UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

ESTABILIDAD DE FAMILIAS GENERALIZADAS DE OPERADORES LINEALES

ROBERTO ANDRÉS NÚÑEZ OSSANDÓN

Profesor Guía:
Dr. Carlos Lizama Yáñez.

Trabajo de titulación para optar al
título profesional de Ingeniero Matemático

Santiago - Chile
2015

© Roberto Núñez Ossandón.
Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

ESTABILIDAD DE FAMILIAS GENERALIZADAS DE OPERADORES LINEALES

ROBERTO ANDRÉS NÚÑEZ OSSANDÓN

El presente trabajo fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Carlos Lizama. Adicionalmente, el comité evaluador es formado por el Dr. Rodrigo Ponce y la Dra. María Pilar Velasco.

.....
Profesor Guía
Dr. Carlos Lizama

.....
Profesor Informante
Dr. Rodrigo Ponce

.....
Profesor Informante
Dra. María Pilar Velasco

.....
Director Departamento
Mg. Pedro Marín

INFORME DE TESIS

El objetivo de esta tesis, presentada por el Sr. Roberto Núñez, para optar al titulo de Ingeniero Matemático, es el estudio de la estabilidad de familias generalizadas de operadores lineales como un método para el tratamiento de ecuaciones de evolución generales y, en particular, diversas clases de ecuaciones en derivadas parciales.

Después de un capítulo sobre preliminares, la tesis profundiza sobre la teoría de semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales. Se muestra la teoría básica y se demuestra el teorema de generación de Hille-Yosida en su versión de contracciones. La exposición de estos tópicos es clara y consistente.

En el capítulo IV, se desarrolla la teoría inicial de las familias (a, k)-regularizadas, introducidas hacia el año 2000 por el director de esta tesis, como un método general para el tratamiento de ecuaciones de evolución, y que incluye diversas teorías existentes, como por ejemplo, la teoría de semigrupos de operadores. Después de enumerar algunas propiedades, entre las que destacamos un teorema de perturbación aditiva, el capítulo termina con una interesante cantidad de ejemplos concretos.

El capítulo V es el central de este trabajo. Aquí, el autor desarrolla uno de los aspectos más importantes de la teoría de familias (a, k)-regularizadas: La estabilidad. Una interesante condición necesaria en términos de los datos de una ecuación de evolución dada, se demuestra en esta parte. Este resultado, es utilizado posteriormente en una serie de consecuencias relevantes, siendo la más interesante el estudio del caso escalar. Para este caso, se ilustra de manera gráfica distintos casos donde la estabilidad de la solución de cierta ecuación diferencial fraccionaria ocurre. Es interesante observar que desde el punto de vista numérico, la estabilidad es caracterizada por las condiciones del teorema abstracto presentado en esta sección. Queda entonces abierta la siguiente pregunta: Es una condición necesaria y suficiente al menos para alguna clase de familias regularizadas?.

En opinión de este informante, la tesis concluida cumple ampliamente los requerimientos para una tesis de pregrado y es claramente suficiente para una tesis de Ingeniería en Matemática del nivel de la USACH. Por las consideraciones anteriores califico esta tesis con nota 7 (siete).

Dr. Carlos Lizama
Profesor Titular
Universidad de Santiago de Chile

Informe de Trabajo de Titulación

Título: *Estabilidad de Familias generalizadas de operadores lineales*

Autor: *Roberto Núñez Ossandón*

En este trabajo de Titulación, para optar al Título de Ingeniero Matemático por la Universidad de Santiago de Chile, el autor aborda el estudio de la estabilidad de las familias (a,k)-regularizadas.

El trabajo comienza, luego de una visión general en la Introducción con el segundo capítulo, que está dedicado a los preliminares, donde se detallan los conceptos necesarios para el estudio de familias de operadores en espacios de Banach.

El tercer capítulo de la tesis está dedicado a la teoría de los semigrupos de operadores lineales. En éste se resumen los conceptos y principales resultados, varios de ellos con una demostración detallada, de C_0-semigrupos de operadores lineales.

En el cuarto capítulo se abordan las familias (a,k)-regularizadas. Se definen y se estudian sus principales propiedades. Es importante destacar, que en este capítulo se realiza la demostración del Teorema de Generación 4.2.4 de las familias (a,k)-regularizadas.

En el capítulo cinco, y luego de un análisis detallado de estimaciones para la transformada de Laplace de núcleos k-regulares, se estudia la estabilidad de las familias (a,k)-regularizadas en espacios de Hilbert. Se incluyen además, aplicaciones de los resultados de estabilidad en el estudio de propiedades cualitativas de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales abstractas. El trabajo concluye en el capítulo seis, con interesantes simulaciones numéricas.

El trabajo desarrollado por el Sr. Núñez es un texto con detalle, muy bien escrito y que contiene el resumen de importantes resultados en la teoría de familias de operadores lineales en espacios de Banach. El trabajo demuestra un muy buen entendimiento de los conceptos y resultados presentados.

Por las consideraciones anteriores, califico el trabajo del Sr. Núñez con la nota máxima 7.0 (siete punto cero).

Dr. Rodrigo Ponce Cubillos
Profesor Asistente
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Talca, Abril 30 de 2015.

INFORME DE TESIS

Datos de la Tesis

Nombre del estudiante: Roberto Andrés Núñez Ossandón
Título de la Tesis: Estabilidad de familias generalizadas de operadores lineales

Informe de la Tesis

La tesis presentada por el estudiante repasa importantes resultados conocidos e introduce algunos aportes novedosos en el área de la Teoría de Operadores y, más específicamente, en el estudio de las familias *(a; k)*-regularizadas de operadores fuertemente continuos. En este sentido y partiendo de lo ya estudiado en esta materia, se distinguen en esta tesis dos partes fundamentales:

En primer lugar se introducen la definición y las propiedades fundamentales de las familias *(a; k)*-regularizadas, como una generalización de las teorías de C_0-semigrupos, semigrupos *r*-veces integrados, semigrupos *k*-convoluidos, familias coseno *r*-veces integradas y familias resolventes, entre otras, y como aportación novedosa en esta área se realiza la demostración del teorema de generación de las familias *(a; k)*-regularizadas en su caso general. Además, se pone de manifiesto en esta primera parte la importante aplicación de estas familias en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales, permitiendo transformar las ecuaciones de evolución originales (ecuaciones diferenciales, integro-diferenciales y ecuaciones de orden fraccionario) en otras equivalentes que envuelven a un operador, lo cual facilita el análisis de sus propiedades, como son la existencia y la unicidad de soluciones y sus propiedades cualitativas, las cuales se obtienen asociadas a familias (a; k)-regularizadas.

Como segunda parte importante de esta tesis, se aborda un completo estudio de la estabilidad de las familias *(a; k)*-regularizadas, de gran relevancia debido a la correspondencia de las familias estables *(a; k)*-regularizadas con problemas abstractos de ecuaciones lineales bien planteados y porque la estabilidad juega un papel central en la teoría estructural de los operadores. En este sentido, se dan condiciones suficientes para la estabilidad uniforme de una familia *(a; k)*-regularizada en espacios de Hilbert y como principal aportación se generaliza la caracterización de Gearhart-Greiner-Prüss de la estabilidad exponencial para semigrupos fuertemente continuos, con interesantes aplicaciones a diferentes ecuaciones, determinando las condiciones necesarias para que sus soluciones sean estables o uniformemente estables.

Así, en todo el desarrollo de esta tesis los objetivos se plantean de forma clara y se abordan con metodología tanto teórica como aplicada, incluyendo además interesantes simulaciones numéricas, con lo cual se hace un estudio extenso y completo de los temas que se tratan. En cuanto a los contenidos y a la discusión ofrecida, se realiza en esta tesis un desarrollo coherente tanto de resultados conocidos como de algunos nuevos sobre las familias *(a; k)*-regularizadas de operadores fuertemente continuos, dejando claramente manifiestas sus relevantes aplicaciones al estudio de ecuaciones de evolución, fundamentales en la modelización de multitud de problemas reales. Además, el empleo combinado tanto de desarrollo teórico como de simulaciones numéricas aporta aún más aplicabilidad al estudiado realizado, ofreciendo resultados y conclusiones relevantes en el ámbito matemático y en el de las ciencias aplicadas.

Con todo ello, la relevancia del tema tratado así como la clara exposición de los resultados conocidos y nuevos quedan patentes y puede permitir abrir una puerta al desarrollo de futuros trabajos de otros estudiantes.

	VALORACIÓN DE LA TESIS			
	Muy Buena	Buena	Suficiente	Deficiente
Originalidad	SI			
Definición Objetivos	SI			
Metodología	SI			
Relevancia Resultados	SI			
Discusión / Conclusiones	SI			

Por todo lo anteriormente mencionado, mi valoración de la tesis es de un 7.

En USACH, a 30 de abril de 2015.

Fdo.: María Pilar Velasco Cebrián
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza – Academia General Militar
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones

Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar, al Director de esta tesis, el Profesor Carlos Lizama Yañez, por su gran ayuda y dedicación en el transcurso de este trabajo, teniendo siempre la mejor disposición.

Dar las gracias a mis padres Jacqueline Ossandón y Roberto Núñez, y a mi hermano Juan Carlos Núñez Ossandón, quienes han estado conmigo siempre de manera incondicional, sin ellos nada de lo que he logrado hubiese sido posible.

A Valeria Bustamante, por su amor y preocupación que trascienden en el tiempo.

A mis amigos de mi ciudad natal, San Felipe, y a mis compañeros de la carrera.

A todos, muchas gracias.

Índice general

1. Introducción **11**

2. Preliminares **13**

3. Introducción a la Teoría de Semigrupos **19**
3.1. C_0-semigrupos. 19
3.2. C_0-semigrupos de contracciones. 26
3.3. Demostración del Teorema de Hille-Yosida: necesidad 26
3.4. Regularizada de Yosida 28
3.5. Demostración del Teorema de Hille-Yosida: suficiencia 30

4. Familias (a, k)-regularizadas **32**
4.1. Definición 32
4.2. Algunas propiedades de familias (a, k)-regularizadas 33
4.3. Ejemplos 45

5. Estabilidad de familias (a, k)-regularizadas en un espacio de Hilbert **48**
5.1. Estimaciones de la transformada de Laplace 48
5.2. Estabilidad 51
5.3. Ejemplos y comentarios 56

6. Comentarios finales **78**

Bibliografía **79**

A. Código en Maple **81**

Índice de figuras

5.1. $\alpha = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[8]{2}})$. 59
5.2. $\alpha = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$. 60
5.3. $\alpha = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$. 61
5.4. $\alpha = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. 62
5.5. $\alpha = \frac{4}{7}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[7]{2^4}})$. 63
5.6. $\alpha = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}})$. 64
5.7. $\alpha = 1, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{2})$. 65
5.8. $\alpha = \frac{9}{5}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[5]{2^9}})$. 66
5.9. $\alpha = 2, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{4})$. 67
5.10. $\alpha = 3, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{8})$. 68
5.11. $\alpha = 4, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{16})$. 69
5.12. $\alpha = 6, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{64})$. 70
5.13. $\alpha = 8, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{256})$. 71
5.14. $\alpha = 10, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{2^{10}})$. 72
5.15. $\alpha = \frac{25}{2}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt{2^{25}}})$. 73
5.16. $\alpha = 15, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{2^{15}})$. 74
5.17. Se observa divergencia, en el caso $(\alpha, b) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, para $\mu > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. 75

Capítulo 1

Introducción

Entre las herramientas más utilizadas para el estudio tanto de la existencia de soluciones como de propiedades cualitativas de ecuaciones en derivadas parciales, se encuentra el uso de la teoría de operadores. Esta herramienta, que se aplica fundamentalmente a problemas de tipo parabólico e hiperbólico, consiste en trasladar problemas en ecuaciones en derivadas parciales a un problema abstracto en la forma de una ecuación diferencial ordinaria. Allí, son aplicables métodos de la teoría de transformadas (Fourier, Laplace y Mellín) y permiten un manejo más viable y transparente del problema que en su versión original. La principal herramienta que usa una idea de este tipo es la teoría de semigrupos de operadores fuertemente continuos, desarrollada en la década de los 40 por prestigiosos matemáticos de talla mundial.
Posteriormente, y paralelamente, fue desarrollada la teoría de las Familias Coseno de operadores fuertemente continuos a partir de los trabajos de H.O. Fatorinni en la década de los 60. Estas dos teorías, que se refieren a los problemas abstractos de tipo parabólico e hiperbólico respectivamente, si bien tuvieron unicidad y propiedades cualitativas de las soluciones en Ecuaciones en Derivadas Parciales , no dieron cuenta de una serie de problemas de evolución que quedaban "mal planteados". Por esta razón, se desarrollaron en la década de los 90 una serie de herramientas alternativas, consistentes en familias de operadores con alguna propiedad de regularización, de manera de dar cuenta y poder trabajar con estas ecuaciones "mal planteadas".
Así nace la teoría de semigrupos integrados y familias coseno integradas, respectivamente, hacia finales de la década de los 90, que tuvo mucho éxito posterior a la fecha y se mantiene activa hasta hoy.

Por otra parte, la teoría de ecuaciones integrales abstracta, y más generalmente inte-

gro diferenciales- que tiene gran importancia en las aplicaciones a problemas reales- tuvo también un fuerte impulso gracias a los trabajos realizados por matemáticos durante los aos 80 y 90.
Ello dio origen a una gran clase de familias de operadores, relacionadas con los semigrupos y las familias coseno, que fueron desarrollándose y se desarrolla aún hoy en día. Ya hacia fines de la década de los 90, era claro que una teoría de familias de operadores regularizadas para las ecuaciones diferenciales abstractas, en el mismo espíritu de los semigrupos integrados, era posible y se desarrollaba fuertemente.

Este trabajo, tiene por objetivo primeramente, estudiar la teoría de los C_0 semigrupos fuertemente continuos, sus propiedades, y aplicaciones. Así esta primera etapa, servirá de nexo- a una teoría que generaliza la noción C_0 semigrupos- para el objetivo principal que es el estudio detallado de las familias $(a, k)-$regularizadas de operadores fuertemente continuos. Esta teoría fue introducida en la literatura por el director de esta tesis, el Dr. Carlos Lizama, hacia el año 2000, y desarrollada en una serie de artículos de investigación a partir de esa fecha. Una de sus ventajas, es que sirve de paraguas para todas las teorías mencionadas anteriomente, y posee una gran flexibilidad para adaptarse a una enorme cantidad de ecuaciones de evolución, tanto integrales, diferenciales, como integrodiferenciales. Su uso potencial está aún en desarrollo, y abre sus primeros pasos con el exitoso análisis cuantitativo de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales fraccionarias.

