Apuntes de Álgebra III

Versión Corregida

Dr. Carlos Lizama

Universidad de Santiago de Chile

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática y C.C.

Introducción

El presente texto de apuntes de Álgebra III (o Álgebra Lineal II) tiene el objetivo de servir de apoyo y guía de estudios para el estudiante de las carreras de Licenciatura en Matemática y Computación y Licenciatura en Matemática de la Universidad de Santiago de Chile. El contenido está basado en el respectivo programa de estudios, que constituye la continuación de la clásica asignatura de Álgebra Lineal, y fué desarrollado mientras el autor impartió el curso durante el primer y segundo sementre del año 2000. Versiones corregidas y mejoradas han sido utilizadas desde entonces tanto por el autor como otros académicos de la USACH para dictar esta asignatura.

La presente versión, recoge las sugerencias dadas por los profesores que han impartido esta cátedra. Se espera que el texto siga siendo perfeccionado durante el transcurso de los periodos lectivos siguientes, y desde ya el autor agradece a quienes deseen hacer sugerencias y aportes para este fin.

El texto consta de tres capítulos, divididos en secciones. El primer capítulo está orientado a dar al lector el material básico concerniente a espacios vectoriales con producto interno. La mayoría de este capítulo, así como la primera parte del segundo, son materia conocida del curso de Álgebra Lineal y como tal debe ser abordado por el profesor de cátedra a fin de conciliar lo aprendido por el estudiante con los nuevos conceptos. En este sentido, el presente texto de apuntes no es autocontenido y requiere del manejo preciso que de él pueda hacer el catedrático a cargo del curso.

El concepto más importante del primer capítulo es el Teorema de representación de Riesz (Teorema 10). Es muy necesario aquí, como en varios resultados posteriores, remarcar que éstos son válidos en dimensión no necesariamente finita, de manera de preparar y orientar al estudiante a un curso superior (Análisis Funcional, Análisis Armónico, Análisis Numérico, Ecuaciones Diferenciales) y justificar así, debidamente, el análisis de una variedad de conceptos que en principio pueden parecer meramente abstracción matemática.

Varios resultados del primer capítulo son claramente ejercitables de manera fácil y entretenida. Por ejemplo, el valor del determinante se explaya a través de la definición de ángulos, volumenes y finalmente como una elegante forma de definir el producto cruz de vectores en dimensión tres.

El capítulo II, que es la parte central de estos apuntes, está dedicado a un estudio exhaustivo de trasformaciones lineales, o matrices en el caso de dimensión finita. El concepto principal, en el contexto de espacios vectoriales normados, es el de transformación lineal acotada. A este universo de operadores se analizan sus partes: Transformación lineal autoadjunta, Normales, Antisimétricas, Proyecciones e Isometrías. La herramienta principal es el concepto de adjunto de un operador. Asimismo se estudia un isomorfismo fundamental: la correspondencia lineal y biyectiva entre transformaciones lineales y bilineales a través de una transformación canónica, definida en la sección 2.2.3 y que es fundamental en el estudio de formas cuadráticas en la última sección del capítulo.

También, para una mayor y mejor comprensión del capítulo II, es fundamental aprender las formas canónicas que adquieren, bajo un cambio de base apropiado, los diferentes tipos de transformaciones lineales en el caso de dimensión finita. El Teorema 49 del capítulo II en este sentido es uno de los principales de este texto. La elegante demostración basada en aspectos tanto algebraicos como analíticos corresponde al libro de W. H. Greub citado en la bibliografía. Por otra parte, las formas canónicas de los diferentes tipos de transformaciones lineales son fácilmente asimilables por medio de la comparación con el cuerpo de los números complejos. Así, si $z \in \mathbb{C}$ representa una transformación lineal y $\overline{z}$, el conjugado de z, la transformación adjunta, entonces una transformación lineal autoadjunta significa $z = \overline{z}$ y, luego, se podría representar como los elementos del eje real del plano complejo.

Una función (o forma) cuadrática ψ se puede también entender muy fácilmente viendo su representación geométrica en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así, por ejemplo, la ecuación :

$$\psi(x, y) = 1$$

representa una elipse (o círculo) o hipérbola en el plano. De esta manera, la signatura resulta ser un invariante geométrico y, el proceso de diagonalización, un método de llevar formas cuadráticas en formas estándar.

Finalmente, el capítulo III cierra estos apuntes mostrando que cualquier forma multilineal puede ser considerada como una transformación lineal, mediante un isomorfismo apropiado. Para este fin, resulta fundamental el concepto de producto tensorial de espacios vectoriales, que en este texto sólo se aborda en su definición y análisis de propiedades básicas.

Dr. Carlos Lizama

Noviembre de 2000

Prólogo a la versión corregida

Esta versión introduce varias modificaciones al texto que han sido sugeridas al autor, por profesores de la cátedra, en el transcurso de dos años de dictar la asignatura a través de estos apuntes .

El cambio más importante se refiere a la introducción de una gran cantidad de ejercicios propuestos en los capítulos 1, 2 y 3. La mayoría de estos ejercicios corresponde a problemas planteados en pruebas y controles de cátedra.

También se agrega al final del tercer capítulo una sección correspondiente a la noción de producto exterior, a fin de completar las ideas involucradas en los capítulos precedentes y dar las herramientas necesarias para un curso posterior donde se requiera utilizar formas diferenciales.

Mis agradecimientos a Verónica Poblete por sugerir varios de los cambios realizados en el texto y aportar con una gran cantidad de ejercicios. También mis agradecimientos a Maricel Cáceres que escribió estos apuntes en *Latex* y les dió un formato más agradable para su lectura.

Dr. Carlos Lizama

Octubre de 2002

Índice General

Capítulo 1

Espacios con producto interno

1.1 El producto interno

Definición 1 *Sean E y F espacios vectoriales. Una función $\phi : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice bilineal si:*

$$\phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\phi(x_1, y) + \mu\phi(x_2, y) \ ; x_1, x_2 \in E \ ; y \in F$$

y

$$\phi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\phi(x, y_1) + \mu\phi(x, y_2) \ ; x \in E \ ; y_1, y_2 \in F.$$

Definición 2 *Un producto interno en un espacio vectorial E es una función bilineal $\langle , \rangle$ que tiene las siguientes propiedades :*
(i) Simetría : $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
(ii) Positiva definida : $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0$ sólo para $x = 0$.

Un espacio vectorial en el cual se define un producto interno (p.i.) se llama un *espacio producto interno* (e.p.i.).
Un espacio producto interno de dimensión finita se llama *Espacio Euclidiano*.

La *norma* $\|x\|$ de un vector $x \in E$ se define como :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Un *vector unitario* es un vector con norma 1. El conjunto de todos los vectores unitarios es llamado la *esfera unitaria.* Se sigue de la bilinealidad del producto interno que :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

de donde

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Esta ecuación muestra que el producto interno puede ser expresado en términos de la norma. La restricción de la función bilineal $\langle , \rangle$ a un subespacio $E_1 \subseteq E$ tiene otra vez las propiedades (i) y (ii) y, luego, cada subespacio de un e.p.i. es en si mismo un e.p.i.

