| = 1$. Se define $P : E \to \langle \{e\} \rangle =: E_1$ tal que $P(x) = \langle x, e \rangle e$. Es claro que P es autoadjunta pues:

$$\begin{aligned} \langle P(x), y \rangle &= \langle \langle x, e \rangle e, y \rangle = \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle \\ &= \overline{\langle y, e \rangle} \langle x, e \rangle = \langle x, \langle y, e \rangle e \rangle = \langle x, P(y) \rangle. \end{aligned}$$

Además, $P^2 = P$ pues:

$$P(P(x)) = P(\langle x, e \rangle e) = \langle x, e \rangle P(e) = \langle x, e \rangle \langle e, e \rangle e = \langle x, e \rangle e = P(x).$$

Proposición 17 *Si π es una proyección ortogonal entonces $E = \ker \pi \oplus im\pi$.*

Demostración. Sea $x \in \ker \pi \cap im\pi$. Entonces $\pi(x) = 0$ y existe z en E tal que $x = \pi(z)$. Luego, $0 = \pi(x) = \pi^2(z) = \pi(z) = x$. Por lo tanto, $\ker \pi \cap im\pi = \{0\}$.

Por otra parte, dado $x \in E$ escribimos :

$$x = (x - \pi(x)) + \pi(x).$$

Entonces $x - \pi(x) \in \ker \pi$ pues $\pi(x - \pi(x)) = \pi(x) - \pi^2(x) = \pi(x) - \pi(x) = 0$ y $\pi(x) \in im\pi$ por definición. Hemos probado la proposición. ∎

Observación : La restricción de π a $im\,\pi$ es la identidad, esto es : $\forall y \in im\,\pi$; $\pi(y) = y$. En efecto : Si $y \in im\,\pi$ entonces $y = \pi(x)$, $x \in E$. Luego, $\pi(y) = \pi^2(x) = \pi(x) = y$.

Proposición 18 *Sea E_1 un subespacio de E. Entonces existe una única proyección ortogonal $\pi : E \longrightarrow E$ tal que $im\pi = E_1$.*

Demostración. Se define

$$\pi(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in E_1 \\ 0 & \text{si } y \in E_1^{\perp} \end{cases}$$

y es fácil verificar que $\pi^2 = \pi$ y $\pi^* = \pi$ (Ejercicio).

0.2.8 Suma de dos proyecciones

Sean $\pi_1 : E \longrightarrow E_1$, $\pi_2 : E \longrightarrow E_2$ proyecciones ortogonales (i.e. $E_1 = im\pi_1$, $E_2 = im\pi_2$). Queremos saber si la suma $\pi_1 + \pi_2$ es una proyección ortogonal. Como una preparación para el resultado que nos da la respuesta, veamos la siguiente :

Proposición 19 *Sean E_1, E_2 subespacios de E y sean $\pi_1 : E \longrightarrow E_1$ y $\pi_2 : E \longrightarrow E_2$ las proyecciones ortogonales. Entonces $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$ si y sólo si $E_1 \perp E_2$.*

Demostración. Si $E_1 \perp E_2$ entonces dado $x \in E$ se tiene que $\langle y, \pi_1(x)\rangle = 0$ para todo y en E_2. Luego, $\pi_1(x) \in E_2^{\perp}$.
Notar que $\pi_2(z) = 0$ si $z \in E_2^{\perp}$. En efecto: $\|\pi_2(z)\|^2 = \langle \pi_2(z), \pi_2(z)\rangle = \langle z, \pi_2^2(z)\rangle = \langle z, \pi_2(z)\rangle = 0$. Esto implica que $\pi_2 \circ \pi_1(x) = 0$.

Inversamente, si $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$ entonces $\pi_1 x \in E_2^{\perp}$ para todo x en E. En efecto: Si $\pi_2(\pi_1(x)) = 0$ entonces $\pi_1(x) \in \ker \pi_2$. Como $E = \ker \pi_2 \oplus im\, \pi_2$ se deduce que $E_2^{\perp} = (im\, \pi_2)^{\perp} = \ker \pi_2$. Así, $\pi_1(x) \in E_2^{\perp}$.
Luego, $E_1 \subset E_2^{\perp}$. En efecto: Si $z \in E_1 = im\, \pi_1$ entonces $z = \pi_1(x)$, $x \in E$, luego $z \in E_2^{\perp}$.
Sean ahora $x_1 \in E_1$ (luego, $x_1 \in E_2^{\perp}$,) y $x_2 \in E_2$. Entonces $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Por lo tanto, $E_1 \perp E_2$. ■

Teorema 20 *$\pi_1 + \pi_2$ es una proyección sobre $E_1 \oplus E_2$ si y sólo si $E_1 \perp E_2$.*

Demostración. Sea $\pi := \pi_1 + \pi_2$. Vamos a ver que π es la proyección de E sobre $E_1 \oplus E_2$.
Claramente π es lineal, pues es la suma de transformaciones lineales. También π es autoadjunta, por lo mismo. Resta ver que $\pi^2 = \pi$. Para esto, vamos a

ver que $\pi(x_1+x_2)=x_1+x_2$ en $E_1\oplus E_2$ y $\pi(x)=0$ en $(E_1\oplus E_2)^\perp$. Esto probará que π es la proyección de E sobre $E_1\oplus E_2$.
En efecto: Por linealidad, si $x_1+x_2\in E_1\oplus E_2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\pi(x_1+x_2) &= \pi(x_1)+\pi(x_2)\\
&= (\pi_1+\pi_2)(x_1)+(\pi_1+\pi_2)(x_2)\\
&= \pi_1(x_1)+(\pi_1+\pi_2)(x_2)\\
&= \pi_1(x_1)+\pi_2(x_2)\\
&= x_1+\pi_2(x_2)\\
&= x_1+x_2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, observemos que:

$$(E_1\oplus E_2)^\perp = E_1^\perp\cap E_2^\perp \qquad (*)$$

Luego: Si $x\in(E_1\oplus E_2)^\perp$ entonces $x\in E_1^\perp$ y $x\in E_2^\perp$, de esta manera $x\in\ker\pi_1$ y $x\in\ker\pi_2$. Por lo tanto, $\pi(x)=\pi_1(x)+\pi_2(x)=0+0=0$.

Verifiquemos (*) :
Sea $x\in(E_1\oplus E_2)^\perp$ entonces $\langle x,x_1+x_2\rangle=0\;\forall\,x_1\in E_1,x_2\in E_2$. Luego, $\langle x,x_1\rangle=0$ (con $x_2=0$) y $\langle x,x_2\rangle=0$ (con $x_1=0$) lo que implica que $x\in E_1^\perp$ y $x\in E_2^\perp$. Por lo tanto, $x\in E_1^\perp\cap E_2^\perp$.
Inversamente, sea $x\in E_1^\perp\cap E_2^\perp$. Entonces $\langle x,x_1\rangle=0\;\forall\,x_1\in E_1$, $\langle x,x_2\rangle=0\;\forall\,x_2\in E_2$. Sea $y\in E_1\oplus E_2$. Entonces $y=y_1+y_2$; $y_1\in E_1$, $y_2\in E_2$. Luego: $\langle x,y\rangle=\langle x,y_1\rangle+\langle x,y_2\rangle=0+0=0$. Así $x\in(E_1\oplus E_2)^\perp$. De esta manera, hemos probado que $\pi_1+\pi_2$ es una proyección sobre $E_1\oplus E_2$.