En una tercera etapa, se estudiará el problema clásico de estabilidad, para el caso de familias (a, k)-regularizadas. Para ello, haremos uso de [9], que es un resultado reciente sobre el tema . Allí, quedan aún muchos problemas por resolver, tanto del aspecto teórico como práctico. En este último caso, haremos un detallado análisis de situaciones particulares planteadas en el artículo [9], donde algunas simulaciones numéricas evidenciarán los resultados teóricos hallados en dicho artículo.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo tiene por objetivo, ayudar a la comprensión de algunos resultados, por medio de la referencia a otros, que se alejan del objetivo principal de este trabajo. Igualmente, introducimos algunas notaciones para mejorar la lectura del texto.

A partir de ahora, tomaremos a X como un espacio de Banach complejo con norma $\|\cdot\|$. Denotaremos por $\mathscr{B}(X)$ al álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados en X dotado con la norma usual de operadores, que a su vez se denota por $\|\cdot\|$. El operador identidad en X es denotado por $I \in \mathscr{B}(X)$, y $\mathbb{R}_+$ denota al intervalo $[0, \infty)$. Para un operador cerrado A, denotaremos por $\sigma(A), \sigma_p(A), \sigma_r(A), \sigma_a(A)$ el espectro, el espectro puntual, el espectro residual, y el espectro aproximado de A, respectivamente.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto denotamos por $C(\Omega; X)$ respectivamente $C^m(\Omega; X)$, los espacios de las funciones $f : \Omega \to X$, que son continuas respectivamente m-veces continuamente diferenciables.
Además consideramos el espacio:

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ es lineal y acotada, con } X, Y \text{ espacios normados}\}.$$

El siguiente resultado clásico en el Análisis Funcional, es conocido como Teorema de Banach-Steinhaus o Acotación Uniforme.

Teorema 2.0.1. *Sean X e Y espacios de Banach y $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ una familia de operadores lineales y continuos de X en Y. Si se cumple que para todo $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $\|T_\alpha x\| \leq M_x$, para todo $\alpha \in A$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|T_\alpha\| \leq M$, para todo $\alpha \in A$.*

Algo muy importante a lo largo de todo este trabajo será la transformada de Laplace. A continuación se recuerda su definición.
La transformada de Laplace de una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$ es denotada por

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

siempre que la integral existe. Una condición usual para ello es que f sea acotada por la función exponencial.
En este contexto, definimos la convolución entre dos funciones Laplace transformables como:

$$(a * k)(t) := \int_0^t k(t-s)a(s)ds,$$

donde $\widehat{(a * k)}(\lambda) = \widehat{a}(\lambda)\widehat{k}(\lambda)$.

Consideremos (M, d) un espacio métrico, se define el espacio

$$Lip(M; X) := \{F : M \to X : F(0) = 0, \|F\|_{Lip} := \sup_{t \neq s} \frac{\|F(t) - F(s)\|}{d(t,s)} < \infty\}.$$

El siguiente teorema, caracteriza aquellas funciones que son admisibles de poseer transformada de Laplace. Para mayor detalle sobre su demostración se puede consultar [16].

Teorema 2.0.2. *Sea $f : (0, \infty) \to X$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe $u \in Lip(\mathbb{R}_+; X), u(0) = 0$, tal que $f(\lambda) = \widehat{du}(\lambda)$ para todo $\Re(\lambda) > 0$, donde $\Re(\lambda)$ denota la parte real de λ.

(ii) $f \in C^\infty\big((0, \infty); X\big)$ y

$$\sup\{\lambda^{n+1}|f^{(n)}(\lambda)|/n! : \lambda > 0, n \in \mathbb{N}_0\} =: m_\infty(f) < \infty.$$

Si este es el caso, entonces se define $|u|_{Lip} := m_\infty(f)$

En el siguiente resultado se tiene que la convolución de dos funciones T y f es continuamente diferenciable bajo ciertas hipótesis de regularidad para ambas. Su demostración se puede hallar en [2].

Proposición 2.0.3. *Sea $T : [0, \tau] \to \mathcal{L}(X, Y)$ Lipschitz continua con $T(0) = 0$, y sea $f \in L^1([0, \tau], X)$. Entonces $T * f \in C^1([0, \tau], Y)$.*

Sea $F \in Lip(\mathbb{R}_+; X), F(0) = 0$ definimos

$$r(\lambda) := \widehat{dF(\lambda)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF(t), \quad (\lambda > 0),$$

donde la integral de la izquierda es la integral de Stieltjes.
Luego, $r \in C((0,\infty), X)$, y definimos el espacio

$$C_W^\infty\big((0,\infty)\big) := \{r \in C^\infty\big((0,\infty)\big) : \|r\|_W < \infty\}$$

donde

$$\|r\|_W := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sup_{\lambda>0} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \|r^{(n)}(\lambda)\|,$$

donde $r^{(n)}$ hace referencia a la n-ésima derivada de r y W es de Widder.

Corolario 2.0.4. *[2] Sea $q : \{\Re\lambda > 0\} \to X$ una función holomorfa. Si existe $M > 0$ tal que $\|\lambda q(\lambda)\| \le M$ y $\|\lambda^2 q'(\lambda)\| \le M$ para $\Re\lambda > 0$, entonces existe una función acotada $f \in C((0,\infty), X)$ tal que $q(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$ para $\Re\lambda > 0$. En particular $q \in C_W^\infty((0,\infty), X)$.*

A continuación nos aprestamos a definir a la transformada de Fourier y algunos resultados concernientes a ella, dicha transformada toma importancia en el Capítulo 5, donde se trabaja en espacios de Hilbert, y el comportamiento de esta transformada en dichos es conocido.
Para una función $f \in L^1(\mathbb{R}; X)$, la transformada de Fourier de f es la función $\mathscr{F}f : \mathbb{R} \to X$ definida por

$$(\mathscr{F}f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt. \tag{2.0.1}$$

También definimos la transformada de Fourier inversa de una función $f \in L^1(\mathbb{R}; X)$ como

$$(\overline{\mathscr{F}}f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t)dt = (\mathscr{F}f)(-s) = (\mathscr{F}\check{f})(s), \tag{2.0.2}$$

donde $\check{f}(t) := f(-t)$.
A continuación se presenta un teorema, en el que aparecen el Teorema de Convolución, el Lema de Riemann-Lebesgue y el Teorema de Inversión. En el caso del Lema de Riemann-Lebesgue, tiene como consecuencia que la transformada de Fourier pertenece al espacio de las funciones continuas que se desvanencen en $-\infty$ y ∞. Por otra parte, para una función $f \in L^1(\mathbb{R}; X)$, , existe su transformada de Fourier, sin embargo, podría haber problemas con su inversión; por ejemplo la función indicatriz de $-2\pi \le x \le 2\pi$ es integrable, pero

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-ist} dt = \frac{\sin(2\pi s)}{\pi s}$$

no lo es.

Teorema 2.0.5. *[2] Sea $f \in L^1(\mathbb{R};X)$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$.*

(a) $\mathscr{F}(g*f)(s) = (\mathscr{F})(s)\mathscr{F}f)(s)$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)(\mathscr{F}f)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}(\mathscr{F}g)(t)f(t)dt$.

*(c) (**Lema de Riemann Lebesgue**)* $\mathscr{F}f \in C_0(\mathbb{R};X)$.

*(d) (**Teorema de Inversión**) Si* $\mathscr{F}f \in L^1(\mathbb{R};X)$, *entonces* $f = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)$ *c.t.p.*

Para funciones escalar-valuadas, el Teorema de Plancherel muestra que $\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\|\mathscr{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ siempre que $f \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, y así la restrición de $\mathscr{F}$ a $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ tiene una única extensión a un operador lineal acotado sobre $L^2(\mathbb{R})$ (también denotado por $\mathscr{F}$), $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}$ es un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R})$, y se satisface el Teorema2.0.5 b) para $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Así, $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$, donde $(\overline{\mathscr{F}}f)(t) = (\mathscr{F}f)(-t)$.
El teorema de Plancherel no es cierto para funciones vector-valuadas, excepto cuando el espacio X es un espacio de Hilbert. Si X es un espacio de hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)_X$, entonces $L^2(\mathbb{R};X)$ es también un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(f|g)_{L^2(\mathbb{R};X)} := \int_{-\infty}^{\infty}(f(t)|g(t))_X dt.$$

Teorema 2.0.6. *[2] Sea X un espacio de Hilbert. Entonces $\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R},X)$ y $\|\mathscr{F}f\|_{L^2(\mathbb{R},X)} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R};X)}$ para toda $f \in L^1(\mathbb{R};X)\cap L^2(\mathbb{R};X)$. La restricción de $\mathscr{F}$ a $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R};X)$ extiende a un operador lineal acotado $\mathscr{F}$ sobre $L^2(\mathbb{R};X)$ y $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}$ es un operador unitario sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R};X)$. Más aún,*

$$\int_{-\infty}^{\infty}((\mathscr{F}f(t)|g(t))_X dt = \int_{-\infty}^{\infty}((f(t)|(\mathscr{F}g)(-t))_X dt$$

para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R};X)$.

A continuación revisaremos una función que toma importancia en este trabajo con mayor fuerza en el último capítulo, de estabilidad. Con dicho fin, recordamos algunas propiedades y representaciones que tiene esta función en base a [4].

La función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ y la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}(z)$ son importantes en el cálculo fraccionario, pues representan estados de transición en algunas situaciones físicas modeladas por el cálculo fraccionario, o las soluciones de las ecuaciones producidas por dicho modelamientos envuelven a estas funciones. La definición de la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}(z)$ es

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ \alpha > 0, \beta > 0. \tag{2.0.3}$$

Con ello, la relación entre la función de Mittag-Leffler de dos parámetros y la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ está dada por

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \ \ \alpha > 0. \tag{2.0.4}$$

La función de Mittag-Leffler de dos parámetros también puede ser relacionada con funciones tradicionales del siguiente modo

$$E_{1,1}(z) = e^z \qquad\qquad E_{2,1}(z^2) = cosh(z)$$
$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad\qquad E_{2,1}(z^2) = \frac{sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

A continuación se analiza el comportamiento de $E_{\alpha,\beta}(z)$ cuando $|z| \to \infty$ mediante su expansión asintótica.
El comportamiento asintótico de $E_{\alpha,\beta}(z)$ para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ está basada en la representación integral de la función $E_{\alpha,\beta}(z)$, de la forma

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{t^{\alpha-\beta} e^t}{t^\alpha - z} dt, \ \ \alpha > 0, \beta > 0. \tag{2.0.5}$$

El contorno de integración $\mathcal{C}$ es un lazo que comienza y termina en $-\infty$ y rodea el disco circular dado por $|t| \leq |z|^{1/\alpha}$ en sentido positivo con $|arg(t)| \leq \pi$ en $\mathcal{C}$.

La integral dada por la ecuación (2.0.5) tiene un punto de ramificación en $t = 0$. El plano complejo-t es cortado a lo largo del eje real negativo, y en el plano cortado la integral es evaluada en un único valor; se evalúa en la rama principal de t^α del plano de corte.

La representación dada por la ecuación (2.0.5) se puede aplicar para obtener el comportamiento asintótico de la función $E_{\alpha,\beta}(z)$ cuando $t \to \infty$, lo cual difiere para los casos en los cuales $0 < \alpha < 2$ y cuando $\alpha \geq 2$.

Cuando $0 < \alpha < 2$, para un número real θ que satisface $\frac{\alpha\pi}{2} < \theta < \text{mín}[\pi, \alpha\pi]$ y para $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \ \alpha > 0, \beta > 0, \tag{2.0.6}$$

cuando $|z| \to \infty$ y $|arg(z)| \leq \theta$.

Por otro lado, cuando $\alpha \geq 2$ se tiene que

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n}\left[z^{1/\alpha}exp\left(\frac{2n\pi j}{\alpha}\right)\right]^{1-\beta} exp\left(exp\left(\frac{2n\pi j}{\alpha}\right)z^{1/\alpha}\right) \tag{2.0.7}$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha k)}\frac{1}{z^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right),\ \alpha,\beta > 0, \tag{2.0.8}$$

cuando $|z| \to \infty$ y $|arg(z)| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$. La primera suma se considera sobre todos los valores enteros de n que satisfacen la siguiente condición $|arg(z) + 2\pi n| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$.

Capítulo 3

Introducción a la Teoría de Semigrupos

El presente capítulo tiene como objetivos principales, primero, el de introducir los conceptos de C_0-semigrupo, y el de generador. Además de ver propiedades y equivalencias, es dar las herramientas necesarias para llegar el teorema más importante de este capítulo, que es el de Teorema de Hille-Yosida, y su respectiva demostración.

En lo que sigue X denotará un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

3.1. C_0-semigrupos.

Definición 3.1.1. *Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathscr{B}(X)$ es un C_0-semigrupo de operadores acotados si:*

(i) $T(0) = I$

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)\ \ \forall s, t \geq 0$

(iii) $\lim_{t\to 0^+} T(t)x \to x$ *para cada* $x \in X$ *con respecto a la norma de* X.

Si además satisface

(iv) $\|T(t) - I\| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ *diremos que es un semigrupo uniformemente continuo.*

Observación: La condición (iii) también se expresa diciendo que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo. Además es fácil darse cuenta que el conjunto de los semigrupos

uniformemente continuos está contenido en el de los fuertemente continuos, pues un semigrupo uniformemente continuo converge uniformemente a la identidad en el cero, mientras que un C_0-semigrupo converge fuertemente.

Definición 3.1.2. *(Generador) Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo. Se define*

$$A_t x := \frac{T(t)x - x}{t}.$$

El generador de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, denotado por A, es definido por:

$$A_T x := \lim_{t\to 0^+} A_t x = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},\ \ x \in D(A) \tag{3.1.1}$$

donde este límite es evaluado en términos de la norma de X y

$$D(A) := \{x \in X / \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ existe\}. \tag{3.1.2}$$

El resultado a continuación nos muestra que para un operador acotado A el semigrupo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo.

Teorema 3.1.3. *Sea A un operador acotado. Entonces,*

$$T(t) = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},\ t \in \mathbb{R}_+$$

es un semigrupo uniformemente continuo.

Demostración. Como A es acotado sabemos que la norma de A existe y así

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

converge para cada $t \geq 0$. Notemos que la propiedad de semigrupo, viene de la propia definición, donde claramente $T(0) = I$.

Finalmente, mostremos que $T(t)$ es un semigrupo uniformemente continuo:

$$\|T(t) - I\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} - 1$$

y como $e^{t\|A\|} - 1 \to 0^+$ cuando $t \to 0$ se tiene lo pedido. □

Notemos que si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo su generador es un operador lineal acotado, es decir vale la recíproca al Teorema anterior. Antes de probar esta afirmación, mostremos algunos resultados previos que son necesarios.