Ejemplo :$\mathbb{R}^n$ es un e.p.i. con $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_i x_i y_i$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Definición 3 *Dos vectores $x \in E$, $y \in E$; $x \neq y$ se dicen ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Observación : Sólo el vector cero es ortogonal a si mismo : En efecto, $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Proposición 4 *Un conjunto de n vectores $x_j \neq 0$ en donde cualesquiera dos vectores x_i y x_j $(i \neq j)$ son ortogonales, es linealmente independiente.*

Demostración. Si $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ entonces $\alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Luego $\alpha_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. ∎

Dos subespacios $E_1 \subseteq E$ y $E_2 \subseteq E$ se llaman *ortogonales*, lo cual se denota $E_1 \perp E_2$, si cualesquiera dos vectores $x_1 \in E_1$ y $x_2 \in E_2$ son ortogonales.

Teorema 5 (Desigualdad de Schwarz) *Sean x, $y \in E$. Entonces*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

Además, la igualdad vale si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

Demostración. Consideremos la función $f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$; $\lambda \in \mathbb{R}$. Como el p.i. es positivo definido se tiene que $f(\lambda) \geq 0$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Por otra parte,

$$f(\lambda) = \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2 \geq 0$$

de donde se deduce que el discriminante de la expresión cuadrática anterior es ≤ 0. Luego, $\langle x, y\rangle^2 \leq \|y\|^2\|x\|^2$. Ahora supongamos que vale $\langle x, y\rangle^2 = \|y\|^2\|x\|^2$. Entonces el discriminante de la ecuación

$$f(\lambda) = \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2 = 0 \tag{1.1}$$

es cero; luego, la ecuación (1.1) tiene una solución real $\lambda_0 (= \frac{-\langle x,y\rangle}{\|y\|^2})$; esto es : $f(\lambda_0) = \|x + \lambda_0 y\|^2 = 0$. Por lo tanto, $x + \lambda_0 y = 0$, es decir, x e y son L.D. Recíprocamente, si x e y son L.D. entonces $x = \alpha y$. Luego, $\langle x, y\rangle = \alpha\langle y, y\rangle = \alpha\|y\|^2$ y $\|x\|^2\|y\|^2 = \alpha^2\|y\|^2$ obteniendose la igualdad. ∎

Dados $x \neq 0$, $y \neq 0$; por la desigualdad de Schwarz :

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} \leq 1$$

entonces, existe ω; $0 \leq \omega \leq \pi$ tal que $\cos\omega = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$.

Definición 6 *El número ω se llama el ángulo entre los vectores x e y.*

Observaciones:

1) Si x e y son ortogonales, entonces $\cos\omega = 0$ luego $\omega = \frac{\pi}{2}$.

2) Supongamos que x e y son L.D. Entonces, $y = \lambda x$. Luego :

$$\cos\omega = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda > 0 \\ -1, & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\omega = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda > 0 \\ \pi, & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}.$$

3) Ya que $\cos\omega = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}$ entonces, de la fórmula

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

obtenemos :

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\ \|y\| \cos\omega$$

ecuación conocida como *Teorema de los Cosenos.*

4) Si x e y son ortogonales, entonces el teorema anterior se reduce a :

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

conocida como *Teorema de Pitágoras.*

Teorema 7 (Desigualdad Triangular) *Sean x e $y \in E$. Entonces*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

donde la igualdad vale si y sólo si $x = \lambda y$; $\lambda \geq 0$

Demostración. Se sigue de la desigualdad de Schwarz que :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

La igualdad vale si y sólo si $x = \lambda y$; $\lambda \geq 0$. En efecto : Supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ entonces $\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| + \|y\|^2$, de esta manera

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\ \|y\| \tag{1.2}$$

Luego por Teorema 5, los vectores x e y deben ser L.D., esto es :

$$x = \lambda y \tag{1.3}$$

reemplazando (1.3) en (1.2) se obtiene :

$$\lambda\|y\|^2 = |\lambda|\ \|y\|^2$$

luego $\lambda = |\lambda| \geq 0$.
Recíprocamente; supongamos que $x = \lambda y$, $\lambda \geq 0$. Entonces

$$\|x+y\| = \|(\lambda+1)y\| = (\lambda+1)\|y\| = \lambda\|y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

∎

Dados tres vectores x, y,z; la desigualdad triangular se puede escribir como

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \tag{1.4}$$

pues $\|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$. Una generalización de lo anterior es el siguiente :

Teorema 8 (Desigualdad de Ptolemy) *Sean x, y, $z \in E$. Entonces*

$$\|x-y\|\ \|z\| \leq \|y-z\|\ \|x\| + \|z-x\|\ \|y\| \tag{1.5}$$

Demostración. La desigualdad es claramente válida si uno de los tres vectores es cero. Luego, podemos asumir $x \neq 0$,$y \neq 0$, $z \neq 0$. Se definen vectores x', y', z' por:

$$x' = \frac{x}{\|x\|^2} \; ; \; y' = \frac{y}{\|y\|^2} \; ; \; z' = \frac{z}{\|z\|^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|x' - y'\|^2 &= \|x'\|^2 - 2\langle x', y'\rangle + \|y'\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2\|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} \\ &= \frac{\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \\ &= \frac{\|x - y\|^2}{\|x\|^2\|y\|^2}, \end{aligned}$$

esto es, $\|x' - y'\| = \dfrac{\|x - y\|}{\|x\| \; \|y\|}$. Aplicando (1.4) a los vectores x', y', z' se obtiene :

$$\|x' - y'\| \leq \|x' - z'\| + \|z' - y'\|$$

o equivalentemente,

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\| \; \|y\|} \leq \frac{\|x - z\|}{\|x\| \; \|z\|} + \frac{\|z - y\|}{\|z\| \; \|y\|}.$$

Multiplicando esta última desigualdad por $\|x\| \; \|y\| \; \|z\|$ se obtiene (1.5). ■

Ejercicio: Sea $X := C[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \; / \; f$ es continua $\}$. Demuestre que

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

es un producto interno en X.

1.1.1 Espacios Duales

Sean E, E^* espacios vectoriales. Supongamos que existe una función bilineal $\langle , \rangle$ definida en $E^* \times E$ tal que satisface lo siguiente:

1) $\langle f, x\rangle = 0$ para todo x implica $f = 0$

2) $\langle f, x\rangle = 0$ para todo f implica $x = 0$ (en tal caso la función bilineal se dice *no degenerada*).

Entonces E y E^* se llaman *duales* con respecto a la función bilineal $\langle , \rangle$. El número $\langle x^*, x\rangle$ se llama el *producto escalar* de x^* y x. La función bilineal $\langle , \rangle$ se llama el *producto escalar entre* E^* y E.

Ejemplos

1) Si $\langle , \rangle$ es un producto interno, entonces es una función bilineal no degenerada.

2) Sea $E = E^* = \mathbb{R}$. Se define :

$$\langle \lambda, \mu\rangle = \lambda\mu \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Claramente la forma es bilineal y no degenerada pues $\langle \lambda, \mu\rangle = 0 \ \forall\mu$ implica $\lambda = 0$. Análogamente $\langle \lambda, \mu\rangle = 0 \ \forall\lambda$ implica $\mu = 0$. De esta manera se dice que el dual de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$; o que $\mathbb{R}$ es auto-dual o es dual a sí mismo.

3) Sea $E = E^* = \mathbb{R}^n$ y definamos :

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_i x_i^* x_i;$$

donde $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Claramente la forma bilineal es no degenerada por Ejemplo 1. Luego $\mathbb{R}^n$ es dual a sí mismo.

Recordemos que $L(E) := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ es lineal $\}$.