Supongamos ahora que $\pi_1+\pi_2$ es una proyección ortogonal. Vamos a probar que $E_1\perp E_2$. Para esto probaremos, equivalentemente por Proposición 58, que $\pi_1\circ\pi_2=0$. En efecto: Por hipótesis,

$$(\pi_1+\pi_2)^2=\pi_1+\pi_2$$

o equivalentemente

$$(\pi_1 + \pi_2) \circ (\pi_1 + \pi_2) = \pi_1 + \pi_2$$

o sea,

$$\pi_1^2 + \pi_1 \circ \pi_2 + \pi_2 \circ \pi_1 + \pi_2^2 = \pi_1 + \pi_2$$

lo que es equivalente a

$$\pi_1 + \pi_1 \circ \pi_2 + \pi_2 \circ \pi_1 + \pi_2 = \pi_1 + \pi_2$$

de esta manera,

$$\pi_1 \circ \pi_2 + \pi_2 \circ \pi_1 = 0 \tag{8}$$

componiendo por π_1 a la derecha tenemos:

$$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1 + \pi_2 \circ \pi_1 = 0 \tag{9}$$

y componiendo en (8) por π_1 a la izquierda tenemos :

$$\pi_1 \circ \pi_2 + \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1 = 0.$$

Luego, sumando las expresiones anteriores da :

$$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1 + \underbrace{\pi_2 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \pi_2}_{=0 \text{ por } (8)} + \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1 = 0$$

así,

$$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1 = 0$$

y reemplazando esto último en (9) obtenemos :

$$\pi_2 \circ \pi_1 = 0$$

esto prueba el teorema. ∎

Lema 21 *Si $\pi : E \longrightarrow E_1$ es una proyección entonces $I - \pi$ es proyección sobre $E_1^{\perp}$.*

Demostración. Sea $\psi := I - \pi$. Es claramente autoadjunta y

$$\psi^2 = (I-\pi)^2 = I - 2\pi + \pi^2 = I - 2\pi + \pi = I - \pi = \psi.$$

Resta ver que $im\,\psi = E_1^{\perp}$.
Sea $x \in im\,\psi = im\,(I-\pi)$ entonces $x = y - \pi(y)$. Sea $z \in E_1 = im\,\pi$ entonces $z = \pi(w)$ y:

$$\begin{aligned}
\langle x, z\rangle &= \langle y - \pi(y), z\rangle \\
&= \langle y - \pi(y), \pi(w)\rangle \\
&= \langle \pi(y) - \pi^2(y), w\rangle \\
&= \langle \pi(y) - \pi(y), w\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

esto implica que $x \in E_1^{\perp}$.

Inversamente queremos probar : $E_1^{\perp} \subseteq im\,\psi$, equivalentemente:

$$(im\,\psi)^{\perp} \subseteq E_1$$

esto es

$$\ker\psi \subseteq E_1.$$

En efecto: Sea $x \in \ker\psi$ entonces $\psi(x) = 0$ esto es, $(I-\pi)(x) = 0$ o sea, $\pi(x) = x$. Por lo tanto, $x \in im\,\pi = E_1$, lo cual prueba el lema. ∎

Teorema 22 *$\pi_1 - \pi_2$ es una proyección si y sólo si $E_2 \subseteq E_1$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
E_2 \subseteq E_1 &\iff E_1^{\perp} \subseteq E_2^{\perp} \\
&\iff E_1^{\perp} \perp E_2 \quad \text{(Ejercicio)} \\
&\iff (I - \pi_1) + \pi_2 =: \varphi \quad \text{es proyección (Teorema 59 y Lema 60)} \\
&\iff I - (\pi_1 - \pi_2) =: \varphi \quad \text{es proyección} \\
&\overset{(*)}{\iff} \pi_1 - \pi_2 \quad \text{es proyección .}
\end{aligned}$$

(*) Si φ es proyección, entonces $I - \varphi = \pi_1 - \pi_2$ es proyección. Inversamente, si $\pi_1 - \pi_2$ es proyección entonces $I - (\pi_1 - \pi_2) =: \varphi$ lo es (por Lema 60). ∎

Veamos ahora el comportamiento del producto de proyecciones.

Teorema 23 *Sean $\pi_1 : E \longrightarrow E_1$ y $\pi_2 : E \longrightarrow E_2$ dos proyecciones ortogonales. Entonces $\pi_2 \circ \pi_1$ es una proyección sobre $E_1 \cap E_2$ si y sólo si $\pi_2 \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \pi_2$.*

Demostración. Supongamos que $\pi_2 \circ \pi_1 = \pi_1 \circ \pi_2$.
Vamos a ver que $\pi_2 \circ \pi_1 : E \longrightarrow E_1 \cap E_2$ es una proyección mostrando que:
(a) $(\pi_2 \circ \pi_1)(x) = x$ para cada $x \in E_1 \cap E_2$.
(b) $(\pi_2 \circ \pi_1)(x) = 0$ para cada $x \in (E_1 \cap E_2)^{\perp}$.

En efecto:
(a) Sea $x \in E_1 \cap E_2$ entonces

$$\begin{aligned}
\pi_2(\pi_1(x)) &= \pi_2(x) \quad \text{pues } x \in E_1 \\
&= x \quad \text{pues } x \in E_2.
\end{aligned}$$

(b) Primero observamos que $(E_1 \cap E_2)^{\perp} = E_1^{\perp} + E_2^{\perp}$ (Ejercicio). Luego, si $x \in (E_1 \cap E_2)^{\perp}$ entonces $x = x_1 + x_2$; $x_1 \in E_1^{\perp}$, $x_2 \in E_2^{\perp}$.

En consecuencia

$$\begin{aligned}\pi_2(\pi_1(x)) &= \pi_2(\pi_1(x_1)) + \pi_2(\pi_1(x_2))\\ &= \pi_2(0) + \pi_1(\pi_2(x_2))\\ &= 0 + \pi_1(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\pi_2 \circ \pi_1$ es una proyección. Entonces

$$\pi_2 \circ \pi_1 = (\pi_2 \circ \pi_1)^* = \pi_1^* \circ \pi_2^* = \pi_1 \circ \pi_2$$

esto prueba el teorema. ∎

0.3 Isometrías

Definición 24 *Sean E, F e.v. con producto interno. Una transformación lineal $\varphi : E \longrightarrow F$ es llamada isometría (o unitaria) si*

$$\langle \varphi(x_1), \varphi(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \qquad ;\, x_1, x_2 \in E.$$

Una caracterización la tenemos en el siguiente resultado.

Proposición 25 *φ es una isometría si y sólo si $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ para cada $x \in E$.*

Demostración.
(i) Suponer que φ es una isometría y tomar $x_1 = x_2 = x$.

(ii) $2\langle \varphi(x_1), \varphi(x_2) \rangle = \|\varphi(x_1 + x_2)\|^2 - \|\varphi(x_1)\|^2 - \|\varphi(x_2)\|^2$

$$= \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2$$
$$= 2\langle x_1, x_2 \rangle.$$

■

Observación : Si φ es una isometría, entonces φ es inyectiva.

Proposición 26 *Supongamos* $\dim E < \infty$ *y sea* $\varphi : E \longrightarrow E$ *una isometría. Entonces* φ *es un isomorfismo.*

Demostración. Es claro que φ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, notar que

$$\dim(im\,\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim E$$

luego, $im\,\varphi = E$ pues φ es inyectiva. (Teorema de dimensión). ■

Observación : En particular, en las condiciones anteriores, existe φ^{-1}.

Proposición 27 *Sea* $\dim E < \infty$ *y* $\varphi : E \longrightarrow E$*. Entonces* φ *es una isometría si y sólo si* $\varphi^{-1} = \varphi^*$*.*

Demostración.

(i) Sean $x \in E$, $y \in E$. Si φ es una isometría entonces $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Sea $z = \varphi(x)$ entonces $\varphi^{-1}(z) = x$. Por lo tanto, $\langle z, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^{-1}(z), y \rangle$ luego, $\langle \varphi^*(z), y \rangle = \langle \varphi^{-1}(z), y \rangle\ \forall\, y$. De esta manera, $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

(ii) Supongamos que $\varphi^* = \varphi^{-1}$. Entonces, para cada $x \in E$, $y \in E$:

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, \varphi^*\varphi(y) \rangle = \langle x, \varphi^{-1}\varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

■

Definición 28 *Una isometría* $\varphi : E \longrightarrow E$, *donde* $\dim E < \infty$, *se llama una rotación.*

Recordemos que si $\phi : E \rightarrow E$ es una transformación lineal, donde E es un espacio de dimensión finita, entonces la matriz de ϕ con respecto a cualquier base de E tiene el mismo valor del determinante. De esta manera, convenimos en denotar $det\phi$ a ese valor, y lo llamaremos el *determinante de la función* ϕ.

Observación : En vista de la fórmula $\varphi^* = \varphi^{-1}$, esto es, $\varphi\varphi^* = 1$, se tiene

$$(\det \varphi)^2 = 1$$

esto es, $\det \varphi = \pm 1$.

Definición 29 *Una rotación se llama propia si* $\det \varphi = 1$, *e impropia si* $\det \varphi = -1$.

Proposición 30 *Sea* E *un e.v. sobre* $\mathbb{R}$. *Los valores propios de una rotación son +1 ó -1 .*

Demostración. Sea λ valor propio de una rotación $\varphi : E \longrightarrow E$ con vector propio e. Entonces

$$\varphi(e) = \lambda e.$$

Luego $\|\varphi(e)\| = |\lambda|\|e\|$ pero, como φ es una isometría, se tiene que $\|e\| = |\lambda|\|e\|$. De esta manera, $\lambda = \pm 1$. ∎

Proposición 31 *El producto de rotaciones es una rotación.*

Demostración. Ejercicio.