Lema 3.1.4. *Si $A \in \mathscr{B}(X)$ y $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es invertible.*

Demostración. La función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Como $\|A\| < 1$, se tiene que $f(A) \in \mathscr{B}(X)$, luego

$$(I-A)f(A) = \sum_{n=0}^{\infty}(I-A)A^n = \sum_{n=0}^{\infty}(A^n - A^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(I-A) = f(A)(I-A),$$

además

$$(I-A)f(A) = \sum_{n=0}^{\infty}(A^n - A^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I,$$

luego $(I-A)f(A) = f(A)(I-A) = I$. Por lo tanto $I - A$ es invertible. □

Proposición 3.1.5. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo de operadores, entonces $D(A_T) = X$ y $A_T \in \mathscr{B}(X)$.*

Demostración. Por la convergencia uniforme, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| I - \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} T(s)ds \right| < 1. \tag{3.1.3}$$

Usando el Lema 3.1.4 se tiene que $\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} T(s)ds$ es invertible, y por lo tanto $\int_0^{\delta} T(s)ds$ es invertible. Así, para $h \in (0, \delta)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}[T(h)-I]\int_0^{\delta} T(s)ds &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{\delta} T(s+h)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^{\delta+h} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^{\delta} T(s)ds + \int_{\delta}^{\delta+h} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds - \int_h^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{\delta}^{\delta+h} T(s+h)ds - \int_0^{h} T(s)ds\right].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{h}[T(h)-I] = \frac{1}{h}\left[\int_{\delta}^{\delta+h} T(s+h)ds - \int_0^{h} T(s)ds\right]\left[\int_0^{\delta} T(s)ds\right]^{-1}$$

por lo que

$$\frac{1}{h}[T(h)-I] \xrightarrow[h\to 0]{} [T(\delta)-I]\left[\int_0^{\delta} T(s)ds\right]^{-1}.$$

Dado que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte, tenemos que para todo $x \in X$ existe $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[T(h)x - x]$. Concluimos que $D(A_T) = X$ y

$$A_T = [T(\delta) - I]\left[\int_0^\delta T(s)ds\right]^{-1} \in \mathscr{B}(X)$$

por ser $\mathscr{B}(X)$ un álgebra. □

Luego, como ya se había mencionado anteriormente, en el caso de los semigrupos uniformemente continuos su generador es un operador acotado.

La siguiente proposición muestra la continuidad de la función $\phi_x : [0, \infty) \to X$ definida por $\phi_x = T(t)x$. Este hecho permite dar sentido a la integral de Riemann $\int_a^b T(s)x$ para todo $x \in X$.

Proposición 3.1.6. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo entonces, para cada $x \in X$, la función $t \mapsto T(t)x$ es continua de $\mathbb{R}_+$ en X.*

Demostración. Sean $t \geq 0, h \in [0, t], x \in X$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t)\|\,\|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt}\|T(h)x - x\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0\end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}\|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{wt}\|x - T(h)x\| \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado muestra que un C_0-semigrupo resulta ser exponencialmente acotado para cada $t \geq 0$.

Teorema 3.1.7. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo. Entonces existen $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para cada $t \geq 0$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 3.1.6 se tiene la continuidad fuerte , y luego por el Teorema de Banach-Steinhaus[2.0.1], existe una constante $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq$

$M, \forall\, 0 \leq t \leq 1$. Sea $w = LogM$. Entonces para cada $t \geq 0$, y si n es el entero más pequeño mayor o igual a t tenemos:

$$\|T(t)\| = \|T(\frac{t}{n} + ... + \frac{t}{n})\| = \|T(\frac{t}{n}) \cdots T(\frac{t}{n})\| = \|(T(\frac{t}{n}))^n\| \leq M^n \leq M^{t+1} = Me^{wt}$$

ya que $t < n < t + 1$. □

Teorema 3.1.8. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo generado por A. Entonces se cumple lo siguiente:*

(i) Para cada $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x,\ t \geq 0.$$

(ii) Para cada $x \in D(A)$,

$$T(t)x \in D(A)\ \ y\ \ \frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x,\ \forall t \geq 0. \tag{3.1.4}$$

(iii) Para cada $x \in X$ y $t \geq 0$, se tiene $\int_0^t T(s)x \in D(A)$ y se verifican las siguientes identidades

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)xds,\ x \in X,$$

y

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds,\ x \in D(A).$$

Demostración. (i) Es directo de la continuidad fuerte de $T(t)$ mostrada anteriormente, y del Teorema Fundamental del Cálculo.

(ii) Sea $x \in D(A)$ y $h > 0$, entonces se tiene que $\frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x)$ converge a $T(t)Ax$ cuando $h \to 0$. Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((T(h)T(t)x - T(t)x)$$

existe, de donde $T(t)x \in D(A)$ por la definición (3.1.2) de $D(A)$, con $AT(t)x = T(t)Ax$.

(iii) Para $x \in X$ y $t \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\int_0^h T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds,\end{aligned}$$

la cual por (i) converge a $T(t)x - x$ cuando $h \to 0$. Si $x \in D(A)$, entonces la función $s \longmapsto T(s)\frac{T(h)x-x}{h}$ converge uniformemente a la función $s \longmapsto T(s)Ax$ cuando $h \to 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(T(h) - I)\int_0^t T(s)xds &= \lim_{h\to 0}\int_0^t T(s)(T(h) - I)xds \\ &= \int_0^t T(s)Axds.\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado muestra dos hechos importantes, primeramente es que el generador de un C_0-semigrupo no siempre resulta ser acotado, pero si cumple la propiedad de ser cerrado. El otro es que si bien es posible que $D(A) \subsetneq X$, siendo A el generador, siempre se tiene que $\overline{D(A)} = X$.

Teorema 3.1.9. *Si A es el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces $D(A)$ es denso en X, y A es un operador cerrado.*

Demostración. Primero mostremos que $D(A)$ es denso en X, es decir $\overline{D(A)} = X$.
Sea $x \in X$ cualquiera, y definamos x_t por

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds.$$

Por (iii) del Teorema 3.1.8 $x_t \in D(A)$, y además por (i) del mismo Teorema

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds \to T(0)x = x \text{ si } t \to 0^+.$$

Luego, $x = \lim_{n\to+\infty} x_{\frac{1}{n}} \in D(A)$. Como x es arbitraria, se tiene que $\overline{D(A)} = X$.

Ahora mostremos que A es un operador cerrado, esto es que si
$\{x_n\}_n \subset D(A), x_n \to x$, y $Ax_n \to g$, entonces $x \in D(A)$ y $Ax = g$.

Sea entonces $\{x_n\}_n \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$, y $Ax_n \to g$ cuando $n \to \infty$. Por la parte (iii) del Teorema 3.1.8 tenemos que:

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds \tag{3.1.5}$$

para cada $n \geq 1$ y $t > 0$. Por el Teorema 3.1.7 existen constantes $M > 0$ y $w \in \mathbb{R}$ tales que $||T(s)|| \leq Ce^{ws}$. Además

$$\begin{aligned} \| \int_0^t T(s)Ax_n ds - \int_0^t T(s)g ds\| &\leq \int_0^t \|T(s)\|\|Ax_n - g\| ds \\ &\leq \int_0^t Me^{ws}\|Ax_n - g\| ds \\ &\leq \int_0^t Me^{wt}\|Ax_n - g\| ds \\ &= Me^{wt}t\|Ax_n - g\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Así haciendo $n \to \infty$ en (1.1.4) se obtiene

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)g ds$$

esto es

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)g ds$$

de donde

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)g ds = g$$

Luego, por definición, $x \in D(A)$ y $Ax = g$. Por lo tanto, A es cerrado. □

El siguiente teorema nos dice que un semigrupo es caracterizado únicamente por su generador. Es decir, si A es un operador con dominio $D(A)$ denso en X, A puede ser el generador infinitesimal a lo sumo de un semigrupo fuertemente continuo.

Teorema 3.1.10. *Un semigrupo es únicamente determinado por su generador.*

Demostración. Sean S y T dos semigrupos que tienen el mismo generador A. Sea $x \in D(A)$ y $t \geq 0$.
Definimos $u : [0, t] \to X$ por $u(s) = T(s)S(t - s)x$. Entonces por (ii) del Teorema 3.1.8 se obtiene

$$\frac{du(s)}{ds} = -AT(s)S(t - s)x + T(s)AS(t - s)x,$$

luego por (ii) del Teorema 3.1.8 $T(t)$ conmuta con A en $D(A)$ por lo que

$$\frac{du(s)}{ds} = T(s)(-A)S(t - s)x + T(s)AS(t - s)x = 0.$$

Luego u es constante en $[0, t]$, en particular

$$T(t)x = u(t) = u(0) = S(t)x$$

Por lo tanto $T = S$ en $D(A)$. Pero como $\overline{D(A)} = X$, entonces $T = S$ en X. □

3.2. C_0-semigrupos de contracciones.

De la sección anterior, se sabe que todo C_0-semigrupo satisface $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para ciertas constantes $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$. Si $w = 0$, $T(t)$ se dice uniformemente acotado y si además $M = 1$, se llama C_0-semigrupo de contracciones en cuyo caso se tiene:

$$\|T(t)\| \leq 1, \ \forall\, t \geq 0.$$

Ahora se quiere caracterizar a los generadores infinitesimales de C_0-semigrupos de contracciones. Para esto, si A es un operador lineal, no necesariamente acotado, en X, el conjunto resolvente de A se define como:

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - A \text{ es invertible y } (\lambda I - A)^{-1} \text{ es un operador acotado en } X\}.$$

La familia de operadores lineales acotados $R(\lambda : A) := (\lambda I - A)^{-1}$, con $\lambda \in \rho(A)$, se llama el operador resolvente de A.

Teorema 3.2.1 (Hille-Yosida)**.** *Un operador $A : D(A) \to X$, no necesariamente acotado, es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si y sólo si:*

(i) A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene a $\mathbb{R}_+$ y para todo $\lambda > 0$ se tiene

$$\|R(\lambda : A)\| \leq 1/\lambda$$

3.3. Demostración del Teorema de Hille-Yosida: necesidad

Si A es el generador un C_0-semigrupo de contracciones $T(t)$ dado, se tiene por Teorema 3.1.9 que $T(t)$ es cerrado y $\overline{D(A)} = X$. Ahora, dado $\lambda > 0$, postulamos como candidato a la inversa de $(\lambda I - A)$ al operador definido por

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \ x \in X. \tag{3.3.6}$$

Como $t \to T(t)x$ es continuo y uniformemente acotado(pues $\|T(t)x\| \leq \|x\|$), la integral impropia existe en el sentido de Riemann y más aún define un operador lineal acotado que satisface

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \ x \in X, \lambda > 0. \tag{3.3.7}$$

Luego, para probar la necesidad sólo nos falta verificar que $R(\lambda)$ es efectivamente la inversa de $(\lambda I - A)$.
Para ello, consideremos $h > 0$, y observemos que

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(t+h)x - T(t)x]dt \\ &= \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt.\end{aligned}$$

Cuando $h \downarrow 0$, el lado derecho de la anterior identidad converge a $\lambda R(\lambda)x - x$. Así, puesto que A es cerrado, se obtiene que para todo $x \in X$ y para todo $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ y más aún

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

En consecuencia,

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \tag{3.3.8}$$

Para que $R(\lambda)$ sea propiamente la inversa, falta ver qué sucede cuando se opera por la izquierda. Dado $x \in D(A)$ tenemos

$$\begin{aligned}R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó que $T(t)Ax = AT(t)x$, para todo $x \in D(A)$. Como A es cerrado, de la convergencia de la última integral impropia se deduce que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt &= A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= AR(\lambda)x,\ \forall x \in D(A).\end{aligned}$$

Luego, $R(\lambda)$ y A conmutan sobre $D(A)$, lo que junto con (3.3.8) implica que

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A).$$

Por lo tanto, $R(\lambda)$ es la inversa de $\lambda I - A$ para todo $\lambda > 0$.
De aquí se obtiene (ii) del Teorema 3.2.1 gracias a la desigualdad (3.3.7).

3.4. Regularizada de Yosida

Antes de demostrar la suficiencia de las condiciones (i) y (ii) del Teorema 3.2.1, necesitamos algunos lemas previos.

Lema 3.4.1. *Sea A un operador que satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 3.2.1. Si $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existe entonces*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \forall x \in X. \tag{3.4.9}$$

Demostración. Sea $x \in D(A)$. Luego, dado $\lambda > 0$, se tiene

$$R(\lambda : A)(\lambda I - A)x = x,$$

de donde obtenemos que

$$\lambda R(\lambda : A)x - x = R(\lambda : A)Ax,$$

y luego por hipótesis (ii) se obtiene

$$\|\lambda R(\lambda : A)x - x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0.$$

Así el resultado es cierto para $x \in D(A)$. Sea ahora, $\{x_n\} \subseteq D(A)$ con $x_n \to x$, donde $x \in X$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda : A)(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq 2\|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| \leq 2\|x - x_n\|.$$

Haciendo $n \to \infty$ se deduce que $\lim_{\lambda \to +\infty} \sup \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| \leq 0$ y por lo tanto

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x,\ x \in X.$$

Como por hipótesis (i) $D(A)$ es denso en X, se prueba lo pedido. □

Dado un C_0-semigrupo de contracciones con generador A, la regularizada de Yosida nos dice que bajo ciertas condiciones es posible aproximar dicho semigrupo puntualmente en $D(A)$, por una familia de operadores $\{A_\lambda\}$ acotados, lineales y lipschitzianos, que son generadores de C_0-semigrupos de contracciones. Este hecho es particularmente útil, cuando el operador A resulta ser no acotado.

Definición 3.4.2. *Para cada $\lambda > 0$ se define la regularizada de Yosida de A como el siguiente operador acotado*

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda : A) \tag{3.4.10}$$

$$= \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I. \tag{3.4.11}$$

Lema 3.4.3. *Si A satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 3.2.1, entonces*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in D(A). \tag{3.4.12}$$

Demostración. Primero mostremos que $R(\lambda : A)$ conmuta con A en $D(A)$, para ello sabemos que dado $\lambda > 0$ y $x \in D(A)$ se tiene

$$R(\lambda : A)(\lambda I - A)x = x, \tag{3.4.13}$$

y

$$(\lambda I - A)R(\lambda : A)x = x. \tag{3.4.14}$$

De (3.4.13) obtenemos que

$$\lambda R(\lambda : A)x - R(\lambda : A)Ax = x$$

y de (3.4.14)

$$\lambda R(\lambda : A)x - AR(\lambda : A)x = x.$$

De ambas igualdades se deduce que $R(\lambda : A)Ax = AR(\lambda : A)x$, para todo $x \in D(A)$.

Para $x \in D(A)$, del Lema 3.4.1 y de la definición de A_λ tenemos que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = \lim_{\lambda \to +\infty} A\lambda R(\lambda : A)x = Ax.$$

□

El siguiente lema nos hace ver que bajo ciertas condiciones el operador A, generador de un C_0-semigrupo de contracciones puede ser aproximado mediante operadores lipschitzianos.