Proposición 9 *Si E tiene dimensión finita, con producto interno $\langle , \rangle$; entonces existe un isomorfismo $\tau : E \longrightarrow L(E)$.*

Demostración. Se define

$$\tau(x)(y) := \langle x, y\rangle \quad ; \quad x \in E \ , \ y \in E.$$

(a) τ es lineal : Para cada $y \in E$

$$\begin{aligned}\tau(\lambda x_1 + x_2)(y) &= \langle \lambda x_1 + x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle \\ &= \lambda\tau(x_1)(y) + \tau(x_2)(y) = (\lambda\tau(x_1) + \tau(x_2))(y).\end{aligned}$$

Luego, $\tau(\lambda x_1 + x_2) = \lambda\tau(x_1) + \tau(x_2)$.

(b) τ es inyectiva : Sea $x \in E$ tal que $\tau(x) = 0$. Entonces $\tau(x)(y) = 0$ para cada $y \in E$, esto es, $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $y \in E$. Ya que $\langle , \rangle$ es no degenerada, lo anterior implica que $x = 0$.

(c) Veamos ahora que el hecho de poseer E dimensión finita implica que τ es sobreyectiva. Para esto vamos a probar que $\dim L(E) = \dim E$, lo cual prueba la sobreyectividad (Ejercicio).

Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ base de E. Definimos en $L(E)$ las funciones :

$$f^j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad ; \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces $\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ es una base de $L(E)$. En efecto : Supongamos que

$$\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 + \cdots + \alpha_n f^n = 0$$

entonces $\alpha_1 f^1(x_1) + \cdots + \alpha_n f^n(x_1) = 0$ implica, por definición, $\alpha_1 = 0$. Análogamente, $\alpha_1 f^2(x_2) + \cdots + \alpha_n f^n(x_2) = 0$ implica $\alpha_2 = 0$. Deducimos así que $\alpha_3 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Esto prueba que el conjunto es L.I.
Sea ahora $f \in L(E)$. Entonces

$$f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Notar que

$$\begin{aligned} f^1(x) &= f^1(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 \\ f^2(x) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ f^n(x) &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Luego :

$$\begin{aligned} f(x) &= f^1(x) f(x_1) + \cdots + f^n(x) f(x_n) \\ &= \sum \beta_i f^i(x) \end{aligned}$$

donde $\beta_i = f(x_i)$. Esto prueba que $L(E)$ es generado por el conjunto $\{f^1, \ldots, f^n\}$ y por lo tanto es una base. En particular, $\dim L(E) = \dim E$. ∎

Observación : La base $\{f^1, \ldots, f^n\}$ de $L(E)$ definida en la demostración del teorema anterior es llamada *base dual*.

El resultado más importante de esta sección es el siguiente.

Teorema 10 (Teorema de Riesz) *Si E es un espacio con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión finita y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal, entonces existe un único vector $a \in E$ tal que*

$$f(x) = \langle a, x \rangle \ \ \forall\, x \in E.$$

Demostración. Por hipótesis $f \in L(E)$. Como E es de dimensión finita, E y $L(E)$ son isomorfos vía

$$\tau(x)(y) = \langle x, y \rangle.$$

En particular, τ es sobreyectiva o sea existe un único $a \in E$ tal que

$$\tau(a) = f.$$

Luego $f(x) = \tau(a)(x) = \langle a, x \rangle \ \ \forall\, x \in E$. ■

Ejercicios

1. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - y_1x_2 - x_1y_2 + 3y_1y_2$. Demuestre que ϕ es bilineal y definida positiva.

2. Sea $l^2 := \{(x_1, x_2, \ldots) \ / \ \sum_i x_i^2 < \infty\}$. Demuestre que $\sum_i x_iy_i$ converge y que la función bilineal
$$\phi(x, y) = \sum_i x_iy_i$$
donde $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$; es un producto interno en l^2.

3. Sean E_1, E_2 espacios con producto interno. Demuestre que se puede definir un producto interno en : $E_1 \times E_2$ por
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \quad ; x_1, y_1 \in E_1 \ , \ x_2, y_2 \in E_2.$$

4. Sea E espacio vectorial y $E^* = L(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ es lineal $\}$. Definamos:
$$\langle f, x \rangle := f(x) \quad ; f \in L(E), x \in E.$$
Pruebe que es un forma bilineal. Además, es no degenerada. (Esto prueba que el dual de E es $L(E)$.)

1.2 Bases Ortonormales

Definición 11 *Sea E e.p.i. de dimensión n. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E. La base $\{e_i\}$ es llamada ortonormal si los vectores $e_i (i = 1, \ldots, n)$ son mutua-*

mente ortogonales y tienen norma 1; esto es :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n.$$

Proposición 12 *Sea E e.p.i. de dimensión n y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de E. Entonces para cada $x,\ y \in E$:*

$$\langle x, y \rangle = \textstyle\sum_i x_i y_i \qquad \textit{(Igualdad de Parseval)}$$

donde $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_i y_i e_i$.

Demostración.

$$\langle x, y \rangle = \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j \rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i.$$

■

Corolario 13 *Si E es un e.p.i. de dimensión finita y $\{e_i\}$ es base ortonormal de E entonces para cada $x \in E$*

$$\|x\|^2 = \textstyle\sum_i x_i^2 \qquad \textit{(Igualdad de Bessel).}$$

Demostración. Tomar $y = x$ en la proposición anterior. ■

Corolario 14 *Si E es un e.p.i. de dimensión finita y $\{e_i\}$ es base ortonormal de E entonces, para cada $x \in E$*

$$\langle x, e_i \rangle = x_i \ ;\ i = 1, \ldots, n \qquad \textit{(Coeficientes de Fourier).}$$

Demostración. Tomar $y = e_j$ en la proposición anterior. ■

Corolario 15 *Si E es un e.p.i. de dimensión finita y $\{e_i\}$ es base ortonormal de E entonces para cada $x \in E$, el ángulo θ_i entre x y e_i es :*

$$\cos\theta_i = \frac{x_i}{\|x\|} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Demostración. Por Definición 7 y Corolario 14 tenemos : $\cos\theta_i = \dfrac{\langle x, e_i\rangle}{\|x\|\ \|e_i\|} = \dfrac{x_i}{\|x\|}$. ∎

Observación : En particular, si $\|x\| = 1$, entonces $\cos\theta_i = x_i$.

Teorema 16 (Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt) *Sea E e.p.i. de dimensión finita. Entonces E siempre posee una base ortonormal.*

Demostración. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ base de E. Vamos a construir una nueva base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ cuyos vectores son mutuamente ortogonales. Sea $b_1 = a_1$ y definamos $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ donde λ es un escalar que se determina de manera tal que $\langle b_1, b_2\rangle = 0$. Con esto se obtiene :

$$0 = \langle a_1, a_2 + \lambda b_1\rangle = \langle a_1, a_2\rangle + \lambda\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_1, a_2\rangle + \lambda\langle a_1, a_1\rangle.$$

Como $a_1 \neq 0$, se tiene que $\lambda = \dfrac{-\langle a_1, a_2\rangle}{\langle a_1, a_1\rangle}$. Notar que $b_2 \neq 0$ (si no $\alpha_2 = -\lambda a_1$ y a_2 son L.I. lo que es una contradicción). Para obtener b_3, definimos $b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2$ donde μ y ν se determinan de manera que

$$\langle b_1, b_3\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle b_2, b_3\rangle = 0.$$

Con esto se tiene que

$$0 = \langle b_1, a_3 + \mu b_1 + \nu b_2\rangle = \langle b_1, a_3\rangle + \mu\langle b_1, b_1\rangle$$

$$0 = \langle b_2, a_3 + \mu b_1 + \nu b_2\rangle = \langle b_2, a_3\rangle + \nu\langle b_2, b_2\rangle$$

ya que $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, estas ecuaciones se pueden resolver con respecto a μ y ν. Más precisamente, $\mu = \dfrac{-\langle b_1, a_3\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}$, $\nu = \dfrac{-\langle b_2, a_3\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle}$.
La independencia lineal de a_1, a_2, a_3 implica que $b_3 \neq 0$.