Proposición 32 *La inversa de una rotación es una rotación.*

Demostración. Ejercicio.

0.3.1 Comparación con matrices

Si Q es una matriz correspondiente a una rotación $\varphi : E \longrightarrow E$; entonces la condición $\varphi^* = \varphi^{-1}$ es equivalente a decir que Q es invertible y

$$Q^{-1} = Q^T$$

donde Q^T es la matriz traspuesta (suponiendo coefientes reales, de otra manera, $Q^* = \overline{Q}^T$). Este tipo de matrices se llaman también *ortogonales*.

El siguiente resultado nos indica como construir matrices ortogonales (o rotaciones).

Teorema 33 *Una matriz Q de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

Sea $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Entonces $Q^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Sea $B = (b_{ij}) = Q^T Q$; entonces

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}a_{pj} \\ &= \langle (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}), (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \rangle \qquad (*) \end{aligned}$$

Si las columnas de Q son ortogonales :

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{10}$$

es decir, $B = I$.

inversamente, si $Q^T = Q^{-1}$, entonces $Q^TQ = I = B$, de manera que vale (10) y (*) muestra que las columnas son ortonormales. ■

Ejemplos

1) Es fácil ver que los vectores $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$. Así, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2) La matriz $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Ejercicios

1. Demuestre que $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ es ortogonal. Halle la rotación $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ asociada.

2. Sea $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi_1(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y)$ y $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(\frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{8}}{3}y, \frac{\sqrt{8}}{3}x + \frac{1}{3}y)$

(a) Verifique que φ_1 y φ_2 son rotaciones.

(b) Verifique que $\varphi_1 \circ \varphi_2$ es una rotación.

3. Demuestre que para cada $t \in \mathbb{R}$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

es ortogonal. Halle la transformación de rotación asociada.

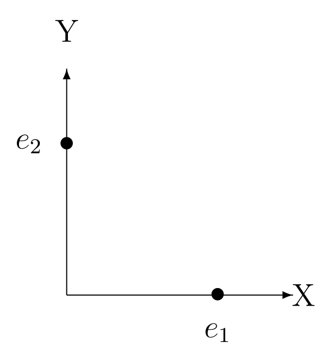
4. Sea Q una matriz ortogonal y v, $w \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\measuredangle(v, w) = \measuredangle(Qv, Qw).$$

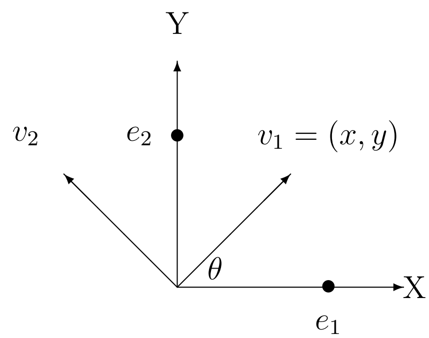
0.3.2 Aspectos geométricos

(a) $\mathbb{R}^2$.

Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$



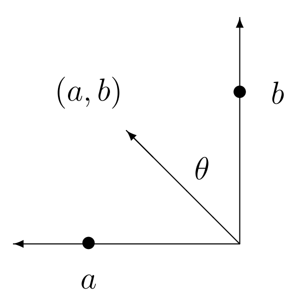
Si se rotan los ejes en un ángulo θ en sentido positivo alrededor del origen, entonces e_1 rota a un vector v_1 y e_2 rota a un vector v_2 tal que $\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.



Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(e_1) = v_1$, $T(e_2) = v_2$. Entonces T es una rotación pues la matriz correspondiente es ortogonal ya que $\{v_1, v_2\}$ son las columnas de la matriz y forman una base ortonormal.

Notemos que $v_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

En efecto :



Note que

$v_1 = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ donde $r = 1$

(ó se puede ver como: $\cos\theta = \dfrac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = \dfrac{x}{1}$, $\sin\theta = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \dfrac{y}{1}$).

Análogamente $\cos\theta = \dfrac{\text{cat. adj.}}{\text{hip.}} = b$, $\sin\theta = \dfrac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = -a$ luego $v_2 = (a, b) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

Luego: $T(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $T(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Por lo tanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^3$ se puede rotar en sentido positivo alrededor del eje x, eje y o eje z (así, los ejes x, y y z forman un sistema coordenado de la mano derecha).

Ejercicios

1. Una rotación positiva en un ángulo θ alrededor del eje z producirá una base $\{v, w, e_3\}$ donde v es vector obtenido al rotar e_1 y w es el vector obtenido al rotar e_2. Demuestre que

$$v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $Y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación correspondiente.

2. Una rotación positiva en un ángulo α alrededor del eje x producirá una base $\{e_1, v, w\}$ donde v es el vector obtenido al rotar e_2 y w es el vector obtenido al rotar e_3. Demuestre que

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Encuentre $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación correspondiente.

3. Una rotación positiva en un ángulo φ alrededor del eje y producirá una base $\{v, e_2, w\}$ donde v es el vector obtenido al rotar e_1 y w es el vector obtenido al rotar e_3. Demuestre que

$$v = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 0 \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Encuentre $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación correspondiente.

Sean Y, R y P las transformaciones de rotación de los ejercicios 1, 2 y 3. Las matrices Y, R y P para cualesquiera tres ángulos tienen interpretaciones geométricas similares a la de una matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$.

Sea M cualesquiera de estas matrices de rotación. Sea $u = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$. Entonces $r = Mu$ dará las coordenadas del vector obtenido al rotar el vector u.

Por ejemplo : $YR(u)$ representa una rotación positiva en un ángulo α alrededor del eje x seguida de una rotación positiva en un ángulo θ alrededor del eje z.

Recordemos que E_1 se dice un subespacio *estable* de E si $\varphi(E_1) \subseteq E_1$.

El principal resultado que caracteriza las rotaciones es el siguiente:

Teorema 34 *Sea φ una rotación. Entonces existe una descomposición de E en subespacios estables de dimensión 1 y 2 . Esto es,*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots E_r$$

donde $\dim E_i = 1$ *ó* $2 \quad \forall\, i = 1, \ldots, r$ *y* $\sum_{i=1}^{r} \dim E_i = \dim E$.

La demostración de este teorema se hará en pasos sucesivos:

Proposición 35 *Sea $p : E \longrightarrow E$ una rotación. E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean E_1 y E_2 los espacios correspondientes a los valores propios 1 y -1 respectivamente. Entonces $E_1 \perp E_2$.*

Demostración. Sea $x_1 \in E_1$ y sea $x_2 \in E_2$. Entonces $\varphi(x_1) = x_1$ y $\varphi(x_2) = -x_2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle x_1, x_2 \rangle &= \langle \varphi(x_1), \varphi(x_2) \rangle \qquad \text{pues } \varphi \text{ es isometría (rotación)} \\
&= \langle x_1, -x_2 \rangle \\
&= -\langle x_1, x_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. ∎

Notar que, en particular, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ pues si $x \in E_1$ y $x \in E_2$, entonces $-x = \varphi(x) = x$, lo que implica que $x = 0$.
Consideremos la suma (directa, ya que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$) de E_1 y E_2:

$$E_1 \oplus E_2,$$

entonces $E_1 \oplus E_2$ es estable bajo φ. En efecto : Si $x \in \varphi(E_1 \oplus E_2)$ entonces

$$\begin{aligned}
x &= \varphi(x_1 + x_2) \quad ; \quad x_1 \in E_1 \ , \ x_2 \in E_2 \\
&= \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \\
&= x_1 - x_2 \in E_1 \oplus E_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi(E_1 \oplus E_2) \subseteq E_1 \oplus E_2$.

Note que $E_1 = E_1^1 \oplus \cdots \oplus E_p^1$ donde p es la multiplicidad del valor propio 1; y $E_2 = E_1^2 \oplus \cdots \oplus E_q^2$ donde q es la multiplicidad del valor propio -1. Además, $\dim E_i^j = 1 \quad \forall \quad j = 1, 2$; para cada i (Ejercicio).

Proposición 36 *Sea $\varphi : E \longrightarrow E$ una rotación. Si F es estable bajo φ, entonces $F^\perp$ es estable bajo φ.*

Demostración. Queremos probar: $\varphi(F^{\perp}) \subseteq F^{\perp}$. Sea $x \in F^{\perp}$. Entonces, para $y \in F$:

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi^{*}(y) \rangle = \langle x, \varphi^{-1}(y) \rangle.$$

Notar que $\varphi^{-1}(y) \in F$ pues $\varphi(F) \subseteq F$. En efecto: $\varphi : F \to F$ implica que $\varphi^{-1} : F \to F$. Luego, $\langle \varphi(x), y \rangle = 0$, por lo tanto, $\varphi(x) \in F^{\perp}$.