Lema 3.4.4. *Sea A satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) del Teorema 3.2.1. Si A_λ es la regularizada de Yosida de A, entonces A_λ es el generador de un semigrupo uniformemente continuo de contracciones e^{tA_λ}. Más áun, para cada $x \in X, \lambda, \mu > 0$, $t \geq 0$ se tiene que:*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|. \tag{3.4.15}$$

Demostración. Como $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$, es claro que se trata de un operador lineal acotado, y por lo tanto, es el generador del semigrupo uniformemente continuo $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Además

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A)-\lambda I)}\| \\
&= e^{-\lambda t}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)}\| \\
&\leq e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t\|R(\lambda:A)\|} \\
&\leq e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t\cdot\frac{1}{\lambda}} \quad \text{(por (ii) del Teo. 3.2.1)} \\
&= e^{-\lambda t}e^{\lambda t} \\
&= 1
\end{aligned}$$

y por lo tanto e^{tA_λ} es un semigrupo uniformemente continuo de contracciones. Por otra parte, es claro de las definiciones que $A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}$ conmutan entre sí. Luego

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \|\int_0^t e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}[A_\lambda x - A_\mu x]ds\| \\
&\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|
\end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad. □

3.5. Demostración del Teorema de Hille-Yosida: suficiencia

Demostración. Sea $x \in D(A)$. Por el Lema 3.4.4 se tiene que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|.$$

Por el Lema 3.4.3 se tiene que $(e^{tA_\lambda})_{\lambda\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{B}(X)$, que es completo, y por ende converge cuando $\lambda \to \infty$. Más aún la convergencia es uniforme sobre intervalos acotados $[0, T]$. Como por hipótesis (i) $D(A)$ es denso en X y $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$, se puede construir el operador $T(t)$ como el límite fuerte cuando $\lambda \to \infty$ del operador $(e^{tA_\lambda})_{\lambda\geq 0}$, este semigrupo resulta ser justamente el semigrupo generado por A. Luego, se define

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x =: T(t)x \text{ para cada } x \in X. \tag{3.5.16}$$

Note que el límite 3.5.16 es también uniforme en intervalos acotados.
Es claro que $T(t)$ satisface $T(0) = I$, $\|T(t)\| \leq 1$ y se tiene la propiedad de semigrupo.

Además, la función $t \to T(t)x$ es continua en $[0,T]$ por tratarse de límite uniforme de funciones continuas: $t \to e^{tA_\lambda}$. Por lo tanto $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo de contracciones. Sea B su generador. Para concluir esta demostración, basta mostrar que A es el generador de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ esto es, $A = B$ lo que significa $A \subset B,\ B \subset A$ y$D(A) = D(B)$. Sea $x \in D(A)$. Tenemos por Teorema 3.1.8 (ii) que

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to+\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(t)Axds, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la convergencia uniforme de $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ a $T(s)Ax$ en el intervalo $[0,t]$. Luego, como B es el generador de $T(t)$, se deduce que $D(A) \subseteq D(B)$ y, más aún,

$$Bx = Ax,\ \forall x \in D(A).$$

Pero por hipótesis, $1 \in \rho(A)$ y, por la condición necesaria $1 \in \rho(B)$. En particular $(I - B)D(B) = X$, pero como $D(B) \supseteq D(A)$, tenemos

$$X = (I-B)D(B) \supseteq (I-B)D(A) = (I-A)D(A) = X. \tag{3.5.17}$$

En consecuencia, $D(B) = (I-B)^{-1}X = D(A)$ y así, $B = A$ en X. □

Observemos que el Teorema de Hille-Yosida caracteriza aquellos operadores A, para los cuales el problema abstracto de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t),\ \ t \geq 0 \\ u(0) = x,\ \ x \in D(A) \end{cases}$$

admite solución única. En este caso, la solución viene dada por $u(t) = T(t)x$, siendo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo de operadores lineales y acotados en X, con generador A.

Capítulo 4

Familias (a,k)-regularizadas

En este capítulo ahondaremos en el área de las familias (a,k)-regularizadas, un área que es relativamente nueva en la teoría de las EDP, la cual fue introducida por primera vez en [7]. A lo largo de este capítulo veremos la definición de estas familias, y las propiedades que éstas poseen, además de algunos resultados que se han ido obteniendo por distintos autores en el transcurso del tiempo([7], [13], [12], [8], [10], [11]). Como parte del trabajo de esta tesis se realiza la demostración del Teorema de generación 4.2.4 de las familias (a,k)-regularizadas en su caso general, el cual no se halla en la literatura asociada.
Por otra parte, veremos cómo se pueden aplicar a problemas concretos de evolución, y el rol que cumplen las familias (a,k)-regularizadas a la hora de resolver dichos problemas mediante las herramientas que estas familias nos entregan.

4.1. Definición

Comenzamos esta sección con la siguiente definición.

Definición 4.1.1. *Sean $k \in C(\mathbb{R}_+), k \neq 0$ y $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+), a \neq 0$ dadas. Asumamos que A es un operador lineal con dominio $D(A)$. Una familia $\{R(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{B}(X)$ fuertemente continua es llamada familia resolvente (a,k)-regularizada en X teniendo a A como generador si se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $R(0) = k(0)I$;

(ii) $R(t)x \in D(A)$ *y* $R(t)Ax = AR(t)x$ *para todo* $x \in D(A)$ *y* $t \geq 0$;

(iii) $R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AR(s)xds, t \geq 0, x \in D(A)$.

Esta definición generaliza las teorías de C_0-semigrupos, semigrupos r-veces integrados, semigrupos k-convoluidos, familias coseno r-veces integradas y familias resolventes, entre otras. Por ello, es que para una variada clase de ecuaciones de evolución la existencia y la unicidad como también propiedades cualitativas de sus soluciones han sido asociadas a familias (a,k)-regularizadas. Por ejemplo, el problema de Cauchy abstracto de primer y segundo orden, ecuaciones de Volterra del tipo

$$u(t) = \int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t),$$

y ecuaciones de orden fraccionario entre otros.
A continuación veremos en un contexto más amplio algunos de los resultados más importantes del capítulo anterior, y además como los C_0-semigrupos resultan ser un caso particular de las distintas aplicaciones que se pueden llegar a obtener en las familias (a,k)-regularizadas.
En la última parte de este capítulo se muestra cómo asociar distintos problemas de evolución a sus correspondientes familias (a,k)-regularizadas.

4.2. Algunas propiedades de familias (a,k)-regularizadas

Diremos que $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es del tipo (M,w) si existen constantes $M \geq 0$ y $w \in \mathbb{R}$ tal que

$$||R(t)|| \leq Me^{wt} \quad \forall t \geq 0.$$

Recordemos que la transformada de Laplace de una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$ es denotada por

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt \quad \Re(\lambda) > w.$$

También denotaremos por $(a * k)(t) := \int_0^t k(t-s)a(s)ds$ la convolución finita entre a y k.

Lema 4.2.1. *Supongamos que $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente (a,k)-regularizada. Entonces $a * R(t)x \in D(A)$ para todo $x \in X$, $t \geq 0$ y*

$$R(t)x = k(t)x + A\int_0^t a(t-s)R(s)xds, \;\; x \in X, \; t \geq 0. \tag{4.2.1}$$

Un importante resultado concerniente a la caracterización de las familias resolventes (a,k)-regularizadas es el siguiente:

Proposición 4.2.2. *Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ una familia exponencialmente acotada y fuertemente continua de operadores en $\mathcal{B}(X)$. Entonces $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una resolvente (a,k)-regularizada con generador A si y sólo si para cada $\lambda > w$, $(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ existe en $\mathcal{B}(X)$ y*

$$\hat{k}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}R(s)xds \ \ \forall x \in X.$$

Demostración. **Necesidad**

Supongamos que $R(t)$ es una resolvente (a,k)-regularizada. Asumimos que la transformada de Laplace $H(\lambda) = \hat{R}(\lambda)$ existe para $\lambda > w$. Luego, afirmamos que $\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ y

$$H(\lambda) = \hat{k}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}. \tag{4.2.2}$$

En efecto, por (4.2.1), el Teorema de Fubini, y el Teorema de convolución

$$\begin{aligned} H(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}k(t)xdt + A\int_0^\infty \left(e^{-\lambda t}\int_0^t a(t-s)R(s)xds\right) \\ &= \hat{k}(\lambda)x + A\int_0^\infty R(s)x\left(\int_s^\infty e^{-\lambda t}a(t-s)dt\right)ds \\ &= \hat{k}(\lambda)x + A\hat{a}(\lambda)H(\lambda)x \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

$$H(\lambda)x = \hat{k}(\lambda)x + A\hat{a}(\lambda)H(\lambda)x, \ \ x \in X,$$

y por (iii) de la Definición (4.1.1) tenemos

$$H(\lambda)x = \hat{k}(\lambda)x + \hat{a}(\lambda)H(\lambda)Ax, \ \ x \in D(A).$$

Luego los operadores $I-\hat{a}(\lambda)A$ son invertibles y se obtiene (4.2.2).

Suficiencia

Sean $\mu, \lambda > w$ y $x \in D(A)$. Entonces $x = (I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}y$ para algún $y \in X$. Desde el hecho que $(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ y $(I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}$ son acotados y conmutan, y A es cerrado,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t}R(t)xdt &= \hat{R}(\lambda)(I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}y \\ &= \hat{k}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}(I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}y \\ &= (I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}\hat{k}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}y \\ &= (I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}\hat{R}(\lambda)y \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}R(t)ydt \end{aligned}$$

Así, por la unicidad de la transformada de Laplace

$$R(t)x = (I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}R(t)(I - \hat{a}(\mu)A)x$$

para casi todo los $t \geq 0$.
Como $\hat{a}(\mu) \neq 0$ y $R(t)$ es fuertemente continua, concluimos que $R(t)x \in D(A)$ y $AR(t) = R(t)Ax$ para cada $t \geq 0, x \in D(A)$.
Para probar (iii) de la Definición (4.1.1), sea $\lambda > w$ y $x \in D(A)$. Entonces, del Teorema de convolución obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}k(t)xdt &= \hat{k}(\lambda)x \\ &= \hat{R}(I - \hat{a}(\lambda)A)x \\ &= \hat{R}(\lambda) - \hat{R}(\lambda)\hat{a}(\lambda)Ax \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[R(t)x - \int_0^t a(t-s)R(s)Axds\right]dt.\end{aligned}$$

El Teorema de unicidad y la continuidad fuerte de $R(t)$ nos entregan la ecuación de la resolvente (a, k) regularizada. Finalmente por Lema (4.2.1) obtenemos que $R(0) = k(0)I$ y la prueba queda completa. □

Notemos que de esta proposición queda en evidencia, que una familia resolvente generaliza la noción de C_0-semigrupo.
El siguiente resultado corresponde al teorema de generación de la teoría.
Asumimos que la Transformada de Laplace para $a(t)$ y $k(t)$ existen para todo $\lambda > w$, y que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda > w$.

Definición 4.2.3. *Una familia $\{U(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{B}(X)$ continua es llamada localmente Lipschitz si para $T > 0$ existe una constante $C_T > 0$ tal que*

$$||U(t) - U(s)|| \leq C_T|t - s| \text{ para cada } s, t \in [0, T].$$

Teorema 4.2.4. *Sea A un operador lineal cerrado densamente definido en X. Entonces $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente (a, k)-regularizada del tipo (M, w), si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones*

(i) $\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ *para todo* $\lambda > w$

(ii) $H(\lambda) := \hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ *satisface la estimación:*

$$||H^{(n)}(\lambda)|| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - w)^{n+1}}, \quad \lambda > w, n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. **Necesidad**.
Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ una familia resolvente del tipo (M, w), entonces su transformada de Laplace

$$\hat{R}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(t)dt,\ \lambda > w \tag{4.2.3}$$

está bien definida, es analítica para $\lambda > w$, y satisface la estimación

$$||R^n(\lambda)|| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - w)^{n+1}},\ \lambda > w, n \in \mathbb{N}_0.$$

Para calcular $H(\lambda)$ usamos las ecuaciones de la familia resolvente

$$R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AR(s)xds,\ \forall x \in D(A), t \geq 0,$$

y

$$R(t)x = k(t)x + A\int_0^t a(t-s)R(s)xds,\ \forall x \in X, t \geq 0.$$

Del teorema de convolución, obtenemos que para $\lambda > w$ se tiene la relación

$$\hat{R}(\lambda)x = \hat{k}(\lambda)x + \hat{a}(\lambda)\hat{R}(\lambda)Ax,$$

válida para cada $x \in D(A)$, y

$$\hat{R}(\lambda)x = \hat{k}(\lambda)x + A\hat{a}(\lambda)\hat{R}(\lambda)x,$$

para cada $x \in X$. Así los operadores $I - \hat{a}(\lambda)A$ son biyectivos, luego invertibles, y obtenemos que:

$$\hat{R}(\lambda) = \hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1} = H(\lambda),\ \ \lambda > w.$$

En particular, $\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ para todo $\lambda > w$, pues se tiene que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$.

Suficiencia.
Consideramos la familia $\{U_w(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{B}(X)$ definida por

$$U_w(\lambda) := H(\lambda + w)/\lambda, \lambda > 0.$$

luego esta familia es Lipschitz, pues la condición (ii) y el Teorema 2.0.2 implican que existe una familia $\{u(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{B}(X)$ satisfaciendo $u(0) = 0$,

$$||u(t+h) - u(t)|| \leq Mhe^{w(t+h)},\ \ \forall t, h \geq 0 \tag{4.2.4}$$

tal que

$$\hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}x = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)xdt,\ \ \forall x \in X\ y\ \lambda > w. \tag{4.2.5}$$

Definimos $\{U(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{B}(X)$ por

$$U(t) = e^{wt}U_w(t) - w\int_0^t e^{ws}U_w(s)ds,\ t \geq 0$$

Entonces $U(t)$ es localmente Lipchitz. Por otra parte, recordemos que si f es una función que posee transformada de Laplace $\hat{f}(\lambda)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{wt}f(t)dt &= \int_0^\infty e^{-(\lambda-w)t}f(t)dt \\ &= \hat{f}(\lambda - w),\end{aligned}$$

lo que implica $\widehat{e^{w\lambda}U_w(\lambda)} = \widehat{U_w}(\lambda - w)$. De forma similar se tiene que, en general

$$\begin{aligned}\widehat{\int_0^t e^{ws}f(s)ds} &= e^{wt}\widehat{\int_0^t e^{-w(t-s)}f(s)ds} \\ &= \widehat{e^w}(\lambda - w)\hat{f}(\lambda - w)\end{aligned}$$

por lo tanto, $w\widehat{\int_0^\lambda e^{ws}U_w}(s)ds = w\widehat{e^w}(\lambda - w)\widehat{U_w}(\lambda - w)$.
Combinando las observaciones anteriores, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\widehat{U}(\lambda) &= \widehat{U_w}(\lambda - w) - w\widehat{e^w}(\lambda - w)\widehat{U_w}(\lambda - w) \\ &= \widehat{U_w}(\lambda - w) - w\cdot\frac{1}{\lambda}\widehat{U_w}(\lambda - w) \\ &= \widehat{U_w}(\lambda - w)\big(1 - \frac{w}{\lambda}\big) \\ &= \frac{(\lambda - w)}{\lambda}\widehat{U_w}(\lambda - w) \\ &= \frac{(\lambda - w)}{\lambda}\frac{H(\lambda)}{(\lambda - w)} \\ &= \frac{H(\lambda)}{\lambda}\end{aligned}$$

para $\lambda > w$.
La definición de $H(\lambda)$ muestra que $U(t)$ conmuta con A y nos provee la identidad

$$\widehat{U}(\lambda) = \lambda^{-1}\hat{k}(\lambda) + \hat{a}(\lambda)\hat{U}(\lambda)A,$$

es decir $U(t)x = \big(\int_0^t k(s)ds\big)x + a * U(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$, $t \geq 0$.