Continuando de esta manera se obtiene finalmente un sistema de n vectores $b_j \neq 0$; $j = 1, \ldots, n$ tal que

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \qquad \forall\, i \neq j.$$

En particular, $\{b_i\}$ son L.I. y luego forman una base para E. En consecuencia los vectores

$$e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|} \qquad i = 1, \ldots, n$$

forman una base ortonormal. ∎

1.2.1 Transformaciones Ortogonales

En esta sección queremos responder a la pregunta: Si tenemos dos bases ortonormales, ¿cómo se relacionan entre ellas?.

A fin de dar una respuesta, requerimos recordar la siguiente definición:

Definición 17 *Sea $A = (\alpha_{ij})$ una matriz de $n \times n$. A se dice ortogonal si $AA^T = I$.*

Finalmente, la relación entre matrices ortogonales y bases ortonormales está indicada en el siguiente resultado.

Proposición 18 *Sean $\{x_i\}$ y $\{\overline{x}_j\}$ bases ortonormales de E. Entonces existe una matriz ortogonal (α_{ij}) tal que $\overline{x}_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j$. Recíprocamente, si $\{x_i\}$ es una base ortonormal de E y (α_{ij}) es una matriz ortogonal, entonces $\overline{x}_j = \sum_i \alpha_{ji} x_i$ es también una base ortonormal de E.*

Demostración. Ya que $\{x_j\}$ es base, para cada $\overline{x}_i$ existen escalares $\alpha_{ij}, (j = 1, ..., n)$ tales que $\overline{x}_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j$. Veamos que (α_{ij}) es una matriz ortogonal. En efecto : Como $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ y $\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j\rangle = \delta_{ij}$ entonces

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle \overline{x}_i, \overline{x}_j\rangle = \langle \sum_p \alpha_{ip} x_p, \sum_q \alpha_{jq} x_q\rangle \\
&= \sum_p \sum_q \alpha_{ip}\alpha_{jq}\langle x_p, x_q\rangle \\
&= \sum_p \alpha_{ip}\alpha_{jp}
\end{aligned}$$

lo cual muestra que (α_{ij}) es ortogonal. Inversamente, si $\{x_i\}$ es base ortonormal de E y (α_{ij}) es matriz ortogonal, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \overline{x}_i, \overline{x}_j\rangle &= \langle \sum_p \alpha_{ip} x_p, \sum_q \alpha_{jq} x_q\rangle \\
&= \sum_p \sum_q \alpha_{ip}\alpha_{jq}\langle x_p, x_q\rangle \\
&= \sum_p \alpha_{ip}\alpha_{jp} \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

lo que indica que $\{\overline{x}_i\}$ es base ortonormal. ■

Definición 19 *Sea E e.p.i. y E_1 un subespacio de E. El conjunto*

$$E_1^{\perp} := \{x \in E \ / \ \langle x, y\rangle = 0 \ \forall \ y \in E_1\}$$

es llamado el complemento ortogonal de E_1.

Observaciones:

1) $E_1^{\perp}$ es un subespacio de E.

2) $E_1^{\perp} \cap E_1 = \{0\}$.

3) Si E tiene dimensión finita :

$$\dim E_1 + \dim E_1^{\perp} = \dim E$$

en particular,

$$E = E_1 \oplus E_1^{\perp}. \tag{1.6}$$

En efecto: Sea $\{y_k\}_{k=1}^{m}$ una base ortonormal de E_1. Entonces existen vectores $\{y_{m+1}, ..., y_n\}$ tal que $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ es una base ortonormal de E (completación de la base). Entonces $\{y_k\}_{k=m+1}^{n}$ es una base de $E_1^{\perp}$ y luego cada $x \in E$ se escribe como

$$x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, y_k \rangle y_k + \sum_{k=m+1}^{n} \langle x, y_k \rangle y_k,$$

lo cual muestra que la suma es directa .

Definición 20 *Sea $x \in E$. Sea $\{y_k\}_{k=1}^{k=m}$ base ortonormal de E_1. El vector*

$$p = \sum_{k=1}^{m} \langle x, y_k \rangle y_k$$

se llama la proyección ortogonal de x sobre E_1.

Observaciones :

1) La idea en la definición anterior es la siguiente : Si $x \in E$ entonces por (1.6)

$$x = p + h; \qquad p \in E_1, h \in E_1^{\perp}. \tag{1.7}$$

Como $\{y_k\}_{k=1}^{m}$ es base de E_1 y $p \in E_1$:

$$p = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k.$$

Notar que :

$$\langle p, y_j \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \langle y_k, y_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \delta_{kj} = \alpha_j$$

y

$$\langle p, y_j \rangle = \langle x - h, y_j \rangle = \langle x, y_j \rangle$$

luego

$$p = \sum_{k=1}^{m} \langle x, y_k \rangle y_k.$$

2) De (1.7) obtenemos $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle p+h, p+h\rangle = \|p\|^2 + \|h\|^2$. En particular : $\|p\| \leq \|x\|$; esto es,

$$|\sum_{k=1}^{m} \langle x, y_k \rangle y_k| \leq \|x\|$$

llamada *desigualdad de Bessel*.

Notar que la igualdad vale si y sólo si $\|h\|^2 = 0$ i.e. $h = 0$; esto es, si y sólo si $x \in E_1$ (lo cual se sigue de (1.7)). El número $\|h\|$ se llama la *distancia* a x desde el subespacio E_1.

Ejercicios

1. Dada la base $\{(1,0,1), (2,1,-3), (-1,1,0)\}$, construir una base ortonormal por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

2. (dificil) Sea $E = C[0,1]$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Sea $E_1 = C^1[0,1]$ subespacio de E. Demuestre que $E_1^{\perp} = \{0\}$.

1.3 Función Determinante

Definición 21 *Sea E e.v. de dimensión n. Una función determinante es una función $\Delta : \underbrace{E \times \cdots E}_{n-veces} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que* *(a) Δ es lineal con respecto a cada argumento (multilineal), esto es :*

$$\Delta(x_1, \ldots, \lambda x_i + \mu y_i, \ldots, x_n) = \lambda\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \mu\Delta(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$$

con $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Δ es antisimétrica con respecto a todos sus argumentos, más precisamente

$$\Delta(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon_\sigma \Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

donde

$$\epsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & \textit{para una permutación } \sigma \textit{ par} \\ -1 & \textit{para una permutación } \sigma \textit{ impar} \end{cases}$$

Observación : Ya que el intercambio de dos números (ij) es una permutación impar, se obtiene de la propiedad (b) :

$$\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

En particular, si $x_i = x_j = x$;

$$\Delta(x_1, \ldots, x, \ldots, x, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.8}$$

Esto es, una función determinante asume el valor cero siempre que dos de sus argumentos coinciden. Más generalmente :

Proposición 22 *Si dos argumentos de una función determinante son L.D. entonces* $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x_n es L.D. con respecto a $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Entonces

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i.$$

Luego, por (1.8) :

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_i) = 0.$$

■

Observación : Observemos que el valor de una función determinante no cambia si un múltiplo de un argumento x_j se suma a otro argumento x_i, $(i \neq j)$. En efecto : Por (1.8) (si $i < j$)

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) &= \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ &+ \lambda \underbrace{\Delta(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}_{=0} \\ &= \Delta(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores nos muestran existencia de funciones determinantes en un espacio E. Qué hay con respecto a la unicidad ? En efecto, note que en un espacio vectorial E se podrían, eventualmente, definir más de una función determinante.