En particular, concluimos que, si $F := (E_1 \oplus E_2)^{\perp}$, entonces $F^{\perp} = E_1 \oplus E_2$ es estable bajo φ (por lo visto antes), luego:

$$\varphi(F) \subseteq F \qquad (\text{ pues } F^{\perp\perp} = F \text{ }).$$

∎

En lo que sigue, denotaremos $F := (E_1 \oplus E_2)^{\perp}$.

Proposición 37 *La dimensión de F es par.*

Demostración. Supongamos que $\dim F$ es impar.
Notemos que $\varphi : F \longrightarrow F$ sigue siendo una rotación (por la Proposición 76). Consideremosla como una matriz. Entonces cuando calculamos los valores propios de φ debemos calcular las raíces del polinomio $p(\lambda) = \det(\varphi - \lambda I) = 0$.
Ahora, si el espacio vectorial es sobre $\mathbb{R}$, entonces en dimensión impar hay que ver si un polinomio de grado impar tiene o no raíces en $\mathbb{R}$. Pero sabemos que tal polinomio tiene al menos una raíz, digamos λ_0 y $\lambda_0 = \pm 1$ pues φ es rotación. Sea $e_0 \in F$ el vector propio asociado, esto es :

$$\varphi(e_0) = \lambda_0 e_0 \qquad , \quad e_0 \neq 0. \tag{11}$$

Notar que $e_0 \in F = (E_1 \oplus E_2)^{\perp}$. Pero, por (11), $e_0 \in E_1$ ó $e_0 \in E_2$; lo que es una contradicción. Por lo tanto, la dimensión de F es par. ∎

En particular, note que φ no tiene vectores propios en F.

Consideremos ahora la transformación :

$$\psi = \varphi + \varphi^* = \varphi + \varphi^{-1} : F \longrightarrow F.$$

Notar que ψ es autoadjunta : $\psi^* = \varphi^* + \varphi^{**} = \varphi^* + \varphi = \psi$.

Luego, existe un vector propio para ψ. Sea λ el correspondiente valor propio, entonces $\psi(e) = \lambda e$, $e \in F, e \neq 0$, esto es :

$$\varphi(e) + \varphi^{-1}(e) = \lambda e \qquad , e \in F.$$

Luego, multiplicando por φ, se tiene

$$\varphi^2(e) = -e + \lambda\varphi(e) \qquad , e \in F. \tag{12}$$

Ya que φ no tiene vectores propios en F, entonces $\{e, \varphi(e)\}$ es L.I. En efecto : Si fueran L.D. entonces $e = \alpha\varphi(e)$ esto implica que $\varphi^2(e) = -\alpha\varphi(e) + \lambda\varphi(e) = (\lambda - \alpha)\varphi(e)$. Luego, $\varphi(\varphi(e)) = (\lambda - \alpha)\varphi(e)$. Por lo tanto, $\varphi(e)$ es vector propio de φ en F.

Sea $F_1 :=$ subespacio generado por $\{e, \varphi(e)\} =: \langle\{e, \varphi(e)\}\rangle$. Claramente, $\dim F_1 = 2$.

Proposición 38 $\varphi(F_1) \subseteq F_1$.

Demostración. Sea $x \in F_1$ entonces $x = \alpha e + \beta\varphi(e)$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \alpha\varphi(e) + \beta\varphi^2(e) \\
&= \alpha\varphi(e) + \beta[-e + \lambda\varphi(e)] \qquad \text{por (12)} \\
&= \alpha\varphi(e) + (-\beta e) + \beta\lambda\varphi(e) \\
&= (\alpha + \beta\lambda)\varphi(e) - \beta e \in \langle\{e, \varphi(e)\}\rangle = F_1.
\end{aligned}$$

Luego, se puede definir $\varphi : F_1 \longrightarrow F_1$. Claramente φ es otra vez una isometría.

Así, $\varphi(F_1^\perp) \subseteq F_1^\perp$ y se puede repetir la construcción para $F_1^\perp$.

Continuando de esta manera, se puede finalmente obtener una descomposición ortogonal de F en subespacios estables mutuamente ortogonales, esto es:

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r \quad \text{y} \quad \sum \dim F_j = \dim F = \text{ par }.$$

Luego,

$$\begin{aligned} E &= E_1 \oplus E_2 \oplus F \qquad (F = (E_1 \oplus E_2)^{\perp}) \\ &= E_1 \oplus E_2 \oplus F_1 \cdots \oplus F_r. \end{aligned}$$

Claramente $\dim F_i = 2 \; \forall\, i = 1, \ldots, r$ y $E_1 = E_1^1 \oplus E_2^1 \oplus \cdots E_p^1$; $\dim E_i^1 = 1$, $i = 1, \ldots, p$, $E_2 = E_1^2 \oplus E_2^2 \oplus \cdots \oplus E_q^2$; $\dim E_j^2 = 1$, $j = 1, \ldots, q$.
Esto prueba el teorema. ∎

Observación : La matriz de rotación tiene la forma canónica (en general)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \varepsilon_p & & & & 0 \\ & & & \cos\theta_1 \sin\theta_1 & & & \\ & & & -\sin\theta_1 \cos\theta_1 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & & \cos\theta_n \sin\theta_n \\ & & & & & & -\sin\theta_n \cos\theta_n \end{pmatrix} ; \text{ con } \varepsilon_i = \pm 1.$$

0.3.3 Transformaciones antisimétricas

Definición 39 *Una transformación lineal $\psi : E \longrightarrow E$ se llama antisimétrica si $\psi^* = -\psi$.*

Proposición 40 *ψ es antisimétrica si y sólo si $\langle \psi(x), y\rangle + \langle x, \psi(y)\rangle = 0$ para todo $x, y \in E$.*

Demostración.
$\Longrightarrow)\langle \psi(x), y\rangle + \langle x, \psi(y)\rangle = \langle x, \psi^*(y)\rangle + \langle x, \psi(y)\rangle = \langle x, -\psi(y)\rangle + \langle x, \psi(y)\rangle = 0.$

$\Longleftarrow)\langle(\psi^* + \psi)(x), y\rangle = \langle \psi^*(x), y\rangle + \langle \psi(x), y\rangle = \langle x, \psi(y)\rangle + \langle \psi(x), y\rangle = 0$ para todo y. Esto implica que $(\psi^* + \psi)(x) = 0$ para todo x. Por lo tanto, $\psi^* = -\psi$. ∎

Proposición 41 *ψ es antisimétrica si y sólo si $\langle x, \psi(x)\rangle = 0$ para todo x.*

Demostración.
$\Longrightarrow)$ Tomar $x = y$ en la proposición anterior. De esta manera, se obtiene $\langle \psi(x), x\rangle + \langle x, \psi(x)\rangle = 0$; esto es, $\langle x, \psi(x)\rangle = 0$.

$\Longleftarrow)$ Reemplazando x por $x + y$, obtenemos $\langle x + y, \psi(x + y)\rangle = 0$ esto es:

$$\underbrace{\langle x, \psi(x)\rangle}_{=0} + \langle x, \psi(y)\rangle + \langle y, \psi(x)\rangle + \underbrace{\langle y, \psi(y)\rangle}_{=0} = 0,$$

luego $\langle x, \psi(y)\rangle + \langle y, \psi(x)\rangle = 0$. Por lo tanto, ψ es antisimétrica por proposición anterior. ∎

La siguiente proposición nos dice acerca de los valores propios de una transformación lineal antisimétrica.

Proposición 42 *Si ψ es antisimétrica y λ es valor propio de ψ entonces $\lambda = 0$.*

Demostración. Sea λ valor propio de ψ. Sea $e \neq 0$ tal que $\psi(e) = \lambda e$, entonces

$$0 = \langle e, \psi(e) \rangle = \langle e, \lambda e \rangle = \lambda \langle e, e \rangle.$$

Por lo tanto, $\lambda = 0$. ∎

En la siguiente proposición $\dim E < \infty$.

Proposición 43 *Si ψ es antisimétrica entonces* $\det \psi = (-1)^n \det \psi$.

Demostración. Como $\psi^* = -\psi$ entonces $\det \psi^* = (-1)^n \det \psi$. Luego $\det \psi = (-1)^n \det \psi$. ∎

Corolario 44 *Si ψ es antisimétrica y* $\dim E$ *es impar, entonces* $\det \psi = 0$.