Dado que para cada $x \in D(A)$, $f(t) = U(t)Ax$ es localmente Lipschitz y $a(t)$ es localmente integrable, tenemos que por la Proposición 2.0.3 $U(t)x$ es continuamente diferenciable en

$\mathbb{R}_+$ para cada $x \in D(A)$. Así,
$U^{'}(t)x = k(t)x + (a * f(t))^{'} = k(t)x + a * df(t)$, para casi todos los $t \geq 0$.

Definimos $R(t)x = U^{'}(t)x, t \geq 0, x \in X$; como $D(A)$ es denso, $R(t)$ puede ser extendido a un operador acotado gracias a (4.2.4) y el Teorema de Banach-Steinhaus.

Luego es claro que $R(t)x$ es fuertemente continuo, de tipo (M, w) y $R(t)$ conmuta con A, pues $U(t)$ lo hace, y A es cerrado.
Finalmente, $\hat{R}(\lambda) = H(\lambda)$ para $\lambda > w$ y por la condición (ii) obtenemos

$$\hat{R}(\lambda) = \hat{k}(\lambda) + \hat{a}(\lambda)\hat{R}(\lambda)A \tag{4.2.6}$$

de donde se obtiene la identidad (iii) de la Definición. □

Aunque este teorema de generación caracteriza a todos los generadores de una familia resolvente (a, k)-regularizada, existe dificultad para verificar en la práctica la estimación (ii) para todas las derivadas del operador $H(\lambda)$ en aplicaciones concretas. Por ello, se intenta construir el operador de forma más simple, utilizando técnicas de perturbación. El siguiente es el principal resultado disponible hasta ahora. Se corresponde con la extensión del teorema de Miyadera-Voigt en la teoría de C_0-semigrupos. En este teorema, la perturbación B es acotada sólo respecto del dominio del generador A, dotado con la norma del grafo $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$.

Teorema 4.2.5. *Sea A un operador cerrado en X. Asumamos que A genera una familia resolvente (a, k)-regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ del tipo (M, w) y supongamos que*

(i) Existe $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que $(k * b)(t) = a(t)$ para todo $t \geq 0$.

(ii) Existen constantes $\mu > w$ y $\gamma \in [0, 1)$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\mu r}||B\int_0^r b(r-s)R(s)xds||dr \leq \gamma||x|| \quad \forall x \in D(A).$$

Entonces $A + B$ genera una familia resolvente (a, k)-regularizada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en X tal que $||S(t)|| \leq \frac{M}{1-\gamma}e^{\mu t}$. Además

$$S(t)x = R(t)x + \int_0^t S(t-r)B\int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr, \quad x \in X.$$

Demostración. Definimos inductivamente operadores $T_n(t) \in \mathscr{B}(X)(n = 0, 1, 2, ...), t \geq 0$ con las siguientes propiedades:

(a) $t \to T_n(t)$ es fuertemente continuo.
(b) $||T_n(t)|| \leq \gamma^n M e^{\mu t}, t \geq 0$.

Sea $T_0(t) := R(t)$ que claramente satisface las condiciones (a) y (b). Asumimos cierta la afirmación para n. Para $x \in D(A)$ definimos

$$T_{n+1}(t)x := \int_0^t T_n(t)B \int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr.$$

Así $t \to T_{n+1}(t)x$ es continua, y usando (b) y la hipótesis (ii) tenemos que

$$\begin{aligned}
||T_{n+1}(t)x|| &= || \int_0^t T_n(t)B \int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr|| \\
&\leq || \int_0^t T_n(t)|||| B \int_0^r b(r-s)R(s)xds||dr \\
&\leq \gamma^n M \int_0^t e^{\mu(t-r)}||B \int_0^r b(r-s)R(s)xds||dr \\
&= \gamma^n M e^{ut} \int_0^t e^{-\mu r}||B \int_0^r b(r-s)R(s)xds||dr \\
&\leq \gamma^{n+1} M e^{\mu t}||x||
\end{aligned}$$

Como $D(A)$ es denso, $T_{n+1}(t)$ puede ser extendido de forma única a un operador $\tilde{T}_{n+1}(t)$(que también denotamos por $T_{n+1}(t)$) que satisface (a) y (b).

Sea $S(t) := \sum_0^\infty T_n(t)$. Luego $S(t)$ está bien definida pues

$$||S(t)|| = || \sum_0^\infty T_n(t)|| \leq M e^{\mu t} \sum_0^\infty \gamma^n = \frac{M}{1-\gamma} e^{\mu t}.$$

Así, usando (a) y (b) tenemos que para cada $x \in D(A)$, la función $t \to S(t)x$ es continua

y

$$\begin{aligned}
S(t)x &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)x \\
&= T_0(t)x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)x \\
&= R(t)x + \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1}(t)x \\
&= R(t)x + \sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^t T_n(t-r)B \int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr) \\
&= R(t)x + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t-r)B \int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr \\
&= R(t)x + \int_0^t S(t-r)B \int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr
\end{aligned}$$

En particular $S(0)x = R(0)x = k(0)x$ para cada $x \in D(A)$. Como $D(A)$ es denso, concluimos que $S(0) = k(0)I$.
Así por la Proposición 4.2.2, queda por demostrar que
$(\lambda - \lambda\hat{a}(\lambda)(A+B) : D(A) \to X$ es invertible para $\lambda > \mu$ y

$$(I - \hat{a}(\lambda)(A+B))^{-1}x = \frac{1}{\hat{k}(\lambda)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt \; ; \; x \in D(A)$$

Para esto, sea $x \in X$, y definimos
$H(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt$ y $H(\lambda; A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} R(t)xdt = \hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$.
Entonces definimos

$H_k(\lambda)x = \frac{1}{\lambda\hat{k}(\lambda)} H(\lambda)x$ y $H_k(\lambda; A)x = \frac{1}{\lambda\hat{k}(\lambda)} H(\lambda; A)x$.
Notemos que $H_k$es un operador acotado pues $S(t)$ es exponencialmente acotada. Más áun

$$\begin{aligned}
||H_k(\lambda)|| &= \frac{1}{\lambda|\hat{k}(\lambda)|} || \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)dt|| \\
&\leq \frac{1}{\lambda|\hat{k}(\lambda)|} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} ||S(t)||dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda|\hat{k}(\lambda)|} \frac{M}{1-\gamma} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\mu)} dt \\
&= \frac{M}{(1-\gamma)(\lambda-\mu)\lambda|\hat{k}(\lambda)|}
\end{aligned}$$

Ahora observemos que para $x \in D(A)$,

$$H_k(\lambda)x - H_k(\lambda, A)x = \frac{1}{\lambda \hat{k}(\lambda)}(H(\lambda)x - H(\lambda, A)x)$$

Y así es fácil ver que $H(\lambda) - H(\lambda, A) = \hat{b}(\lambda)H(\lambda)BH(\lambda, A)$. Entonces

$$\begin{aligned} H_k(\lambda)x - H_k(\lambda, A)x &= \frac{\hat{b}(\lambda)}{\lambda \hat{k}(\lambda)} H(\lambda)BH(\lambda, A)x \\ &= \frac{H(\lambda)}{\lambda \hat{k}(\lambda)} \hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A)x \\ &= H_k(\lambda)\hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A)x \end{aligned}$$

Luego, como $D(A)$ es denso en X, tenemos que

$$H_k(\lambda) - H_k(\lambda, A) = H_k(\lambda)\hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A)$$

Equivalentemente

$$H_k(\lambda)(I - \hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A)) = H_k(\lambda, A)$$

Pero $H(\lambda, A) = \hat{R}(\lambda)$, entonces para $x \in D(A)$ obtenemos

$$\begin{aligned} ||\hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A)x|| &= ||B\hat{R}(\lambda)\hat{b}(\lambda)x|| \\ &= ||B\widehat{R * b}(r)(\lambda)x|| \\ &= ||B\int_0^\infty e^{-\lambda r}\int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr|| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\mu r}||B\int_0^r b(r-s)R(s)xdsdr|| \\ &\leq \gamma||x||, 0 \leq \gamma < 1 \end{aligned}$$

Entonces $(I - \hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A))^{-1}$ existe y es acotado.
Así, $H_k(\lambda) = H_k(\lambda, A)(I - \hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A))^{-1}$ nos da que

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda\hat{a}(\lambda)(A+B))H_k(\lambda) &= (\lambda - \lambda\hat{a}(\lambda)(A+B))H_k(\lambda, A)(I - \hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A))^{-1} \\ &= ((\lambda - \lambda\hat{a}(\lambda)A)H_k(\lambda, A) - \lambda BH_k(\lambda, A))(I - \hat{b}(\lambda)BH(\lambda, A))^{-1} \\ &= (I - \lambda\hat{a}(\lambda)BH_k(\lambda, A))(I - \frac{\hat{a}(\lambda)}{\hat{k}(\lambda)}BH(\lambda, A))^{-1} \\ &= (I - \lambda\hat{a}(\lambda)BH_k(\lambda, A))(I - \lambda\hat{a}(\lambda)B\frac{H(\lambda, A)}{\lambda\hat{k}(\lambda)} \\ &= I \end{aligned}$$

Esto prueba que $(\lambda - \lambda\hat{a}(\lambda)(A+B))$ es invertible y satisface

$$(I - \hat{a}(\lambda)(A+B))^{-1}x = \frac{1}{\hat{k}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt,\ x \in X$$

□

El siguiente resultado muestra, en términos generales, la continua dependencia de una familia resolvente (a,k)-regularizada con su generador A. Más precisamente el teorema de abajo, muestra que la convergencia en un -sentido apropiado- de una secuencia de generadores es equivalente a la convergencia de las correspondientes familias resolventes (a,k)-regularizadas.

Teorema 4.2.6. *Sea $\{k_n\}_{n\geq 0} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $\{a_n\}_{n\geq 0} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ de tipo $(M,w), w \geq 0$, tal que $\hat{a}_n(\lambda) \neq 0$ para $\lambda > w$ y $\int_0^\infty e^{-ws}|a_n'(s)|ds < \infty$. Sean A_n operadores lineales cerrados en X tal que A_0 es definido denso. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ fijo, asumamos que $R_n(t)$ es una familia resolvente (a_n, k_n) regularizada generada por A_n en X, y que existen constantes $M > 0$ y $w \in \mathbb{R}$, independientes de n tales que*

$$||R_n(t)|| \leq Me^{wt}\ \ \forall t \geq 0$$

Suponer también que $a_n(t) \to a_0(t)$ y $k_n(t) \to k_0(t)$ cuando $n \to \infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\lim_{n\to+\infty} k_n(\lambda)(I - a_n(\lambda)A_n)^{-1} = k_0(\lambda)(I - a_0(\lambda)A_0)^{-1}$ *para todo* $\lambda > w$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} R_n(t)x = R_0(t)x$ *para todo* $x \in X$ *y* $t \geq 0$, *Más aún la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de* $\mathbb{R}_+$

La demostración de este teorema, se encuentra en la referencia [8](Teorema 2.5). Hay que tener en cuenta, que el teorema anterior es la extensión del teorema de Trotter-Krato para la teoría de C_0-semigrupos en cuyo caso $a(t) \equiv k(t) \equiv 1$.

El siguiente resultado concierne a un teorema de tipo ergódico. Las contribuciones a la teoría figuran en [10] y [12]. Citamos a continuación un simple, pero típico, resultado.

Teorema 4.2.7. *Sea A el generador de una familia resolvente (a,k)-regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$||R(t)|| \leq Mk(t)\ \ \forall t \geq 0.$$

Suponemos que

(i) $a(t)$ *es positiva, y* $k(t)$ *es no decreciente y positiva también.*

(ii) $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{k(t)}{(k*a)(t)} = 0$;

(iii) $\sup_{t>0} \frac{k(t)(1*k)(t)}{(k*a)(t)} < \infty$;

(iv) $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{(a*a*k)(t)}{(a*k)(t)} = \infty$.

Definimos

$$A_t x := \frac{1}{(k*a)(t)} \int_0^t a(t-s)R(s)x ds;\ x \in X, t > 0.$$

Entonces se tiene lo siguiente:

1. La función $Px := \lim_{t\to+\infty} A_t x$ *es una proyección lineal acotada con* $Ran(P) = Ker(A)$, $Ker(P) = \overline{Ran(A)}$, *y*

$$D(P) = Ker(A) \oplus \overline{Ran(A)}.$$

2. Para $0 < \beta \leq 1$ *y* $x \in Ker(A) \oplus \overline{Ran(A)}$, *se tiene*

$$||A_t x - Px|| = O\left(\left[\frac{k(t)}{a*k(t)}\right]^{\beta}\right) \ si\ t \to \infty.$$

3. Si X *es reflexivo entonces* $Ker(A) \oplus \overline{Ran(A)} = X$.

Notemos que en el caso $k(t) = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, a(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ $\alpha > 0, \beta \geq 0$ las condiciones (i)-(iv) son inmediatamente satisfechas. En el siguiente resultado, estamos interesados en la relación entre el espectro de A y el de cada uno de los operadores $R(t), t \geq 0$. Denotamos por $s(t,\lambda)$ a la única solución de la ecuación de convolución

$$s(t,\lambda) := a(t) + \lambda \int_0^t a(t-\tau)s(\tau,\lambda)d\tau.$$

También definimos

$$r(t,\lambda) := k(t) + \lambda \int_0^t s(t-\tau)k(\tau)d\tau.$$

Desde un punto de vista puramente formal, cabría esperar la relación $\sigma(R(t)) = r(t, \sigma(A))$.Esto, sin embargo, no es cierto en general. El siguiente resultado corresponde a un teorema de inclusión, cuya demostración se puede hallar en la referencia [11].