Proposición 23 *Sean Δ y Δ_1 dos funciones determinantes en E, $\Delta_1 \neq 0$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta = \lambda \Delta_1$.*

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ base ortonormal de E. Entonces, dado $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \times E \cdots \times E =: E^n$ se tiene que cada x_i se escribe como

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \ldots, x_n) &= \Delta(\sum_{j_1=1} \alpha_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1} \alpha_{2j_2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n} \alpha_{nj_n} e_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1} \sum_{j_2=1} \cdots \sum_{j_n=1} \alpha_{1j_1} \alpha_{2j_2} \ldots \alpha_{nj_n} \Delta(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) \\ &= \Delta(e_1, \ldots, e_n) \sum_{\sigma} \epsilon_\sigma \alpha_{1\sigma(1)} \ldots \alpha_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\Delta_1(x_1, \ldots, x_n) = \Delta_1(e_1, \ldots, e_n) \sum_{\sigma} \epsilon_\sigma \alpha_{1\sigma(1)} \ldots \alpha_{n\sigma(n)}.$$

Sea $\lambda := \dfrac{\Delta(e_1, \ldots, e_n)}{\Delta_1(e_1, \ldots, e_n)}$ entonces

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \Delta_1(x_1, \ldots, x_n)$$

lo que prueba la proposición. ■

Ejercicios

1. Sea $E = \mathbb{R}^2$ y $\Delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$\Delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

   Pruebe que Δ es multilineal(bilineal en este caso) y antisimétrica con respecto a sus argumentos.

2. Sea $E = \mathbb{R}^3$ y $\Delta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$\Delta((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

   Pruebe que Δ es trilineal y verifica la propiedad (b).

1.3.1 Funciones Determinantes Duales

Proposición 24 *Sean E^* y E un par de espacios vectoriales duales con dimensión n (i.e. existe una función bilineal no degenerada $\langle , \rangle$ definida en*

$E^* \times E$). Sean $\Delta^* \neq 0$ y $\Delta \neq 0$ funciones determinantes en E^* y E respectivamente. Entonces

$$\Delta^*(f_1, \ldots, f_n)\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \det \begin{pmatrix} \langle f_1, x_1\rangle & \ldots & \langle f_1, x_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_n, x_1\rangle & \ldots & \langle f_n, x_n\rangle \end{pmatrix}; \qquad (1.9)$$

donde $f_i \in E^*, x_i \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\Omega : \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{n} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\Omega(f_1, \ldots, f_n, x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} \langle f_1, x_1\rangle & \ldots & \langle f_1, x_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_n, x_1\rangle & \ldots & \langle f_n, x_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Es claro que Ω es lineal con respecto a cada argumento. También es claro que Ω es antisimétrica con respecto a los vectores f_i y con respecto a los vectores $x_i (i = 1, \ldots, n)$. Luego, Ω es una función determinante y, por unicidad (con respecto a los argumentos $x_1, \ldots, x_n$; dejando $f_1, \ldots, f_n$ fijos)

$$\Omega(f_1, \ldots, f_n, x_1, \ldots, x_n) = \alpha(f_1, \ldots, f_n)\Delta(x_1, \ldots, x_n). \qquad (*)$$

Esta relación muestra que $\alpha(f_1, \ldots, f_n)$ es lineal con respecto a cada argumento y antisimétrica. En efecto ; por ejemplo con respecto al primer argumento tenemos

$$\Omega(\lambda f_1 + g_1, \ldots, f_n, x_1, \ldots, x_n) = \alpha(\lambda f_1 + g_1, \ldots, f_n)\Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \lambda\Omega(f_1, \ldots, f_n, x_1, \ldots, x_n) &+ \Omega(g_1, \ldots, f_n, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \alpha(\lambda f_1 + g_1, \ldots, f_n)\Delta(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}\lambda\alpha(f_1,\ldots,f_n)\Delta(x_1,\ldots,x_n) &+ \alpha(g_1,\ldots,f_n)\Delta(x_1,\ldots,x_n)\\ &= \alpha(\lambda f_1+g_1,\ldots,f_n)\Delta(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

como $\Delta \neq 0$ obtenemos

$$\lambda\alpha(f_1,\ldots,f_n)+\alpha(g_1,\ldots,f_n)=\alpha(\lambda f_1+g_1,\ldots,f_n)$$

lo que prueba que α es lineal con respecto al primer argumento.
Veamos que es antisimétrica : De (*) obtenemos:

$$\Omega(f_{\sigma(1)},...,f_{\sigma(n)},x_1,...,x_n)=\alpha(f_{\sigma(1)},...,f_{\sigma(n)})\Delta(x_1,...,x_n).$$

Equivalentemente, puesto que Ω es una función determinante:

$$\epsilon_\sigma(f_1,...,f_n,x_1,...,x_n)=\alpha(f_{\sigma(1)},...,f_{\sigma(n)})\Delta(x_1,...,x_n).$$

Aplicando (*) otra vez al lado izquierdo obtenemos:

$$\epsilon_\sigma\alpha(f_1,...,f_n)\Delta(x_1,...,x_n)=\alpha(f_{\sigma(1)},...,f_{\sigma(n)})\Delta(x_1,...,x_n).$$

Finalmente, dividiendo por Δ se obtiene:

$$\epsilon_\sigma\alpha(f_1,...,f_n)=\alpha(f_{\sigma(1)},...,f_{\sigma(n)}).$$

Luego, otra vez por unicidad : existe $\beta\in\mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(f_1,\ldots,f_n)=\beta\Delta^*(f_1,\ldots,f_n).$$

Combinando se obtiene :

$$\Omega(f_1,\ldots,f_n,x_1,\ldots,x_n)=\beta\Delta^*(f_1,\ldots,f_n)\Delta(x_1,\ldots,x_n). \tag{1.10}$$

Sean ahora $\{f_i^*\}$ y $\{e_i\}$ bases duales en E^* y E respectivamente, esto es $\langle f_i^*, e_j\rangle = \delta_{ij}$; entonces

$$\begin{aligned}
\beta\Delta^*(f_1^*,\dots,f_n^*)\Delta(e_1,\dots,e_n) &= \Omega(f_1^*,\dots,f_n^*,e_1,\dots,e_n) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1
\end{aligned}$$

pues $\langle f_i^*, e_j\rangle = \delta_{ij}$ por definición. Luego, $\beta \neq 0$. Sea ahora $\alpha := \beta^{-1}$ entonces, de (1.10) se obtiene la relación (1.9) que queriamos probar. ■

Definición 25 *La funciones determinantes Δ^* y Δ se llaman duales si el factor α en (1.9) es igual a 1, esto es :*

$$\Delta^*(f_1^*,\dots,f_n^*)\Delta(x_1,\dots,x_n) = \det((\langle f_i, x_j\rangle)_{ij}).$$

1.3.2 Funciones Determinantes Normadas

Sea E e.v. con producto interno $\langle,\rangle$, de dimensión n. Como E es dual a si mismo con respecto al producto interno, entonces, si Δ_0 es una función determinante en E se obtiene por (1.9) :

$$\Delta_0(x_1,\dots,x_n)\Delta_0(y_1,\dots,y_n) = \alpha\det\begin{pmatrix} \langle x_1,y_1\rangle & \dots & \langle x_1,y_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n,y_1\rangle & \dots & \langle x_n,y_n\rangle \end{pmatrix};$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si hacemos $x_i = y_i = e_i$, donde $\{e_i\}$ es base ortonormal de E, se obtiene :

$$\Delta_0(e_1,\dots,e_n)^2 = \alpha.$$

Luego, $\alpha > 0$. Se define

$$\Delta := \pm\frac{\Delta_0}{\sqrt{\alpha}} \tag{1.11}$$

Entonces

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)\Delta(y_1, \ldots, y_n) = \det\begin{pmatrix} \langle x_1, y_1\rangle & \ldots & \langle x_1, y_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, y_1\rangle & \ldots & \langle x_n, y_n\rangle \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Definición 26 *Una función determinante en un espacio con producto interno que satisface (1.12) se llama una función determinante normada.*

Observaciones:

1) De (1.11) concluimos que existen exactamente dos funciones determinantes normadas Δ y $-\Delta$ en un e.v. E.