Proposición 45 *Si ψ es antisimétrica entonces ψ es normal.*

Demostración. $\psi^* \psi = -\psi \psi = \psi(-\psi) = \psi \psi^*$. ∎

0.3.4 Forma matricial (o canónica) de una transformación antisimétrica

Sea $\varphi := \psi^2$, donde ψ es una transformación antisimétrica. Entonces $\varphi^* = (\psi^2)^* = \psi^* \psi^* = -\psi(-\psi) = \psi^2 = \varphi$; esto es, φ es autoadjunta. Luego, existe una base ortonormal $\{e_n\}$ de E que consiste de vectores propios, digamos $\{\lambda_n\}$, de φ. Así:

$$\varphi(e_n) = \lambda_n e_n.$$

Más precisamente, φ tiene forma matricial diagonal:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora que en este caso especial ($\varphi := \psi^2$ con ψ antisimétrica), se tiene:

$$\lambda_i \leq 0 \ \forall\, i.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \lambda_i = \langle e_i, \lambda_i e_i \rangle &= \langle e_i, \varphi(e_i) \rangle \\ &= \langle e_i, \psi^2(e_i) \rangle \\ &= \langle \psi^*(e_i), \psi(e_i) \rangle \\ &= \langle -\psi(e_i), \psi(e_i) \rangle \\ &= -\langle \psi(e_i), \psi(e_i) \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Reordenemos ahora los vectores $\{e_i\}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, de manera tal que:

$$\lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \text{ y } \lambda_i = 0 \quad (i = p+1, \ldots, n).$$

Observación: p debe ser par. (Ejercicio).

Definamos una nueva base $\{a_n\}$ en E como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1 \ , \ a_2 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}} \psi(e_1) \ , \ a_3 = e_2 \ , \\ a_4 &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}} \psi(e_2) \ , \ \ldots \ , \ a_{p+1} = e_{p+1} \ , \ a_{p+2} = e_{p+2} \ , \ \ldots \end{aligned}$$

Entonces $\{a_i\}$ es una base ortonormal (Ejercicio), además

$$\begin{aligned}
\psi(a_1) &= \psi(e_1) = \sqrt{-\lambda_1}a_2 \\
\psi(a_2) &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}\psi^2(e_1) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}}\varphi(e_1) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-\lambda_1}}e_1 = -\sqrt{-\lambda_1}e_1 = -\sqrt{-\lambda_1}a_1 \\
\psi(a_3) &= \psi(e_2) = \sqrt{-\lambda_2}a_4 \\
\psi(a_4) &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}\psi^2(e_2) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}\varphi(e_2) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{-\lambda_2}}e_2 = -\sqrt{-\lambda_2}e_2 = -\sqrt{-\lambda_2}a_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz toma la forma:

$$\begin{pmatrix}
0 & -\sqrt{-\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\sqrt{-\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & -\sqrt{-\lambda_2} & & \\
0 & 0 & \sqrt{-\lambda_2} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

o, si definimos $K_j := \sqrt{-\lambda_j}$:

$$\begin{pmatrix}
0 & -K_1 & 0 & 0 & & & & & \\
K_1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -K_2 & & & & & \\
0 & 0 & K_2 & 0 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & 0 & -K_p & & \\
 & & & & & K_p & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}.$$

Ejercicios

1. Sea ψ una transformación antisimétrica. Sea
$$\varphi = (\psi + I) \circ (\psi - I)^{-1}.$$
   (a) Demuestre que φ es una rotación.
   (b) Demuestre que -1 no es un valor propio de φ.

2. Suponga que φ es una rotación y que -1 no es valor propio de φ. Demuestre que
$$\psi = (\varphi - I) \circ (\varphi + I)^{-1}$$
es antisimétrica.

3. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación normal. Muestre que existe $\lambda > 0$ y ψ rotación tal que
$$\varphi = \lambda\psi.$$

4. Sea φ una rotación. Demuestre que existe una familia continua φ_t $(0 \leq t \leq 1)$ de rotaciones tales que $\varphi_0 = I$ y $\varphi_1 = \varphi$.

5. Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de una rotación propia. Demuestre que
$$p(\lambda) = (-\lambda)^n p(\lambda^{-1}) \qquad ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ antisimétrica. Muestre que
$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \det \varphi \cdot \langle x, y \rangle.$$

7. Sea $\varphi : E \longrightarrow E$ una transformación lineal. Demuestre que
$$\varphi = \psi_1 + i\psi_2$$
donde ψ_1 y ψ_2 son autoadjuntas.

8. Sea $\varphi : E \longrightarrow E$ una transformación lineal que satisface $\varphi^* = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que φ es autoadjunta o antisimétrica.

0.3.5 Funciones bilineales simétricas

Definición 46 *Sea E e.v. sobre $\mathbb{R}$ y $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal. ϕ se dice simétrica si*

$$\phi(x, y) = \phi(y, x) \qquad \forall\, x, y \in E.$$

Proposición 47 *Sea ϕ bilineal simétrica. Se define la función $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (no lineal) por :*

$$\psi(x) = \phi(x, x).$$

Entonces ψ satisface la identidad del paralelogramo :

$$\psi(x + y) + \psi(x - y) = 2(\psi(x) + \psi(y)).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\psi(x+y) &= \phi(x+y, x+y) = \phi(x,x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) + \phi(y,y) \\
&= \phi(x,x) + 2\phi(x,y) + \phi(y,y) \qquad \text{pues } \phi \text{ es simétrica} \\
&= \psi(x) + 2\phi(x,y) + \psi(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x-y) &= \phi(x-y, x-y) = \phi(x,x) - \phi(y,x) - \phi(x,y) + \phi(y,y) \\
&= \phi(x,x) - 2\phi(x,y) + \phi(y,y) \\
&= \psi(x) - 2\phi(x,y) + \psi(y).
\end{aligned}$$

Sumando obtenemos : $\psi(x + y) + \psi(x - y) = 2(\psi(x) + \psi(y))$. ■

Definición 48 *Una función $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua que satisface la identidad del paralelógramo se llama una función cuadrática.*

Cada función bilineal simétrica da origen a una función cuadrática (tomando $x = y$). Veremos que, inversamente, cada función cuadrática puede ser obtenida de esta forma.

Teorema 49 *Sea $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática. Entonces existe una función bilineal simétrica $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\psi(x) = \phi(x, x).$$

Demostración. Sea

$$\phi(x, y) := \frac{1}{2}\{\psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y)\}. \tag{13}$$

Probaremos que ϕ es bilineal y simétrica. Luego a fin de ver que $\psi(x) = \phi(x, x)$, definimos $\psi_1(x) := \phi(x, x)$ y se tiene:

$$\begin{aligned} \psi_1(x+y) &= \phi(x+y, x+y) \\ &= \phi(x, x) + 2\phi(x, y) + \phi(y, y) \\ &= \psi_1(x) + 2\phi(x, y) + \psi_1(y). \end{aligned}$$

Luego, $\phi(x, y) = \frac{1}{2}\{\psi_1(x+y) - \psi_1(x) - \psi_1(y)\}$. De esta manera, por (13)

$$\psi_1(x+y) - \psi_1(x) - \psi_1(y) = \psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y) \quad \forall\, x\ , \forall\, y.$$

Además, con $x = -y$ tenemos

$$\psi_1(0) - \psi_1(x) - \psi_1(-x) = \psi(0) - \psi(x) - \psi(-x) \qquad (*)$$

pero $\psi(0) = 0$ y $\psi_1(0) = 0$ ya que ψ y ψ_1 satisfacen la identidad del paralelógramo . En efecto,

$$\psi(x+y) + \psi(x-y) \;=\; 2(\psi(x) + \psi(y))$$

Sea $x = y = 0$ entonces $2\psi(0) = 2(2\psi(0)) = 4\psi(0)$ luego, $2\psi(0) = 0$. Por lo tanto, $\psi(0) = 0$.
Luego, ya que

$$\psi(x+y) + \psi(x-y) = 2(\psi(x) + \psi(y))$$

con $x = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \psi(y) + \psi(-y) &= 2(\psi(0) + \psi(y)) \\ \psi(y) + \psi(-y) &= 2\psi(y) \\ \psi(-y) &= \psi(y). \end{aligned}$$

Así concluimos de (*) que $2\psi_1(x) = 2\psi(x)$, esto es, $\psi_1(x) = \psi(x)$. Esto prueba que : $\phi(x, x) = \psi(x)$.