Teorema 4.2.8. *Sea* A *un operador cerrado en* X *y sea* $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ *una familia resolvente* (a,k)*-regularizada con generador* A. *Entonces*

(i) $\sigma(R(t)) \supset r(t, \sigma(A)),\ \ t \geq 0,$

(ii) $\sigma_p(R(t)) \supset r(t, \sigma_p(A)),\ \ t \geq 0,$

(iii) *Si* A *es densamente definido entonces* $\sigma_r(R(t)) \supset r(t, \sigma_r(A)),\ \ t \geq 0,$

(iv) $\sigma_a(R(t)) \supset r(t, \sigma_a(A)),\ \ t \geq 0.$

Observación: En el caso $k(t) = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)},\ \beta \geq 0, a(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ \alpha > 0$, tenemos que

$$r_{\alpha,\beta}(t, \lambda) = t^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda t^\alpha)$$

donde $E_{\alpha,\beta+1}$ denota la función de Mitag-Leffler, definida como

$$E_{\alpha,\beta+1}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta + 1)}.$$

En particular: $\alpha = 1, \beta = 0$ nos da que $E_{1,1}(z) = e^z$ y entonces $r_{1,0}(t, \lambda) = e^{\lambda t}$. Aquí $R(t)$ es un C_0-semigrupo generado por A, y por tanto, se recupera la conocida inclusión(Teorema Espectral de Inclusión,[3])

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(R(t)),\ \ t > 0.$$

Si $\alpha = 2, \beta = 0$ tenemos que $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$ y entonces $r_{1,0}(t, \lambda) = \cosh \sqrt{(\lambda)}t$. Así recuperamos la inclusión [14]:

$$\cosh \sqrt{\sigma(A)}t \subset \sigma(R(t)),\ \ t > 0.$$

En general, para $\alpha > 0$, y suponiendo que el problema fraccional de Cauchy:

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t),\ \ t > 0$$

es bien definido. Entonces A genera una familia resolvente $(\alpha, 0)$-regularizada $\{R_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ y concluimos que

$$E_{\alpha,1}(\sigma(A)t^\alpha) \subset \sigma(R_\alpha(t)),\ \ t > 0.$$

Teorema 4.2.9. *Sea* A *el generador de una familia exponencialmente acotada* (a, k)*-regularizada. Sean* $k, a, c \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *tal que* $\int_0^\infty |a(t)|e^{-\beta t}dt < \infty$ *para algún* $\beta \in \mathbb{R}$. *Asumamos*

(i) $c(t)$ *es completamente monóntona , es decir* $\frac{1}{\lambda \widehat{c}(\lambda)}$ *y* $\frac{-\widehat{c}(\lambda)'}{\widehat{c}(\lambda)^2}$ *son completamente monótonas en* $(0, \infty)$.

(ii) $\widehat{a_1}(\lambda) = \widehat{a}(\frac{1}{\widehat{c}(\lambda)})$;

(iii) $\widehat{k_1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda \widehat{c}(\lambda)} \widehat{k}(\frac{1}{\widehat{c}(\lambda)})$.

Entonces A es el generador de una familia (a_1, k_1)*-regularizada exponencialmente acotada.*

Observación: una función C^∞ es llamada completamente monótona si $(-1)^n f^{(n)}(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda > 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$.

La demostración de este Teorema, puede ser vista en [6].
Un caso notable es cuando $a(t) = g_\beta(t)$ y $k(t) = 1$, porque tenemos una representación explícita. Notemos que para aplicar el Teorema anterior , basta con tomar $c(t) = g_{\alpha/\beta}(t)$ la cual es completamente positiva siempre que $\alpha < \beta$.

Corolario 4.2.10. *Sea* $0 < \alpha < \beta \leq 2, \gamma = \alpha/\beta$*. Si A es el generador de una familia exponencialmente acotada* $(g_\beta,1)$*-regularizada* $S_\beta(t)$*, entonces A genera una familia exponencialmente acotada* $(g_\alpha, 1)$*-regularizada* $S_\alpha(t)$*, y*

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty \phi_\gamma(s) S_\beta(st^\gamma) ds, \;\; t > 0, \tag{4.2.7}$$

donde

$$\phi_\gamma(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-\gamma n + 1 - \gamma)}, \;\; 0 < \gamma < 1,$$

es la función de Wright.

4.3. Ejemplos

En esta sección mostraremos como la solución de una ecuación de evolución puede ser asociada con una familia (a, k)-regularizada.
Denotaremos por

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \;\; t \geq 0$$

a la derivada fraccionaria de Caputo de orden α, donde n es el entero más pequeño mayor que α.

Ejemplo 4.3.1. *Consideremos el problema*

$$u'(t) - AD_t^\alpha u(t) + u(t) = f(t), \;\; u(0) = x, \;\; 0 < \alpha < 1, \tag{4.3.8}$$

donde A es un operador lineal cerrado y D_t^α denota la derivada fraccionaria de Caputo. Recordemos que si $0 < \alpha \leq 1$, entonces $\widehat{D_t^\alpha u}(\lambda) = \lambda^\alpha \hat{u}(\lambda) - \lambda^{\alpha-1}u(0)$.
Luego, tomando transformada de Laplace en (4.3.8) tenemos que:

$$-u(0) + \lambda\hat{u}(\lambda) - A\big(\lambda^\alpha \hat{u}(\lambda) - \lambda^{\alpha-1}u(0)\big) + \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$$

si y sólo si

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1}u(0) - \frac{1}{\lambda}A\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1}u(0) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1}\hat{f}(\lambda)$$

siempre que $\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} \in \rho(A)$. Por simpleza, reemplazamos la identidad

$$\frac{1}{\lambda}I = \frac{1}{\lambda^\alpha}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1} - \frac{1}{\lambda}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1} + \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1}$$

y obtenemos la forma equivalente

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}u(0) - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda^\alpha}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1}u(0) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\big)^{-1}\hat{f}(\lambda). \tag{4.3.9}$$

Luego, buscamos una familia fuertemente $R_\alpha(t) \subset \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\hat{R_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}\big(\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha}I - A\big)^{-1}.$$

Comparando esta ecuación con el Teorema 4.2.4,

$$\hat{R_\alpha}(\lambda) = \hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$$

necesitamos encontrar dos funciones Laplace transformables, $a(t)$ y $k(t)$, tal que $\hat{a}(\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\lambda+1}$ y $\hat{k}(\lambda) = \frac{1}{\lambda+1}$.
Es inmediato que $k(t) = e^{-t}$, para calcular $a(t)$, recordemos la propiedad

$$t^{\beta-1}\widehat{E_{\alpha,\beta}(-t^\alpha)}(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha + 1}.$$

Así se tiene que $\alpha = 1, \beta = 1-\alpha$, lo que implica $a(t) = t^{-\alpha}E_{1,1-\alpha}(-t)$ donde $E_{\alpha,\beta}$ denota la función de Mittag-Leffler.
Ahora, poniendo $R_\alpha(\lambda)$ en la ecuación (4.3.9), tenemos que

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}u(0) - \frac{1}{\lambda}\hat{R_\alpha}(\lambda)u(0) + \hat{R_\alpha}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

invirtiendo la transformada de Laplace, obtenemos una forma más explícita

$$u(t) = u(0) - \int_0^t R_\alpha(s)u(0)ds + \int_0^t R_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

Ejemplo 4.3.2. *Nuestro siguiente ejemplo consiste en la la ecuación de oscilación fraccionaria*

$$u''(t) - AD_t^{\alpha}u(t) + u(t) = f(t),\ \ u(0) = x,\ \ y\, 0 < \alpha < 2, \tag{4.3.10}$$

donde A es un operador lineal cerrado con dominio $D(A) \subset X$.
Tomando transformada de Laplace obtenemos

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\alpha-1}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}u(0) - \frac{1}{\lambda}A\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}u(0) + \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}u'(0) + \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}\hat{f}(\lambda)$$

cuando $\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} \in \rho(A)$. Teniendo en cuenta la identidad

$$\frac{1}{\lambda}I = \frac{1}{\lambda^{\alpha-1}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}u(0) - \frac{1}{\lambda}A\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1} + \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1} \tag{4.3.11}$$

obtenemos la forma equivalente

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}u(0) - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}u(0) + \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}u'(0) + \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}\hat{f}(\lambda) \tag{4.3.12}$$

Ahora buscamos una familia fuertemente continua $T_{\alpha}(t) \subset B(X)$ tal que

$$\hat{T_{\alpha}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\big(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^{\alpha}} - A\big)^{-1}. \tag{4.3.13}$$

Comparando la ecuación (4.3.13) con el Teorema 4.2.4, necesitamos encontrar dos funciones Laplace transformables, $a(t)$ y $k(t)$, tal que $\hat{a}(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\lambda^2+1}$ y $\hat{k}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2+1}$. Esto sucede cuando elegimos $k(t) = \sin(t)$ y $a(t) = t^{1-\alpha}E_{2,2-\alpha}(-t^2)$(donde $E_{\alpha,\beta}$ denota la función de Mittag-Leffler).
Poniendo ahora $\hat{T_{\alpha}}(\lambda)$ en la ecuación 4.3.12 tenemos que

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}u(0) - \frac{1}{\lambda}\hat{T_{\alpha}}(\lambda)u(0) + \hat{T_{\alpha}}(\lambda)u'(0) + \hat{T_{\alpha}}(\lambda)\hat{f}(\lambda) \tag{4.3.14}$$

A partir de la inversión de la transformada de Laplace, obtenemos la siguiente representación por variación de parámetros de la ecuación (4.3.10)

$$u(t) = u(0) - \int_0^t T_{\alpha}(s)u(0)ds + T_{\alpha}(t)u'(0) + \int_0^t T_{\alpha}(t-s)f(s)ds \tag{4.3.15}$$

Capítulo 5

Estabilidad de familias (a, k)-regularizadas en un espacio de Hilbert

En este capítulo, estudiaremos la estabilidad de familias (a, k)-regularizadas. Hay que tener en cuenta que la teoría de estabilidad es importante, ya que las familias estables (a, k)-regularizadas se corresponden uno a uno con los problemas abstractos de ecuaciones lineales bien planteados. También es importante ya que la estabilidad juega un papel central en la teoría estructural de los operadores.
Daremos condiciones suficientes para la estabilidad uniforme de una familia (a, k)-regularizada en espacios de Hilbert. Nuestro resultado principal puede ser visto como una generalización sustancial de la caracterización de Gearhart-Greiner-Prüss de la estabilidad exponencial para semigrupos fuertemente continuos,mirar por ejemplo([3], Teorema V.1.11).
Además se presentan algunos resultados técnicos sobre la transformada de Laplace, y en la última sección aplicaciones del teorema principal de este capítulo a diferentes ecuaciones, y las condiciones que éstas deben tener, para que las soluciones sean estables o uniformemente estables.

5.1. Estimaciones de la transformada de Laplace

Diremos que $k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ es de crecimiento sub exponencial si para cada $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que $|k(t)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon t}$ para casi todos los $t \geq 0$. En este caso la transformada de

Laplace, $\hat{k}(\lambda)$, dada por

$$\hat{k}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} k(t) dt,$$

existe para $\Re(\lambda) > 0$.

Definición 5.1.1. *Sea $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ de crecimiento sub exponencial tal que existe $\lim_{\lambda \to i\rho} \hat{k}(\lambda) = \hat{k}(i\rho)$ para todo $|\rho| \geq 1$. Diremos que k satisface la condición (**H**) si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\frac{1}{|\rho \hat{k}(i\rho)|} \leq M$$

para todo $|\rho| \geq 1$.

En lo que sigue, denotaremos:

$g_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ para $\alpha > 0$ y $e_{-b}(t) := e^{-bt}$ para $b \geq 0$.

Ejemplo 5.1.2. *Las funciones $e_{-b}cos$, para $b > 0$; g_α, para $0 < \alpha \leq 1$; $\chi_{(1,\infty)} g_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$ y e_{-b} para $b \geq 0$ satisfacen la condición (**H**).*

Recordemos que $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ de crecimiento sub exponencial es llamada n-regular($n \in \mathbb{N}$) si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left| \lambda^k \frac{d^k}{d\lambda^k} \hat{b}(\lambda) \right| \leq c |\hat{b}(\lambda)|$$

para $\Re\lambda > 0$ y $0 \leq k \leq n$.

Ejemplo 5.1.3. *Algunos ejemplos de funciones 1-regulares.*

- *Sea $a = e_{-b} g_\alpha$ donde $\Re b \geq 0, \alpha > 0$. Notemos que*

$$\sup_{\Re\lambda > 0} \left| \frac{\lambda \hat{a}'(\lambda)}{\hat{a}(\lambda)} \right| = \sup_{\Re\lambda > 0} \frac{\alpha |\lambda|}{|\lambda + b|} < \infty.$$

  Entonces a es una función 1-regular.

- *Sea $0 < \alpha < 1$ y $a = g_{1-\alpha} - (g_1 - \alpha * e_{-1})$. Tenemos que $\hat{a}(\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\lambda+1}$, entonces*

$$\left| \frac{\lambda \hat{a}'(\lambda)}{\hat{a}(\lambda)} \right| = \left| \frac{\alpha + (\alpha - 1)\lambda}{\lambda + 1} \right|$$

  la cual es acotada para $\Re\lambda > 0$.

Observación 5.1.4 ([16], Lemma 8.1, Chapter 13). *Notemos que si b es 1-regular, entonces*

(i) $\hat{b}(i\rho) = \lim_{\lambda \to i\rho} \hat{b}(\lambda)$ *existe para cada* $\rho \neq 0$.

(ii) $\hat{b}(\lambda) \neq 0$ *para todo* $\Re\lambda \geq 0, \lambda \neq 0$.

(iii) $\left|\rho\hat{b}'(i\rho)\right| \leq c\left|\hat{b}'(i\rho)\right|$ *para casi todo* $\rho \in \mathbb{R}$.

Lema 5.1.5. *Sea $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $k \in C(\mathbb{R}_+)$ de crecimiento subexponencial y 1-regular. Asumamos que k satisface la condición (**H**) y sea $w > 0$ fijo. Entonces*

(i)

$$\sup_{|\rho|\geq 1}\left|\frac{1}{\hat{k}(i\rho)}\left(\frac{\hat{a}(i\rho)}{\hat{a}(w+i\rho)} - 1\right)\right| < \infty.$$

(ii) Si $\hat{k}(w + i(\cdot)) \in L^2(\mathbb{R}\backslash[-1,1])$ *entonces* $\left(1 - \frac{\hat{k}(w+i(\cdot))}{\hat{k}(i(\cdot))} \in L^2(\mathbb{R}\backslash[-1,1]\right)$.

(iii) Si $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\hat{k}(\lambda)$ *existe, entonces* $\hat{k}(w + i(\cdot)) \in L^2(\mathbb{R}\backslash[-1,1])$.

Demostración. Notemos que la 1-regularidad de a implica que $i\rho\left(\frac{\hat{a}(i\rho)}{\hat{a}(w+i\rho)} - 1\right)$ es acotado para $|\rho| \geq 1$. Así, de la identidad

$$\frac{1}{\hat{k}(i\rho)}\left(\frac{\hat{a}(i\rho)}{\hat{a}(w+i\rho)} - 1\right) = \frac{i\rho}{i\rho\hat{k}(i\rho)}\left(\frac{\hat{a}(i\rho)}{\hat{a}(w+i\rho)} - 1\right)$$

y de la condición (**H**), la conclusión de (i) es directa. Para mostrar (ii), notemos que

$$\left(1 - \frac{\hat{k}(w+i\rho)}{\hat{k}(i\rho)}\right) = i\rho\left(\frac{\hat{k}(i\rho)}{\hat{k}(w+i\rho)} - 1\right)\frac{1}{i\rho\hat{k}(i\rho)}\hat{k}(w+i\rho)$$

donde $i\rho\left(\frac{\hat{k}(i\rho)}{\hat{k}(w+i\rho)} - 1\right)$ y $\frac{1}{i\rho\hat{k}(i\rho)}$ son acotadas en $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$ por la 1-regularidad de k y la condición (**H**) respectiivamente.