2) Si se define una *orientación* en E, entonces una de las funciones Δ y $-\Delta$ representa la orientación. En consecuencia, en un e.v. con p.i. orientado existe una única función determinante normada que representa la orientación.

1.3.3 Ángulos en el plano orientado

Con ayuda de una función determinante normada es posible dar un *signo* al ángulo entre dos vectores de un espacio con producto interno, orientado, de dimensión 2. Consideremos la función determinante normada Δ que representa la orientación dada. De la identidad

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)\Delta(y_1, \ldots, y_n) = \det(\langle x_i, y_i\rangle)$$

obtenemos, usando (1.12), que para cada $x, y \in E$, con $dim E = 2$:

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \Delta(x, y)^2. \tag{1.13}$$

Supongamos ahora que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Dividiendo (1.13) por $\|x\|^2\|y\|^2$ obtenemos:

$$\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2\|y\|^2} + \frac{\Delta(x,y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} = 1$$

ó

$$\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\ \|y\|}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(x,y)}{\|x\|\ \|y\|}\right)^2 = 1$$

ya que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, se concluye que *existe un único* $\theta \in (-\pi, \pi)$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\ \|y\|} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\Delta(x,y)}{\|x\|\ \|y\|}. \tag{1.14}$$

Definición 27 *El número $\theta(=\theta(x,y))$ se llama el ángulo orientado entre x e y.*

Observación : Si se cambia la orientación, Δ se reemplaza por $-\Delta$ y luego θ cambia por $-\theta$. (Ejercicio).

1.3.4 El determinante de Gram

Definición 28 *Dados p vectores $x_1, \dots, x_p$ en un espacio con producto interno E, el determinante de Gram $G(x_1, \dots, x_p)$ se define por*

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_1, x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p, x_1\rangle & \dots & \langle x_p, x_p\rangle \end{pmatrix}.$$

Proposición 29 *$G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$ y la igualdad vale si y sólo si los vectores $\{x_1, \dots, x_p\}$ son linealmente dependientes.*

Demostración.

Caso 1 : Los vectores $\{x_1, \ldots, x_p\}$ son L.D. Entonces existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no todos cero tales que $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$. Luego, para cada $i = 1, ..., n$ se tiene:

$$0 = \langle x_i, \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \rangle = \alpha_1 \langle x_i, x_1 \rangle + ... + \alpha_n \langle x_i, x_n \rangle.$$

Entonces las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_p, x_p \rangle \end{pmatrix}$$

son también L.D.; luego, $G(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

Caso 2 : Los vectores $\{x_1, \ldots, x_p\}$ son L.I. Sea E_1 el subespacio generado por $x_1, \ldots, x_p$ con el producto interno de E. Sea Δ_1 una función determinante normada en E_1. Entonces de (1.13)

$$\Delta_1(x_1, \ldots, x_p)^2 = G(x_1, \ldots, x_p).$$

La independencia lineal de $x_1, \ldots, x_p$ implica que $\Delta_1 \neq 0$. Luego

$$G(x_1, \ldots, x_p) > 0.$$

Esto prueba $G(x_1, \ldots, x_p) \geq 0$.
Además, por lo anterior, es claro que, si $\{x_1, \ldots, x_p\}$ son L.D. entonces $G(x_1, \ldots, x_p) = 0$ y, si $G(x_1, \ldots, x_p) = 0$ entonces, si se supone por absurdo que $\{x_1, \ldots, x_p\}$ es L.I. se tiene, por caso 2, que $G(x_1, \ldots, x_p) > 0$ en contradicción. ∎

Observación : Si $p = 2$, se deduce de la proposición anterior la desigualdad de Schwarz (i.e. la Proposición 29 es una generalización del Teorema 6).

1.3.5 El volumen de un paralelepípedo

Definición 30 *Sea* $\{a_1, \ldots, a_p\}$ *un conjunto de* p*-vectores L.I. en un espacio vectorial* E*. El conjunto*

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i \;/\; 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

se llama paralelepípedo p-dimensional generado por los vectores $\{a_1, \ldots, a_p\}$*.*

Ejemplo: Si $p = 2$ entonces

$$P = \{\alpha a + \beta b : 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

Definición 31 *El volumen* $V(a_1, \ldots, a_p)$ *del paralelepípedo se define como:*

$$V(a_1, \ldots, a_p) = |\Delta_1(a_1, \ldots, a_p)| \tag{1.15}$$

donde Δ_1 *es una función determinante normada definida en el subespacio generado por los vectores* $\{a_1, \ldots, a_p\}$*.*

Observaciones :

1) En vista de la identidad

$$\Delta^2(x_1, \ldots, x_p) = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_p, x_p \rangle \end{pmatrix}$$

se tiene que el volumen de un paralelepípedo se puede también escribir como:

$$V(a_1, \ldots, a_p)^2 = \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_1, a_p \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_p, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_p, a_p \rangle \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

2) Si $p = 2$, se obtiene de (1.16):

$$V(a_1, a_2)^2 = \|a_1\|^2\|a_2\|^2 - \langle a_1, a_2\rangle^2.$$

Ahora, si θ denota el ángulo entre a_1 y a_2 entonces

$$\cos\theta = \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|\ \|a_2\|}$$

luego

$$\cos^2\theta = \frac{\langle a_1, a_2\rangle^2}{\|a_1\|^2\|a_2\|^2}$$

pero $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, de donde $1 - \sin^2\theta = \dfrac{\langle a_1, a_2\rangle^2}{\|a_1\|^2\|a_2\|^2}$ luego:

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{\langle a_1, a_2\rangle^2}{\|a_1\|^2\|a_2\|^2} = \frac{\|a_1\|^2\|a_2\|^2 - \langle a_1, a_2\rangle^2}{\|a_1\|^2\|a_2\|^2}$$

lo que implica que

$$\|a_1\|^2\|a_2\|^2\sin^2\theta = \|a_1\|^2\|a_2\|^2 - \langle a_1, a_2\rangle^2$$

de aquí se obtiene, finalmente:

$$V(a_1, a_2)^2 = \|a_1\|^2\|a_2\|^2\sin^2\theta$$

o sea,

$$V(a_1, a_2) = \|a_1\|\ \|a_2\|\sin\theta$$

que es una fórmula conocida para calcular el área de un paralelógramo.