Resta ver que ϕ es bilineal y simétrica.
(a) Simetría.

$$\phi(y, x) = \frac{1}{2}\{\psi(y+x) - \psi(y) - \psi(x)\} = \frac{1}{2}\{\psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y)\} = \phi(x, y).$$

(b) $\phi(x_1 + x_2, y) = \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$.
En efecto, de (13) :

$$\begin{aligned} 2\phi(x_1 + x_2, y) &= \psi(x_1 + x_2 + y) - \psi(x_1 + x_2) - \psi(y) \\ 2\phi(x_1, y) &= \psi(x_1 + y) - \psi(x_1) - \psi(y) \\ 2\phi(x_2, y) &= \psi(x_2 + y) - \psi(x_2) - \psi(y). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & 2\{\phi(x_1 + x_2, y) - \phi(x_1, y) - \phi(x_2, y)\} \\ \overset{(*)}{=} & \{\psi(x_1 + x_2 + y) + \psi(y)\} - \{\psi(x_1 + y) + \psi(x_2 + y)\} \\ - & \{\psi(x_1 + x_2) - \psi(x_1) - \psi(x_2)\} \end{aligned}$$

Como ϕ satisface la identidad del paralelogramo, por hipótesis, se tiene:

$$\psi(x_1+x_2+y)+\psi(y) = \frac{1}{2}\{\psi(x_1+x_2+2y)+\psi(x_1+x_2)\} \text{ (con } x = x_1+x_2+y \text{ , } y = y) \tag{14}$$

y

$$\psi(x_1+y)+\psi(x_2+y) = \frac{1}{2}\{\psi(x_1+x_2+2y)+\psi(x_1-x_2)\} \text{ (con } x = x_1+y \text{ , } y = x_2+y). \tag{15}$$

Restando (14) y (15) se obtiene; usando otra vez identidad del parale-lógramo:

$$\begin{aligned}
\{\psi(x_1+x_2+y)+\psi(y)\} &- \{\psi(x_1+y)+\psi(x_2+y)\} \\
&= \frac{1}{2}\{\psi(x_1+x_2)-\psi(x_1-x_2)\} \\
&= \frac{1}{2}\{\psi(x_1+x_2)-[2(\psi(x_1)+\psi(x_2))-\psi(x_1+x_2)]\} \\
&= \frac{1}{2}\{2\psi(x_1+x_2)-2\psi(x_1)-2\psi(x_2)\} \\
&= \psi(x_1+x_2)-\psi(x_1)-\psi(x_2).
\end{aligned}$$

esto es,

$$\{\psi(x_1+x_2+y)+\psi(y)\}-\{\psi(x_1+y)+\psi(x_2+y)\} = \psi(x_1+x_2)-\psi(x_1)-\psi(x_2). \tag{16}$$

Si ponemos (16) en (*) obtenemos : $\phi(x_1+x_2,y)-\phi(x_1,y)-\phi(x_2,y) = 0$ lo cual verifica (b).

(c) $\phi(\lambda x, y) = \lambda\phi(x, y)$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
En efecto : Colocando en (b) $x_1 = x$ y $x_2 = -x$ se obtiene:

$$\phi(0, y) = \phi(x, y) + \phi(-x, y)$$

pero, $\phi(0, y) = \frac{1}{2}\{\psi(y) - \psi(0) - \psi(y)\} = \frac{1}{2}\{\psi(0)\} = 0$ (pues ψ cuadrática implica $\psi(0) = 0$). Luego,

$$\phi(-x, y) = -\phi(x, y). \tag{17}$$

Concluimos que:

$$\phi(-kx,y) = -k\phi(x,y) \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

En efecto : de (17) y (b) :

$$\phi(-2x,y) = \phi(-x-x,y) = \phi(-x,y)+\phi(-x,y) = -\phi(x,y)-\phi(x,y) = -2\phi(x,y).$$

Por inducción se obtiene (18) (Ejercicio).
Análogamente concluimos que

$$\phi(kx,y) = k\phi(x,y) \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{Q}$. Entonces $\lambda = \frac{p}{q}$, p y q enteros. Entonces

$$q\phi(\frac{p}{q}x,y) = \phi(q \cdot \frac{p}{q}x,y) = \phi(px,y) = p\phi(x,y).$$

Luego,

$$\phi(\frac{p}{q}x,y) = \frac{p}{q}\phi(x,y). \tag{20}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces existe una sucesión λ_n en $\mathbb{Q}$ tal que $\lambda_n \to \lambda$.
Ahora notamos que como ψ es continua entonces ϕ es continua y, luego, como

$$\phi(\lambda_n x,y) = \lambda_n\phi(x,y) \qquad \text{por (20)}$$

se obtiene, haciendo $n \to \infty$, que $\phi(\lambda x,y) = \lambda\phi(x,y)$. Esto prueba el teorema. ∎

Observación: De esta manera probamos que hay una correspondencia inyectiva entre funciones bilineales simétricas y funciones cuadráticas.

0.3.6 El caso de dimensión finita; forma diagonal de una función cuadrática

Sea E e.v. de dimensión finita y $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal simétrica. Sea $\{e_i\}$ una base de E. Entonces, dados x, $y \in E$:

$$x = \sum x_i e_i \quad , \quad y = \sum y_j e_j .$$

Luego:

$$\phi(x, y) = \sum_i \sum_j x_i y_j \phi(e_i, e_j).$$

Si ponemos $x = y$ obtenemos la función cuadrática:

$$\psi(x) = \sum_i \sum_j x_i x_j \phi(e_i, e_j) \tag{21}$$

lo cual se puede reescribir como:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(e_1, e_1) & \cdots & \phi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi(e_n, e_1) & \cdots & \phi(e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esta última representación de ψ se llama *forma* cuadrática (en dimensión finita). Nótese que, como ϕ es simétrica, entonces la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \phi(e_1, e_1) & \cdots & \phi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi(e_n, e_1) & \cdots & \phi(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

es autoadjunta (pues $\phi(e_i, e_j) = \phi(e_j, e_i)$ por definición de bilineal simétrica).

Recordemos ahora que, para funciones bilineales simétricas, existe una base ortogonal $\{v_n\}$ de E tal que ϕ tiene forma diagonal, esto es:

$$\phi(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

En consecuencia: Existe una base ortonormal $\{v_n\}$ de E donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En tal caso, se escribe:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_x^2. \end{aligned}$$

esto es, el polinomio cuadrático que representa a ψ no tiene "términos mixtos". Además, cualquier forma cuadrática tiene una representación diagonal de esta forma.

Ejemplo: Consideremos la siguiente forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\psi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 12x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Entonces

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = (a_{ij})$.

Una forma de *diagonalizar* ψ, esto es, escribirlo como polinomio sin términos mixtos, es la siguiente:

Caso 1. Si $a_{11} \neq 0$ hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) \\ x_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ x_n &= y_n \end{aligned}$$

lo que lleva a la ecuación

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}y_1^2 + \psi_1(y_2, \ldots, y_n)$$

donde ψ_1 es también un polinomio cuadrático.

Caso 2. Si $a_{11} = 0$ pero, por ejemplo, $a_{12} \neq 0$, hacemos la sustitución

$$x_1 = y_1 + y_2 \ , \ x_2 = y_1 - y_2 \ , \ x_3 = y_3 \ , \ \ldots \ , \ x_n = y_n$$

lo cual lleva a la ecuación

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \sum b_{ij} y_i y_j \qquad (*)$$

donde $(b_{11}, b_{22}) \neq (0, 0)$ y se puede aplicar el caso 1. (Note que puede ser aún $b_{11} = 0$).

Caso 3. Para realizar un cambio en el caso $a_{11} = 0$, pero $a_{ij} \neq 0$ con $i \neq j$, se hace

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + y_j \\ x_j &= y_i - y_j \\ x_p &= y_p \text{ si } p \neq i \ , \ p \neq j \end{aligned}$$

Esto lleva a una forma como (*) con $(b_{ii}, b_{jj}) \neq (0, 0)$ (o sea $b_{ii} \neq 0$ o $b_{jj} \neq 0$).

Usemos este método en el ejemplo anterior: Allí $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, luego hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{1}{2}((-6)y_2) = y_1 + 3y_2 \\ x_2 &= y_2, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= 2(y_1 + 3y_2)^2 - 12(y_1 + 3y_2)y_2 + 5y_2^2 \\ &= 2[y_1^2 + 6y_1y_2 + 9y_2^2] - 12y_1y_2 - 36y_2^2 + 5y_2^2 \\ &= 2y_1^2 + 12y_1y_2 + 18y_2^2 - 12y_1y_2 - 36y_2^2 + 5y_2^2 \\ &= 2y_1^2 - 13y_2^2 \end{aligned}$$

que es la forma diagonal pedida.