Para mostrar (iii) notemos que por hipótesis existe $M > 0$ tal que

$$|\hat{k}(w+i\rho)| = \frac{1}{|w+i\rho|}|(w+i\rho)\hat{k}(w+i\rho)| \leq \frac{M}{|w+i\rho|},$$

lo cual prueba la afirmación. □

Observación 5.1.6. *Recordemos el caso en que* $\lim_{t\to 0} k(t)$ *existe, entonces*

$$\lim_{t\to 0} k(t) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\hat{k}(\lambda),$$

y así podemos reemplazar la condición $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\hat{k}(\lambda)$ *por* $\lim_{t\to 0} k(t)$ *en (iii) del Lema 5.1.5.*

5.2. Estabilidad

Recordemos que una familia $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{B}(X)$ satisfaciendo

$$\lim_{t\to\infty} ||S(t)|| = 0,$$

es llamada uniformemente estable. El siguiente teorema entrega condiciones suficientes sobre estabilidad uniforme de una familia (a,k)-regularizada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. El caso de C_0-semigrupos es conocido como el Teorema de Gearhart-Greiner-Prüss. En esta sección se modifica la prueba dada en [13] al considerar un caso mucho más general de familias (a,k)-regularizadas. Escribimos

$$H(\lambda) := \hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1},$$

siempre que éste sea bien definido. En vista de [[7], Proposición 3.1 (4.2.2)], si A genera una familia (a,k)-regularizada $S(t)_{t\geq 0}$, exponencialmente acotada del tipo (M,w)(i.e $||S(t)|| \leq Me^{wt}$ para todo $t \geq 0$ con $M > 0$ y $w \in \mathbb{R}$) entonces $\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ para $\Re\lambda > w$ y

$$\hat{S}(\lambda) = H(\lambda), \ \ \forall\, \Re\lambda > w.$$

Teorema 5.2.1. *Supongamos $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $k \in C(\mathbb{R}_+)$son 1-regulares y k satisface la condición (**H**). Asumamos que A genera una familia (a,k)-regularizada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ con cota de crecimiento finito en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, y las siguientes condiciones:*
(H1) $\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ para todo $\Re(\lambda) \geq 0, \lambda \neq 0$.
(H2) Para todo $x \in \mathscr{H}$, $\lim_{\lambda\to 0} H(\lambda)x = Bx$ define un operador acotado.
(H3) $\sup_{\lambda\in\mathbb{C}_+} ||H(\lambda)|| < \infty$ donde $\mathbb{C}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda > 0\}$.
Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable.

Demostración. Por hipótesis existen constantes $M > 0$ y $w_0 \in \mathbb{R}$ tal que $||S(t)|| \leq Me^{tw_0}$ para todo $t \geq 0$. Podemos suponer que $w_0 \geq 0$. Sea $w > w_0 + 1$ y definimos $R(t) := e^{-tw}S(t)$, y así $||R(t)|| \leq Me^{-(w-w_0)t}$ para $t \geq 0$. Sea $x \in \mathscr{H}$ fijo, y observemos que $\chi_{[0,\infty)}(\cdot)R(\cdot)x$ está en $L^2(\mathbb{R},\mathscr{H})$ donde $\chi_{[0,\infty)}$ denota la función característica. De hecho,

$$\begin{aligned} ||\chi_{[0,\infty)}(\cdot)R(\cdot)x||_2^2 &\leq \int_0^\infty ||R(t)x||^2 dt \\ &\leq M^2 \int_0^\infty \left(e^{(w-w_0)t}||x||^2\right)^2 dt \\ &\leq \frac{M^2||x||^2}{2(w-w_0)}; \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$||\chi_{[0,\infty)}(\cdot)R(\cdot)x||_2 \leq \frac{M||x||}{2\sqrt{(w-w_0)}}.$$

Dado que $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert, el Teorema de Plancherel 2.0.6 nos muestra que la transformada de Fourier $\mathscr{F}$ satisface $||\mathscr{F}f||_2 = \sqrt{2\pi}||f||_2$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$. Por otra parte, como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ s una familia exponencialmente acotada, su transformada de Laplace $\hat{S}(\lambda)$ es bien definida, analítica y satisface $H(\lambda) = \hat{S}(\lambda)$ para todo $\Re\lambda > 0$. Por lo tanto tenemos que para todo $x \in \mathscr{H}$ y $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(w+is)x &= \hat{S}(w+is)x \\ &= \int_0^\infty e^{-(w+is)t}S(t)xdt \\ &= \int_0^\infty e^{-wt}e^{-ist}S(t)xdt \\ &= \int_0^\infty e^{-ist}R(t)xdt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \chi_{[0,\infty)}(t)R(t)xdt \\ &= \mathscr{F}(\chi_{[0,\infty)}(\cdot)R(\cdot)x)(s) \end{aligned}$$

Del Teorema de Plancherel 2.0.6 se sigue que $H(w+i(\cdot))x \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ y

$$||H(w+i(\cdot))x||_2 = \sqrt{2\pi}||\chi_{[0,\infty)}(\cdot)R(\cdot)x||_2 \leq M\sqrt{\frac{\pi}{w-w_0}}||x||. \tag{5.2.1}$$

Observemos que por **(H2)** $\lim_{\lambda\to 0} H(\lambda)x = Bx$ existe para todo $x \in \mathscr{H}$ y $B \in B(\mathscr{H})$. Además de la 1-regularidad de a, k, de la observación (5.1.4) y **(H1)** obtenemos que $H(i\rho)x := \lim_{\lambda\to i\rho} H(\lambda)x$ está bien definida para todo $x \in \mathscr{H}$ y, por **(H3)** y el teorema de Banach-Steinhaus 2.0.1, $H(i\rho)$ es acotada para cada $\rho \in \mathbb{R}$. Del principio de acotación uniforme se sigue que H es uniformemente acotada en el eje imaginario $i\mathbb{R}$.
Por otra parte, de la identidad

$$\hat{k}^{-1}(\lambda)H(\lambda) - \hat{k}^{-1}(\lambda)\hat{a}(\lambda)AH(\lambda) = I$$

válida para todo $\Re\lambda \geq 0, \lambda \neq 0$, obtenemos

$$H(i\rho)x = H(w+i\rho)x - \left(1 - \frac{\hat{k}(w+i\rho)}{\hat{k}(i\rho)}\right)H(i\rho)x \tag{5.2.2}$$

$$+ \frac{1}{\hat{k}(i\rho)}\left(\frac{\hat{a}(i\rho)}{\hat{a}(w+i\rho)} - 1\right)H(i\rho)[H(w+i\rho) - \hat{k}(w+i\rho)]x. \tag{5.2.3}$$

Elegimos una función $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, definida por $\phi(\rho) = 1$ para $|\rho| < 1$ y $\phi(\rho) = 0$ para $|\rho| \geq 2$. Definimos $\psi(\rho) = 1 - \phi(\rho), \rho \in \mathbb{R}$. Entonces, ahora usamos la acotación uniforme de $H(i\cdot)$ en $\mathbb{R}$ y (5.2.1) en (5.2.2) junto con el Lema 5.1.5 implican que $\psi(\cdot)H(i\cdot)x \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ y

$$\begin{aligned} ||\psi(\cdot)H(i\cdot)x||_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} ||\psi(\rho)H(i\rho)x||^2 d\rho \\ &= \int_{|\rho|\geq 2} ||H(i\rho)x||^2 d\rho + \int_{1<|\rho|<2} ||H(i\rho)x||^2 d\rho \\ &= M_0 x^2. \end{aligned}$$

Análogamente podemos probar que $\psi(\cdot)H(i(\cdot))^* \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ y siguiendo el mismo argumento de arriba concluimos que $\psi(\cdot)H(i(\cdot))^* x \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$. Por el Teorema de Parseval, existe una función $u \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ tal que

$$\mathscr{F}(u(\cdot)x)(\rho) = \psi(\rho)H(i\rho)x \text{ para casi todos los } \rho \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(u(\cdot)x)'(\rho) &= \psi'(\rho)H(i\rho)x + i\psi(\rho)H'(i\rho)x \\ &= \psi'(\rho)H(i\rho)x + i\psi(\rho)\left(\frac{-\hat{k}'(i\rho)}{\hat{k}(i\rho)}H(i\rho)x + H(i\rho)\frac{\hat{a}'(i\rho)}{\hat{k}(i\rho)\hat{a}(i\rho)}[H(i\rho)x - \hat{k}(i\rho)x]\right) \end{aligned}$$

así, por la condición **(H)**(5.1.1) y la 1-regularidad de a, k existe M_0 tal que

$$\left|\frac{\hat{a}'(i\rho)}{\hat{k}(i\rho)\hat{a}(i\rho)}\right| = \left|\frac{1}{i\rho\hat{k}(i\rho)}\right|\left|\frac{i\rho\hat{a}'(i\rho)}{\hat{a}(i\rho)}\right| \leq M_0$$

para todo $\rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1$. Más aún por la 1-regularidad de k, tenemos que $\frac{\hat{k}'(i(\cdot))}{\hat{k}(i(\cdot))}$ es acotada en $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$. Esto y el hecho que $\psi(\cdot)H(i(\cdot))x, \psi(\cdot)H(i(\cdot))^* x^*$ están en $L^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ para cada $x, x^* \in \mathscr{H}$ obtenemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle \mathscr{F}(u(\cdot)x')(\rho), x^*\rangle| d\rho = \int_{\mathbb{R}\backslash[-1,1]} |\langle \mathscr{F}(u(\cdot)x')(\rho), x^*\rangle| d\rho \leq M_0 ||x|| ||x^*||. \tag{5.2.4}$$

Por otra parte, nuevamente por la acotación uniforme de $H(i\cdot)$ en $\mathbb{R}$ tenemos que para cada $t > 0$

$$S_0(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\rho)H(i\rho)e^{i\rho t} d\rho = \int_{-2}^{2} \phi(\rho)H(i\rho)e^{i\rho t} d\rho.$$

Así, por el Lema de Riemann-Lebesgue 2.0.5 se sigue que $S_0(t) \to 0$ en $B(\mathscr{H})$ cuando $t \to \infty$.

Finalmente, para $x, x^* \in \mathscr{H}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle S(t)x, x^*\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle H(i\rho)x, x^*\rangle e^{i\rho t}d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle \phi(\rho)H(i\rho)x, x^*\rangle e^{i\rho t}d\rho + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle \psi(\rho)H(i\rho)x, x^*\rangle e^{i\rho t}d\rho.\end{aligned}$$

Integrando por partes en la segunda integral, tenemos

$$\begin{aligned}\langle S(t)x, x^*\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle \phi(\rho)H(i\rho)x, x^*\rangle e^{i\rho t}d\rho + \frac{1}{2\pi it}\int_{-\infty}^{\infty}\langle \psi(\rho)H(i\rho)x, x^*\rangle e^{i\rho t}d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle S_0(t)x, x^*\rangle + \frac{1}{2\pi it}\int_{-\infty}^{\infty}\langle (\mathscr{F}(u(\cdot)))'(\rho)x, x^*\rangle e^{i\rho t}d\rho.\end{aligned}$$

Por lo tanto $||S(t)|| \leq \frac{1}{2}||S_0(t)|| + \frac{1}{2\pi t}M_0$, con lo cual se obtiene el resultado deseado. □

Observación 5.2.2. *Consideremos la siguiente ecuación de Volterra de tipo escalar:*

$$u(t) = \int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t), \tag{5.2.5}$$

donde A es un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ denso en $X, a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ es un kernel escalar y $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+, X)$. Es bien sabido que la ecuación (5.2.5) está bien planteada si y sólo si admite una familia resolvente. En términos de la teoría de familias (a,k)-regularizadas, esta corresponde a una familia $(a,1)$-regularizada generada por A.

Recuperamos el siguiente resultado relativo a la estabilidad de familias resolventes.

Corolario 5.2.3. *Supongamos $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ es 1-regular; Sea A el generador de una familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ con cota de crecimiento finito en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, y las siguientes condiciones:*

1. *$\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ para todo $\Re\lambda \geq 0, \lambda \neq 0$.*
2. *$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\hat{a}(\lambda) =: a(\infty) \neq 0$ y $0 \in \rho(A)$.*
3. *$(\lambda - \lambda\hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ es uniformemente acotada en $\mathbb{C}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda > 0\}$.*

Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable.

Demostración. Observemos que el kernel escalar $k = \chi_{[0,\infty)}$ es 1-regular y satisface la condición **(H)**(5.1.1). Se sigue desde (1) y (3) que **(H1)** y **(H3)** del Teorema 5.2.1 son satisfechas, luego sólo falta verificar **(H2)**. Para ello notemos que por (2)

$$\lim_{\lambda\to 0} H(\lambda)x = \frac{1}{\lambda\hat{a}(\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\lambda\hat{a}(\lambda)} - A\right)^{-1} = \frac{1}{a(\infty)}A^{-1}x,$$

y la conclusión se sigue. □

Recordemos que una familia fuertemente continua $S \equiv \{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathscr{B}(X)$ es llamada uniformemente integrable si $t \to ||S(t)||$ es una función medible y

$$||S||_{L^1} := \int_0^\infty ||S(t)||dt < \infty.$$

Corolario 5.2.4. *Supongamos $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $k \in C(\mathbb{R}_+)$ son 1-regulares y k satisface la condición **(H)**. Asumamos que A genera una familia (a,k)-regularizada $S \equiv \{S(t)\}_{t\geq 0}$ con cota de crecimiento finito en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable.*

Demostración. El hecho de que S es uniformemente integrable implica que $H(\lambda)$ está bien definida para todo $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Por otra parte, de la definición de una familia (a,k)-regularizada generada por A podemos ver que

$$\frac{1}{\hat{k}(\lambda)} H(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)x = x \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}_+, x \in D(A),$$

entonces obtenemos que $(I - \hat{a}(\lambda)A)$ es un operador inyectivo. Ahora usando que $H(\lambda)$ conmuta con $(I - \hat{a}(\lambda)A)$ para todo $x \in D(A)$ y $H(\lambda)D(A) \subset D(A)$, concluimos que el operador $(I - \hat{a}(\lambda)A)$ es sobreyectivo. Más aún $(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ es acotada, es decir, $\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ para todo $\Re\lambda \geq 0, \lambda \neq 0$. Entonces se tiene **(H1)**.
Se deduce de lo anterior que $\hat{S}(\lambda) = H(\lambda)$ para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \backslash \{0\}$ y así, aplicando el teorema de convergencia dominada , obtenemos

$$\lim_{\lambda \to 0} H(\lambda)x = \int_0^\infty S(t)xdt =: Bx.$$

Por lo tanto **(H2)** es satisfecha. Finalmente, sea $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ entonces tenemos que

$$||H(\lambda)x|| \leq \int_0^\infty ||S(t)x||dt \leq ||S||_{L^1}||x||$$

y se concluye que **(H3)** es satisfecha. Entonces por Teorema 5.2.1 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable. □

Como la función $\chi_{[0,\infty)}$ es 1-regular y satisface la condición **(H)**, recuperamos el resultado de estabilidad uniforme en un espacio de Hilbert en C_0-semigrupos debido a Gearhart, Greiner y Prüss[[3], Chapter 5, Theorem 1.11], tomando $k = a = \chi_{[0,\infty)}$ en el Teorema 5.2.1.