1.3.6 Producto cruz

Sea E un espacio con producto vectorial de dimensión 3, orientado, y sea Δ la función determinante normada que representa la orientación. Sean $x \in E$, $y \in E$ y consideremos la función

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.17}$$

definida por $f(z) = \Delta(x, y, z)$.
Claramente f es lineal, esto es, $f \in L(E)$. En vista del Teorema de Representación de Riesz (Teorema 10), existe un único vector $u \in E$ tal que

$$f(z) = \langle u, z \rangle. \tag{1.18}$$

Definición 32 *El vector u obtenido anteriormente se llama el producto cruz de x e y y se denota $x \times y := u$. En vista de (1.17) y (1.18) se tiene la relación*

$$\langle x \times y, z \rangle = \Delta(x, y, z) \tag{1.19}$$

Observación: El producto cruz depende claramente de la orientación de E. Si la orientación es cambiada (i.e. Δ por $-\Delta$), entonces el producto cruz cambia de signo.

En lo que sigue veremos algunas propiedades del producto cruz.

Proposición 33 *El producto cruz es distributivo:*
(i) $(\lambda x_1 + x_2) \times y = \lambda x_1 \times y + x_2 \times y$.
(ii) $x \times (\lambda y_1 + y_2) = \lambda x \times y_1 + x \times y_2$.

Demostración. Para cada $z \in E$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle (\lambda x_1 + x_2) \times y, z \rangle &= \Delta(\lambda x_1 + x_2, y, z) \\
&= \lambda \Delta(x_1, y, z) + \Delta(x_2, y, z) \\
&= \lambda \langle x_1 \times y, z \rangle + \langle x_2 \times y, z \rangle \\
&= \langle \lambda (x_1 \times y) + x_2 \times y, z \rangle
\end{aligned}$$

Luego, como el producto interno es no degenerado; se obtiene (i).
Análogamente, para cada $z \in E$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle x \times (\lambda y_1 + y_2), z\rangle &= \Delta(x, \lambda y_1 + y_2, z) \\ &= \lambda\Delta(x, y_1, z) + \Delta(x, y_2, z) \\ &= \lambda\langle x \times y_1, z\rangle + \langle x \times y_2, z\rangle \\ &= \langle \lambda(x \times y_1) + x \times y_2, z\rangle\end{aligned}$$

lo cual prueba (ii). ■

Proposición 34

(a) $x \times y = -y \times x$

(b) $\langle x \times y, x\rangle = 0$, $\langle x \times y, y\rangle = 0$.

(c) $x \times y \neq 0$ *si y sólo si* x *e* y *son L.I.*

Demostración.

(a) Sea $z \in E$:

$$\langle x \times y, z\rangle = \Delta(x, y, z) = -\Delta(y, x, z) = -\langle y \times x, z\rangle = \langle -y \times x, z\rangle$$

(b) $\langle x \times y, x\rangle = \Delta(x, y, x) = 0$; $\langle x \times y, y\rangle = \Delta(x, y, y) = 0$

(c) Supongamos que $x \times y \neq 0$. Entonces, si suponemos por absurdo que x e y son L.D. tenemos:

$$x = \lambda y \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \ ; \ \lambda \neq 0.$$

Luego, por (a) se tiene que

$$x \times y = \lambda y \times y = \lambda(y \times y)$$

$$-y \times x = -y \times \lambda y = -\lambda(y \times y)$$

lo que implica que $y \times y = -y \times y$. Luego $y \times y = 0$, lo que es una contradicción pues $0 \neq x \times y = \lambda(y \times y)$. Inversamente, supongamos que x e y son L.I. Sea $z \in E$ tal que $\{x, y, z\}$ es base de E. Entonces

$$\langle x \times y, z \rangle = \Delta(x, y, z) \neq 0.$$

Luego, $x \times y \neq 0$. ∎

Proposición 35

$$\langle x_1 \times x_2, y_1 \times y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle \langle x_2, y_1 \rangle.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que x_1 y x_2 son L.I. (de otro modo el lado izquierdo es cero por (c) de la proposición anterior, lo mismo que el lado derecho).
Se tienen las relaciones:

$$\langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle = \Delta(x_1, x_2, x_3) \quad ; x_3 \in E$$

$$\langle y_1 \times y_2, y_3 \rangle = \Delta(y_1, y_2, y_3) \quad ; y_3 \in E.$$

Como Δ es una función determinante normada se tiene:

$$\begin{aligned} \langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle \langle y_1 \times y_2, y_3 \rangle &= \Delta(x_1, x_2, x_3) \Delta(y_1, y_2, y_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \langle x_1, y_2 \rangle & \langle x_1, y_3 \rangle \\ \langle x_2, y_1 \rangle & \langle x_2, y_2 \rangle & \langle x_2, y_3 \rangle \\ \langle x_3, y_1 \rangle & \langle x_3, y_2 \rangle & \langle x_3, y_3 \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sea $y_3 := x_1 \times x_2$. Note que por proposición 34 parte (b) tenemos $\langle x_2, y_3 \rangle = 0$ y $\langle x_1, y_3 \rangle = 0$. Si calculemos ahora el determinante derecho por la última columna, obtenemos:

$$\langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle \langle y_1 \times y_2, x_1 \times x_2 \rangle = \langle x_3, y_3 \rangle \det \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \langle x_1, y_2 \rangle \\ \langle x_2, y_1 \rangle & \langle x_2, y_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle \langle y_1 \times y_2, x_1 \times x_2 \rangle = \langle x_3, x_1 \times x_2 \rangle [\langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle \langle x_1, y_2 \rangle]. \tag{1.20}$$

Como x_1 y x_2 son L.I. se tiene que $x_1 \times x_2 \neq 0$. Luego, se puede elegir x_3 tal que $\langle x_1 \times x_2, x_3 \rangle \neq 0$. Simplificando este término en ambos lados de (1.20) se obtiene la proposición. ∎

Corolario 36 $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$.

Demostración. Tomar $x_1 = y_1 = x$ y $x_2 = y_2 = y$ en la proposición anterior. ∎

Observación: Si θ es el ángulo entre x e y se puede reescribir el corolario anterior como

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \sin \theta.$$

Proposición 37 *Sea* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *una base ortonormal positiva de* E *(i.e.* $\Delta(e_1, e_2, e_3) > 0$*). Entonces*

$$e_1 \times e_2 = e_3 \quad ; \quad e_2 \times e_3 = e_1 \quad ; \quad e_3 \times e_1 = e_2.$$

Demostración. Por (b) de la Proposición 35:

$$\langle e_1 \times e_2, e_1 \rangle = 0 \;\; , \;\; \langle e_1 \times e_2, e_2 \rangle = 0$$

i.e. $e_1 \times e_2$ es ortogonal a e_1 y e_2 por lo que se obtiene: $e_1 \times e_2 = \lambda e_3$. Luego,

$$\Delta(e_1, e_2, e_3) = \langle e_1 \times e_2, e_3 \rangle = \lambda \langle e_3, e_3 \rangle = \lambda.$$

Pero:

$$\Delta(e_1, e_2, e_3)^2 = \det \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_3 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Con lo que $\lambda = 1$, pues $\Delta(e_1, e_2, e_3) > 0$.

Análogamente se prueban los otros dos casos. ■

Corolario 38 *Si* $x = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{3} \beta_i e_i$; *entonces*

$$x \times y = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} x \times y &= \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \alpha_i\beta_j e_i \times e_j \\ &= \alpha_1\beta_1 e_1 \times e_1 + \alpha_1\beta_2 e_1 \times e_2 + \alpha_1\beta_3 e_1 \times e_3 \\ &+ \alpha_2\beta_1 e_2 \times e_1 + \alpha_2\beta_2 e_2 \times e_2 + \alpha_2\beta_3 e_2 \times e_3 \\ &+ \alpha_3\beta_1 e_3 \times e_1 + \alpha_3\beta_2 e_3 \times e_2 + \alpha_3\beta_3 e_3 \times e_3 \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_1 \times e_2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_1 \times e_3 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_2 \times e_3 \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 \end{aligned}$$

■

Observación: La anterior se toma a veces como definición del producto cruz en $\mathbb{R}^3$ donde $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$.