Veamos otro ejemplo:
Sea $\psi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 16x_1x_3 + 14x_2x_3 + 5x_3^2$ entonces la matriz simétrica perteneciente a la forma cuadrática anterior es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -4 & 1 & 7 \\ -8 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La idea para obtener A es la siguiente: La matriz autoadjunta $A = (a_{ij})$ que representa a $\psi(x_1, x_2, x_3)$ tiene las componentes a_{ii} de la diagonal iguales a los coeficientes de x_i^2 y las componentes a_{ij} y a_{ji} iguales cada una a la mitad del coeficiente x_ix_j.
Diagonalizemos ahora a ψ: Como $a_{11} \neq 0$ hacemos la sustitución:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{1}{2}((-4)y_2 + (-8)y_3) = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\psi(x_1,x_2,x_3) &= 2(y_1+2y_2+4y_3)^2-8(y_1+2y_2+4y_3)y_2+y_2^2\\
&- 16(y_1+2y_2+4y_3)y_3+14y_2y_3+5y_3^2\\
&= (y_1+2y_2+4y_3)[2y_1+4y_2+8y_3-8y_2-16y_3]\\
&+ y_2^2+14y_2y_3+5y_3^2\\
&= (y_1+2y_2+4y_3)(2y_1-4y_2-8y_3)+y_2^2+14y_2y_3+5y_3^2\\
&= 2y_1^2-4y_1y_2-8y_1y_3+4y_1y_2-8y_2^2-16y_2y_3\\
&+ 8y_1y_3-16y_2y_3-32y_3^2+y_2^2+14y_2y_3+5y_3^2\\
&= 2y_1^2-7y_2^2-18y_2y_3-27y_3^2
\end{aligned}
$$

esto es: $\psi(x_1,x_2,x_3)=2y_1^1-(7y_2^2+18y_2y_3+27y_3^2)=2y_1^2-\psi_1(y_2,y_3)$ donde $\psi_1(y_2,y_3)=7y_2^2+18y_2y_3+27y_3^2$ es un polinomio cuadrático donde volvemos a aplicar la sustitución. Aquí

$$A_1=\begin{pmatrix}7&9\\9&27\end{pmatrix}$$

luego, sea

$$
\begin{aligned}
y_1 &= z_1\\
y_2 &= z_2-\frac{1}{7}(9z_3)=z_2-\frac{9}{7}z_3\\
y_3 &= z_3
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned}
\psi_1(y_2, y_3) &= 7(z_2 - \frac{9}{7}z_3)^2 + 18(z_2 - \frac{9}{7}z_3)z_3 + 27z_3^2 \\
&= (z_2 - \frac{9}{7}z_3)[7z_2 - 9z_3 + 18z_3] + 27z_3^2 \\
&= (z_2 - \frac{9}{7}z_3)(7z_2 + 9z_3) + 27z_3^2 \\
&= \frac{1}{7}(7z_2 - 9z_3)(7z_2 + 9z_3) + 27z_3^2 \\
&= \frac{1}{7}(49z_2^2 - 81z_3^2) + 27z_3^2 \\
&= 7z_2^2 + \frac{81}{7}z_3^2 + 27z_3^2 = 7z_2^2 + (\frac{81}{7} + 27)z_3^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 7z_2^2 - (\frac{81}{7} + 27)z_3^2$ es la forma diagonal pedida.

El siguiente resultado es fundamental para la próxima definición.

Teorema 50 *Sea ϕ una forma bilineal simétrica en E. Entonces existe una base de E en la cual ϕ se representa por una matriz diagonal. Además, cualquier otra matriz diagonal tiene el mismo número P de componentes positivas y el mismo número N de componentes negativas.*

Demostración. Sabemos, por teorema anterior, que existe una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E en la cual ϕ se representa por una matriz diagonal, por ejemplo, con P y N componentes positivas y negativas respectivamente. Supongamos ahora que $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es otra base de E en la cual ϕ se representa también por una matriz diagonal, por ejemplo, con P' y N' componentes positivas y negativas respectivamente. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que en cada matriz aparecen primero las componentes positivas. Como $P + N = P' + N'$ ($\dim(ran\,\phi)$) es suficiente probar que $P = P'$. Sea $U :=$ subespacio generado por $\{u_1, \ldots, u_p\}$ y $W :=$ subespacio generado por $\{w_{P'+1}, \ldots, w_n\}$. Entonces : $\phi(v, v) > 0$ para todo $v \in U$ y $\phi(v, v) \leq 0$

para todo $v \in W$, con $v \neq 0$.
Note que : $U \cap W = \{0\}$ y observemos que $\dim U = P$ y $\dim W = n - P'$.
Luego,

$$\begin{aligned}
\dim(U + W) &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \quad \text{(Teorema de dimensión)} \\
&= P + (n - P') - 0 \\
&= P - P' + n.
\end{aligned}$$

Pero : $\dim(U + W) \leq \dim E = n$; luego $P - P' + n \leq n$ ó $P \leq P'$.
Similarmente, $P' \leq P$ (intercambiando el rol de P por P' en el argumento anterior). Luego, $P = P'$. ∎

Corolario 51 *Cualquier forma cuadrática (real) ψ tiene una representación única en la forma*

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

Observación: El resultado anterior a veces se enuncia como la *Ley de Inercia* o el *teorema de Sylvester.*

Definición 52 *La signatura de una forma cuadrática es el número de componentes positivas menos el número de componentes negativas.*

Definición 53 *Una forma bilineal simétrica ϕ se llama semidefinida no negativa si*

$$\psi(x) = \phi(x, x) \geq 0 \quad \forall\, x \in E$$

y se dice que es definida positiva si

$$\psi(x) = \phi(x, x) > 0 \quad \forall\, x \in E, x \neq 0.$$

Ejemplos

1) La forma bilineal $\psi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 12x_1x_2 + 5x_2^2$ se escribe en forma diagonal como

$$\psi(x_1, x_2) = 2y_1^2 - 13y_2^2;$$

luego $P = 1$ y $N = 1$. Por lo tanto, $S = 0$.

2) La forma bilineal $\psi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 16x_1x_3 + 14x_2x_3 + 5x_3^2$ se escribe en forma diagonal como

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 7z_2^2 - (\frac{81}{7} + 27)z_3^2$$

luego $P = 1$ y $N = 2$. Así, $S = -1$.

3) Hallar una transformación de coordenadas que diagonalice la forma cuadrática

$$\psi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

La matriz simétrica que representa a ψ es $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Método 1. Hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{1}{2}(-2y_2) = y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_2. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= 2(y_1 + y_2)^2 - 4(y_1 + y_2)y_2 + 5y_2^2 \\ &= 2[y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2] - 4y_1y_2 - 4y_2^2 + 5y_2^2 \\ &= 2y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2 - 4y_1y_2 - y_2^2 \\ &= 2y_1^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Así, $P = 2$ y luego, $S = 2$.

Método 2. Buscamos los valores propios de la matriz A :

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 2)(\lambda - 5) - 4 \\
&= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\
&= (\lambda - 6)(\lambda - 1).
\end{aligned}$$

Los valores propios son $\lambda = 6$ y $\lambda = 1$. Como son diferentes, se tiene que existe P invertible tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Más precisamente:

$$\psi(z_1, z_2) = 6z_1^2 + z_2^2.$$

De esta manera, $S = 2$.
Nótese que el cambio de coordenadas con respecto al método 1 es diferente.

0.4 Ejercicios de Recapitulación

1. Sea E un espacio vectorial con producto interno $\langle \, , \rangle$. Recuerde que $L(E; E) = \{f : E \to E : f$ es lineal $\}$ y $B(E \times E) = \{b : E \times E \to \mathbb{R} :$ b es bilineal $\}$. Sea $\rho : L(E; E) \to B(E \times E)$ definida como

$$\rho(\phi)(x, y) = \langle \phi(x), y \rangle.$$

   a) Demuestre que ρ es lineal.

   b) Demuestre que ρ es inyectiva.

   c) Demuestre que ρ es sobreyectiva.

2. Sea $\phi : E \to E$ una transformación lineal autoadjunta. Sean λ_1, λ_2 valores propios de ϕ. Suponga que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Demuestre que $E(\lambda_1) \perp E(\lambda_2)$.

3. Sea π una proyección ortogonal definida en un espacio con producto interno $(E, \langle\, , \rangle)$. Demuestre que $E = Ker\pi \oplus Im\pi$.

4. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya representación matricial es R, con

$$R = \begin{pmatrix} cos(135°) & sen(135°) & 0 \\ -sen(135°) & cos(135°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(30°) & 0 & sen(30°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(30°) & 0 & cos(30°) \end{pmatrix}$$

Demuestre que φ es una rotación. Interprete esta rotación geométricamente.

5. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y)$. Demuestre que ϕ es una rotación.

6. Sean E un espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi : E \to E$ una transformación lineal.

   (a) Demuestre que $(Ker(\varphi^*))^\perp = Im(\varphi)$. Concluya que

   $$E = Im(\varphi) \bigoplus Ker(\varphi^*).$$

   (b) Si φ es normal entonces $Ker(\varphi) = Ker(\varphi^*)$. Concluya que

   $$E = Im(\varphi) \bigoplus Ker(\varphi).$$

   (c) Si φ es normal y v es un vector tal que $\varphi^2(v) = 0$ entonces $\varphi(v) = 0$.

7. Sea $\phi : E \to E$ una transformación lineal definida en un espacio E con producto interno.

   (a) Suponga que ϕ es normal. Demuestre que $\phi - \lambda I$ es también normal.

(b) Demuestre que $(ker\phi^*) = (Im\phi)^\perp$.

(c) Demuestre que $Im\phi^* \subseteq (ker\phi)^\perp$.

8. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación normal. Demuestre que existe $\lambda > 0$ y una rotación ψ tal que $\phi = \lambda\psi$.

9. Sea $E = \mathbb{C}$ con el producto interno $\langle z, w\rangle = Rez\bar{w}$. Sea $z \in \mathbb{C}$ y $M_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definido por $M_z(w) = zw$

   (a) Verifique que M_z es lineal.

   (b) Demuestre que $(M_z)^* = M_{\bar{z}}$.

   (c) Para qué números complejos z es M_z autoadjunto?

   (d) Para cuales z es M_z una rotación?

   (e) Para cuales z es M_z antisimétrica?

10. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(e_1) = (1+i, 2)$, $T(e_2) = (i, i)$, donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$. Hallar T^* . ¿ Es T normal ? ¿ Es T autoadjunta ?

11. Sea E espacio vectorial con producto interno, $\dim E = n$. Sea $\varphi : E \longrightarrow E$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (i) φ es autoadjunta y $\langle \varphi(x), x\rangle \geq 0\ \forall\, x \in E$.

    (ii) $\varphi = \psi^2$, para algún $\psi : E \longrightarrow E$ autoadjunto.

12. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$. Calcule $\|T\|$.

13. Sea $T : E \to E$ una transformación lineal, demuestre que $T = R + iS$ donde S y R son autoadjuntas.

14. Sea E espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que el polinomio característico, $p(\lambda)$, de una transformación lineal antisimétrica

satisface la ecuación:

$$p(-\lambda) = (-1)^n p(\lambda).$$

15. Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, con producto interno. Sea $\varphi : E \longrightarrow E$ normal.

    (a) Sea $x \in E$. Demuestre que $\varphi(x) = 0$ si y sólo si $\varphi^*(x) = 0$.

    (b) Demuestre que $\varphi - \lambda I$ es normal ($\lambda \in \mathbb{C}$).

    (c) Demuestre que cada vector propio de φ es un vector propio de φ^*.

16. Suponga que E es un espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$. Demuestre que una transformación lineal $T : E \to E$ es normal si y sólo si $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ para cada $x \in E$.

17. Sea $\phi : E \to E$. Suponga que $\phi^2 = \phi$. Demuestre que ϕ es autoadjunta si y sólo si ϕ es normal.

18. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(e_1) = (1, 2)$, $T(e_2) = (i, -1)$, donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$. Hallar $T^*(x, y)$.

19. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(e_1) = (1 + i, 2)$, $T(e_2) = (i, i)$. Hallar T^*. ¿Es T normal ?

20. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno. Sea $\phi : E \to E$ una transformación lineal autoadjunta.

    (a) Demuestre que $\|x + i\phi(x)\| = \|x - i\phi(x)\|$ para cada $x \in E$.

    (b) Demuestre que $x + i\phi(x) = y + i\phi(y)$ si y sólo si $x = y$.

    (c) Demuestre que -1 no es valor propio de $I + i\phi$.

    (d) Demuestre que -1 no es valor propio de $I - i\phi$.

(e) Demuestre que $\psi := (I - i\phi)(I + i\phi)^{-1}$ es una rotación.

21. Sea E un espacio vectorial con producto interno $\langle\, , \rangle$. Sea $T : E \to E$ una transformación lineal. Entonces $\rho(x, y) := \langle T(x), y\rangle$ es también un producto interno en E . Sea $U : E \to E$ un operador lineal y $U^* : E \to E$ su adjunto con respecto a $\langle\, , \rangle$.

    (a) Suponga que U es una rotación con respecto a ρ . Demuestre que $T = U^*TU$.

    (b) Suponga que $T = U^*TU$. Demuestre que U es una rotación con respecto a ρ .

22. Sea $E = \mathbb{R}^4$ y $E_1 =$ subespacio generado por $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$. Encuentre $P : E \to E$ proyección ortogonal tal que $ImP = E_1$.

23. Sea E espacio vectorial con producto interno. Sean P, $Q : E \to E$ proyecciones ortogonales. Demuestre que $P \circ Q = 0$ si y sólo si $ImP \perp ImQ$.

24. Sea E un espacio vectorial con producto interno. Sea $\pi : E \longrightarrow E_1$ una proyección ortogonal y $J \subseteq E$ un subespacio.

    (a) Suponga que J es estable bajo π (esto es, $\pi(J) \subseteq J$). Demuestre que
    $$J = J \cap E_1 \oplus J \cap E_1^{\perp} .$$

    (b) Suponga que $J = J \cap E_1 \oplus J \cap E_1^{\perp}$. Demuestre que J es estable bajo π .

25. Si $\pi : E \to Im\pi$ es una proyección, demuestre que $I - \pi$ es una proyección sobre $(Im\pi)^{\perp}$.

26. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $Q(x,y) = (ax+by, cx+dy)$. Suponga que Q es una rotación. Demuestre que $b = \pm c$.

27. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(z,w) = (z+iw, z-iw)$.

   (a) Hallar T^*.

   (b) Demuestre que $T^*T = TT^* = 2I$.

   (c) Encuentre explicitamente T_1 y T_2 operadores autoadjuntos tales que $T = T_1 + iT_2$.

   (d) Demuestre que, en general, un operador lineal T es normal si y sólo si $T_1T_2 = T_2T_1$.

28. Una forma bilineal $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice antisimétrica si

$$\phi(x,y) = -\phi(y,x) \quad \forall\, x, y \in E.$$

Demuestre que ϕ es antisimétrica si y sólo si $\phi(x,x) = 0 \quad \forall\, x \in E$.

29. Mostrar que cualquier forma bilineal $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es la suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.

30. Hallar la matriz autoadjunta y la signatura que corresponden a la forma cuadrática: $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$.

31. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función bilineal simétrica definida como

$$b((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + ay_1x_2 + y_1y_2.$$

Demuestre que b es definida positiva si $|a| < 2$.

32. Demuestre que una función bilineal simétrica $b : E \times E \to \mathbb{R}$ es definida positiva si y sólo si el operador lineal autoadjunto T asociado a b tiene sólo valores propios positivos.

33. Sea $b(x,y) = 5x^2 + 6xy + 4y^2$. Encuentre $T \in L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ tal que $\rho(T) = b$, donde ρ es el isomorfismo entre $L(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ y $B(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$.

34. Encuentre la signatura de la forma cuadrática definida por $T(x,y) = 2x^2 - 12xy + 5y^2$.

35. Hallar la matriz simétrica que corresponde a cada una de las siguientes formas cuadráticas.

    (a) $\psi(x,y) = 4x^2 - 6xy - 7y^2$.

    (b) $\psi(x,y) = xy + y^2$.

    (c) $\psi(x,y,z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$.

    (d) $\psi(x,y,z) = x^2 - 2yz + xz$.

36. Hallar la signatura de la función bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática definida por medio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Idea: Aplicar el cambio de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_3 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_1 - y_3. \end{aligned}$$

37. Sea ϕ la forma bilineal simétrica asociada con la forma cuadrática $\psi(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$. Demuestre que ϕ es definida positiva si y sólo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$.

38. Hallar la matriz simétrica y la signatura perteneciente a la forma cuadrática $\psi(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$.