Observación : El resultado anterior también se escribe:

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

como una manera nemotécnica de recordar la fórmula del Corolario 39.

1.4 Ejercicios de recapitulación

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V. ¿ Es la diferencia de dos productos internos un producto interno? Mostrar que un múltiplo positivo de un producto interno es un producto interno.

2. Dados los vectores $\alpha = (x_1, x_2)$ y $\beta = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ se define

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2\,.$$

   (a) Demuestre que $\langle , \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Pruebe que

$$|x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2| \leq ((x_1-x_2)^2+3x^2)^{1/2}\,((y_1-y_2)^2+3y^2)^{1/2}.$$

   (c) Muestre que en $\mathbb{R}^2$ con este producto interno los vectores (x, y) y $(-y, x)$ son ortogonales si y sólo si $y = \dfrac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13})x$.

3. Suponga que $\langle , \rangle$ es un produnto interno sobre $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z).$$

   (a) Demuestre que T es invertible.

   (b) Demuestre que $p_T((x, y, z), (x_1, y_1, z_1)) = \langle T(x, y, z), T(x_1, y_1, z_1)\rangle$ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^3$.

   (c) Considere $\langle , \rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$. Con respecto al producto interno p_T dado en (a), calcule el ángulo entre los vectores $(-1, 0, 2)$ y $(0, 3, \sqrt{3})$.

4. Demuestre que, un conjunto de n vectores $x_j \neq 0$ donde cualesquiera dos vectores x_i y x_j $(i \neq j)$ son ortogonales, es linealmente independiente.

5. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y suponga que $\langle , \rangle$ es un produnto interno sobre W. Si T es una transformación lineal invertible de V en W entonces $p_T(\alpha, \beta) = \langle T(\alpha), T(\beta)\rangle$ es un producto interno sobre V.

6. Sea $B = \{(1, -4, 2), (0, 3, 7), (-1, 0, 5)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. A partir de B encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

7. Sea A una matriz de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Considere X e Y en $M(2 \times 1, \mathbb{R})$, se define

$$\langle X, Y\rangle_A = Y^t A X$$

   (a) Demostrar que $\langle , \rangle_A$ es un producto interno en $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ si y sólo si $A = A^t$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ y $det(A) > 0$.

   (b) Calcular el ángulo entre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle , \rangle$. Se define $T : E \to L(E)$ como:

$$T(y)(x) = \langle y, x \rangle.$$

a) Demuestre que T es lineal.

b) Demuestre que T es inyectiva.

c) Demuestre que T es sobreyectiva.

9. Sea E un espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$. Sean $x, y \in E$.

a) Demuestre que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

b) Demuestre que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si y sólo si $x = \alpha y, \ \ \alpha \geq 0$.

10. Se define la función $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2.$$

(a) Demuestre que $\langle , \rangle$ es un producto interno para $\mathbb{R}^2$.

(b) Con respecto al producto interno en a), calcule el ángulo entre los vectores $(0, 2)$ y $(3, \sqrt{3})$.

(c) Con respecto al producto interno en a), calcule el ángulo orientado entre los vectores $(0, 2)$ y $(3, \sqrt{3})$.

(d) Con respecto al producto interno en a), encuentre una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

11. Pruebe que $(a \times b) \times c = < a, c > \ b - \ < b, c > \ a$.

12. Sea $P_2[0,1] = \{\, p : [0,1] \to \mathbb{R} \quad : \quad p(x) = a + bx + cx^2 \, ; \, a, b, c \in \mathbb{R} \,\}$.
Considere el producto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$$

(a) Calcular el volumen del paralelepípedo: $V(1,x)$.

(b) Sea $E = \langle\{1, 2x+3\}\rangle$, calcular $E^{\perp}$.

(c) Dados $x_1 = 3 + x^2$, $x_2 = 1 - x$, $x_3 = 1 + x + x^2$, $x_4 = x + 4x^2$, en $P_2[0,1]$, hallar el determinante de Gram $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

13. Sea $\mathcal{B}$ una función bilineal con la propiedad que $\mathcal{B}(A) = 0$ para todas las matrices $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ que tienen filas iguales. Demuestre que $\mathcal{B}$ es antisimétrica.

14. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^n$. Defina

$$D_T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n))$$

(a) Demostrar que D_T es una función determinante.

(b) Si $c = \det(T(e_1), \ldots, T(e_n))$ demostrar que para n vectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ arbitrarios se tiene $\det(T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n)) = c \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

15. Sean $\{x_i\}$ y $\{\hat{x}_j\}$ bases ortonormales de un espacio vectorial E, con producto interno y de dimensión n. Demuestre que existe una matriz ortogonal $A = (a_{ij})$ tal que $\hat{x}_i = \sum_j a_{ij} x_j$.

16. Sean Δ y Δ_1 dos funciones determinantes en un espacio vectorial E, $\Delta_1 \neq 0$. Demuestre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta = \lambda \Delta_1$.

17. Demuestre que el determinante de Gram de un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es cero si y sólo si el conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es linealmente dependiente.

18. Una forma bilineal $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ se dice *antisimétrica* si $\phi(x,y) = -\phi(y,x)$ para cada $(x,y) \in E \times E$. Demostrar que cualquier forma bilineal $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es la suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.

19. Sea $\Delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_2y_1 - x_1y_2$.

    (a) Demuestre que Δ es una función determinante.

    (b) Sean $x = (1, 1), y = (-1, 0)$. Encuentre el ángulo orientado entre x e y.

20. Sean $x = (1, 1, 1, 1), y = (-1, 1, -1, 1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^4$.

    (a) Calcule el ángulo entre x e y.

    (b) Encuentre la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre E_1, el subespacio generado por $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$.

    (c) Encuentre $E_1^{\perp}$.

    (d) Verifique que $E_1^{\perp} \bigcap E_1 = \{0\}$

21. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual.

    (a) Demuestre que $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$.

    (b) Calcule el volumen del paralelepipedo determinado por los vectores $e_1 + e_2, 3e_1 - 2e_3, -7e_2 + 3e_3$.

22. Sea $P_1[0, 1] = \{p : [0, 1] \to \mathbb{R} : p(x) = a + bx; a, b \in \mathbb{R}\}$. Dados los vectores $\{1, x\}$ en $P_1[0, 1]$, construir una base ortonormal para $P_1[0, 1]$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = a_1a_2 + \frac{a_1b_2 + b_1a_2}{2} + \frac{b_1b_2}{3},$$

    donde $p(x) = a_1 + b_1x$ y $q(x) = a_2 + b_2x$.

23. Sea $T : P_1[0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $T(p) = 2a + b$; donde $p(x) = a + bx$. Sea $\langle , \rangle$ el producto interno para $P_1[0, 1]$ definido en el problema anterior. Encuentre $q \in P_1[0, 1]$ tal que:

$$T(p) = \langle q, p\rangle \text{ para cada } p \in P_1[0, 1].$$

24. Sea E un e.v.p.i. Sean $x, y, z \in E$. Demuestre que

$$\|x - y\|\|z\| \leq \|y - z\|\|x\| + \|z - x\|\|y\|.$$

25. Calcule el volumen del paralelepipedo generado por los vectores $\{(-5, 6), (1, 7)\}$.