Corolario 5.2.5. *Sea A el generador de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ con cota de crecimiento finito en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda \geq 0\} \subset \rho(A)$ *y* $\sup_{\Re\lambda > 0} ||R(\lambda; A)|| < \infty$
2. *El semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable.*

5.3. Ejemplos y comentarios

Ejemplo 5.3.1. *Supongamos que A es el generador de una familia $(e_{-b}g_\alpha, e_{-b})$-regularizada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ para algún $\alpha > 1$ y $b > 0$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. $(b+\lambda)^\alpha \in \rho(A)$ *para todo* $\Re\lambda \geq 0$.

2. $\sup_{\Re\lambda>0} ||(\lambda+b)^{\alpha-1}((\lambda+b)^\alpha - A)^{-1}|| < \infty$;

Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable.

Demostración. Se sigue del ejemplo (5.1.3) que $a = e_{-b}g_\alpha$ y e_{-b} son funciones 1-regular. Por otra parte

$$\frac{1}{|\rho\hat{e}_{-b}(i\rho)|} = \frac{|b+i\rho|}{|\rho|} \leq M$$

para algún $M > 0$ y para todo $|\rho| \geq 1$, si la condición **(H)** se tiene. Por (1)

$$\lim_{\lambda\to 0} H(\lambda)x = b^{\alpha-1}(b^\alpha - A)^{-1}x$$

para todo $x \in \mathscr{H}$, y por lo tanto este límite defne un operador acotado. Entonces se tiene **(H2)**. También se deduce de (1) y (2) que **(H1)** y **(H3)** del Teorema 5.2.1 se satisfacen. Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable. □

Sea A el generador de una familia coseno fuertemente continua $\{C(t)\}_{t\geq 0}$. Es bien sabido que $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ no puede ser estable(por la identidad $I = 2C(t)^2 - C(2t)$ para $t \geq 0$). Sin embargo, nuestro ejemplo anterior en el caso $\alpha = 2$ muestra que podemos dar una contrapartida al Corolario 5.2.4 para familias de operadores coseno fuertemente continuas de la siguiente manera.

Corolario 5.3.2. *Sea $b > 0$. Supongamos que A es el generador de una familia coseno fuertemente continua de operadores $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. $(b+\lambda)^2 \in \rho(A)$ *para todo* $\Re\lambda \geq 0$.

2. $\sup_{\Re\lambda>0} ||(\lambda+b)((\lambda+b)^2 - A)^{-1}|| < \infty$

Entonces $\{e^{-bt}C(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable.

Hay que tener en cuenta que el Ejemplo 5.3.1 incluye la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial fraccional

$$D^\alpha u(t) = Au(t) :$$

con condición inicial $u(0) = u_0$ o, equivalentemente, la solución de la ecuación integral de tipo convolución:

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Au(s)ds, \quad t \geq 0.$$

En efecto, tomando $v(t) = e^{-bt}u(t)$ donde $b > 0$ es dado, entonces la ecuación integral anterior es equivalente a

$$v(t) = e^{-bt}v(0) + \int_0^t e^{-b(t-s)} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Av(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{5.3.6}$$

Por lo tanto, concluimos que si el problema (5.3.6) está bien definido entonces, bajo las condiciones (1) y (2), tenemos que $v(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.
En particular, si consideramos el operador $Ax = \mu x$ para todo $x \in \mathscr{H}$ donde:

$$0 < \mu < b^\alpha,$$

entonces A genera una familia $(e_{-b}g_\alpha, e_{-b})$-regularizada uniformemente estable $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dada por

$$S(t) := e^{-bt}E_\alpha(\mu t^\alpha), \quad t \geq 0, \tag{5.3.7}$$

donde E_α denota la función de Mittag-Leffler. En efecto, se tiene que

$$\hat{S}(\lambda) = [e^{-bt}\widehat{E_\alpha(\mu t^\alpha)}](\lambda) = \frac{(b+\lambda)^{\alpha-1}}{(b+\lambda)^\alpha - \mu} = \hat{k}(\lambda)(1 - \hat{a}(\lambda)\mu)^{-1}, \ \ \Re\lambda > 0,$$

donde $a = e_{-b}g_\alpha$ y $k = e_{-b}$ lo cual muestra que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia $(e_{-b}g_\alpha, e_{-b})$-regularizada. Ahora mostremos que se tienen las condiciones **(H1)** y **(H2)** del Teorema 5.2.1. De hecho, notemos que $(b+\lambda)^\alpha \in \rho(A)$, para todo $\Re\lambda \geq 0$ si y sólo si $(b+\lambda)^\alpha \neq \mu$, para todo $\Re\lambda \geq 0$. Si $(b+\lambda)^\alpha = \mu$ para algún $\Re\lambda \geq 0$ entonces $\Re\lambda = \mu^{1/\lambda}\cos(2k\pi) - b$ para $k \in \mathbb{Z}$, y así $(b+\lambda)^\alpha \in \rho(A)$ para todo $\Re\lambda \geq 0$. Así la condición **(H1)** se tiene.
Por otra parte,

$$\hat{k}(\lambda)(1 - \hat{a}(\lambda\mu)^{-1} = \frac{(b+\lambda)^{\alpha-1}}{(b+\lambda)^\alpha - \mu} \to 0$$

cuando $\lambda \to \infty$. En consecuencia, usando el hecho $\hat{k}(\lambda)(1 - \hat{a}(\lambda\mu)^{-1}$ es continua en $\overline{\mathbb{C}}_+$, concluimos que $H(\lambda)$ es uniformemente acotada en $\mathbb{C}_+$, luego se tiene **(H2)**. Luego se cumple lo afirmado.

Es ilustrativo para comprobar el resultado en los siguientes casos particulares:

$\alpha = 1 : 0 < \mu < b$ implica

$$e^{-bt}E_1(\mu t) = e^{-(b-\mu)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

$\alpha = \dfrac{1}{2} : 0 < \mu < b^{1/2}$ implica

$$e^{-bt}E_{1/2}(\mu t^{1/2}) = e^{-(b-\mu^2)t}[1 - erf(\mu t^{1/2})] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

$\alpha = 2 : 0 < \mu < b^2$ implica

$$e^{-bt}E_2(\mu t^2) = e^{-bt}\cos h(\sqrt{\mu}t) = \frac{1}{2}[e^{-(b-\sqrt{\mu})t} + e^{-(b+\sqrt{\mu})t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

$\alpha = 3 : 0 < \mu < b^3$ implica

$$\begin{aligned} e^{-bt}E_3(\mu t^3) &= e^{-bt} \cdot \frac{1}{3}\left[e^{(\mu t^3)^{1/3}} + 2e^{-(\frac{(\mu t^3)^{1/3}}{2}+b)t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\mu t^3)^{1/3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[e^{(\mu^{1/3}-b)t} + 2e^{-(\frac{\mu^{1/3}}{2}+b)t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu^{1/3}t\right)\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

$\alpha = 4 : 0 < \mu < b^4$ implica

$$\begin{aligned} e^{-bt}E_4(\mu t^4) &= \frac{1}{2}e^{-bt}[\cos(\sqrt[4]{\mu}t) + \cos h(\sqrt[4]{\mu}t)] \\ &= \frac{1}{4}e^{-bt}[2\cos(\sqrt[4]{\mu}t) + e^{-(b-\sqrt[4]{\mu})t} + e^{-(b+\sqrt[4]{\mu})t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Se expondrán las superficies de estos casos anteriormente explicitados y de otros intermedios, teniendo en cuenta las restricciones que tienen los parámetros, es decir, $0 < \mu < b^\alpha$.

Sin embargo, antes de ver los ejemplos, notemos que si $S(t) = e^{-bt}E_\alpha(\mu t^\alpha)$ es uniformemente estable, es decir, $||S(t)|| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, para t suficientemente grande gracias a las identidades (2.0.6), (2.0.7) según sea el valor de α, haciendo a $z = \mu t^\alpha$ y $\beta = 1$ se tiene que $e^{-bt}E_\alpha(\mu t^\alpha) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ sólo si $e^{\mu t^{\alpha\,1/\alpha}}e^{-bt} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, de donde se deduce que $0 < \mu < b^\alpha$. Por lo tanto se tiene la recíproca a (5.3.1).

Por último, en el Apéndice A se encuentra el algoritmo utilizado para generar las superficies de $S(t)$ para estos casos, y de cualquier otro que cumpla con la restricción de los parámetros, $0 < \mu < b^\alpha$.

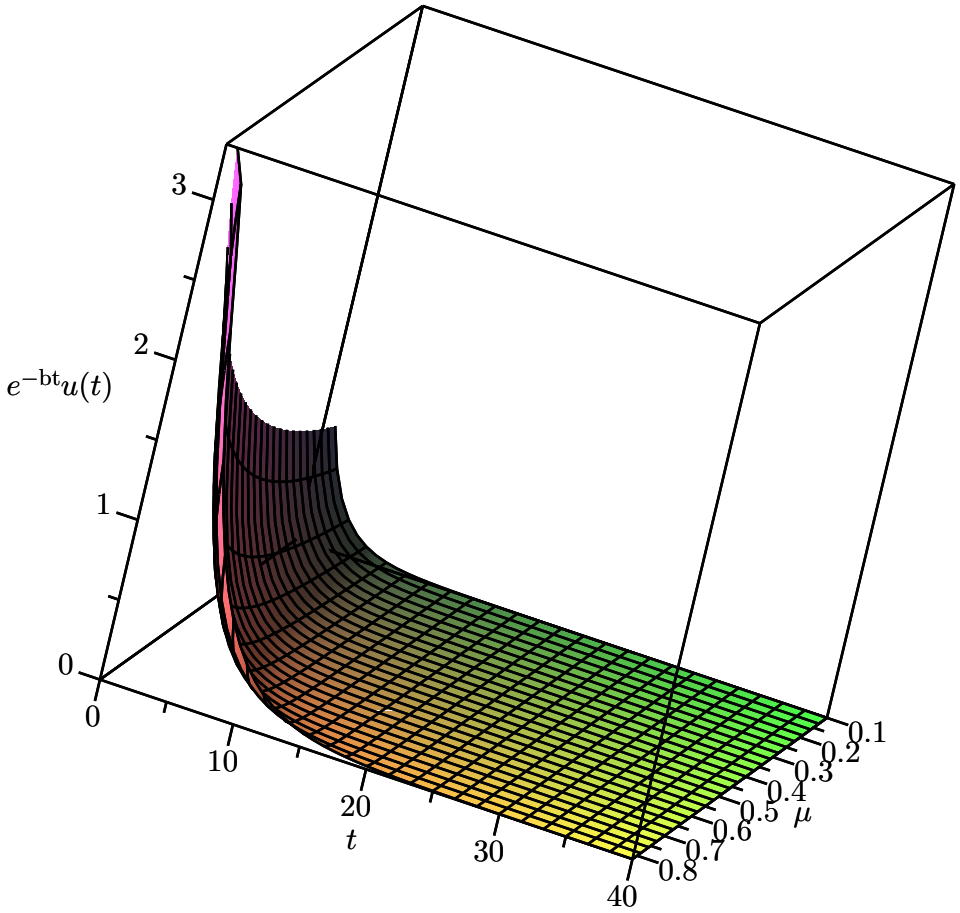


Figura 5.1: $\alpha = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[8]{2}})$.

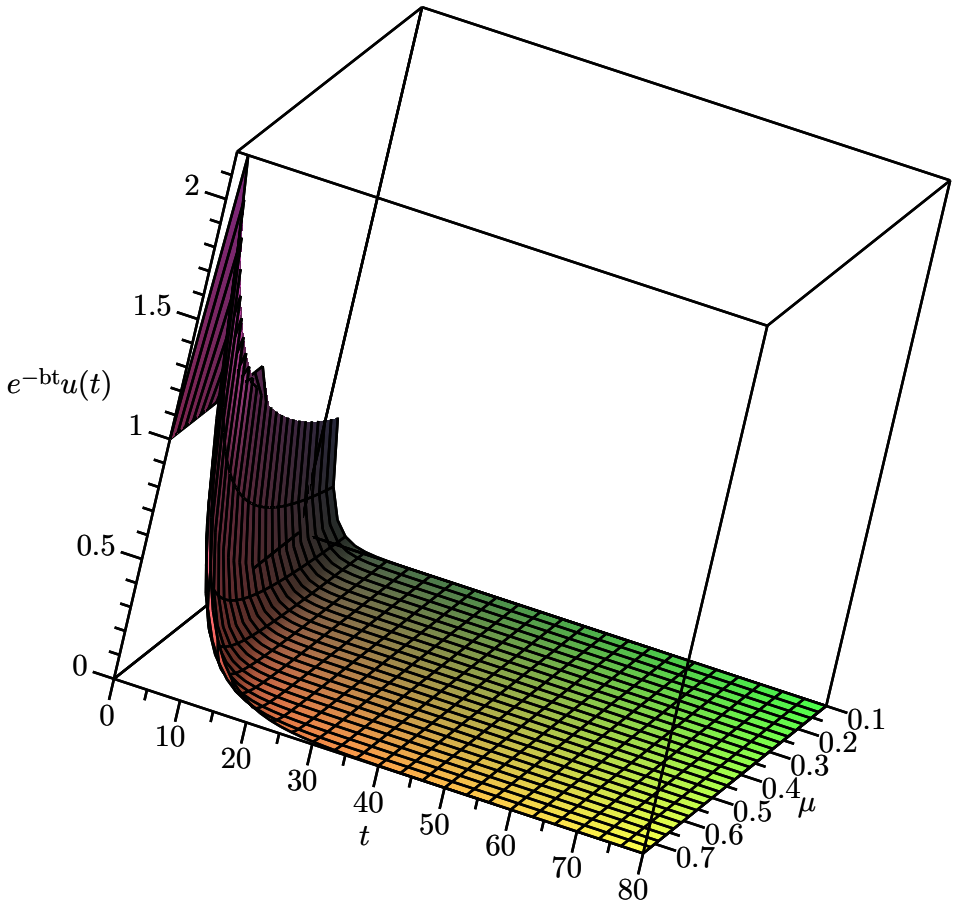


Figura 5.2: $\alpha = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$.

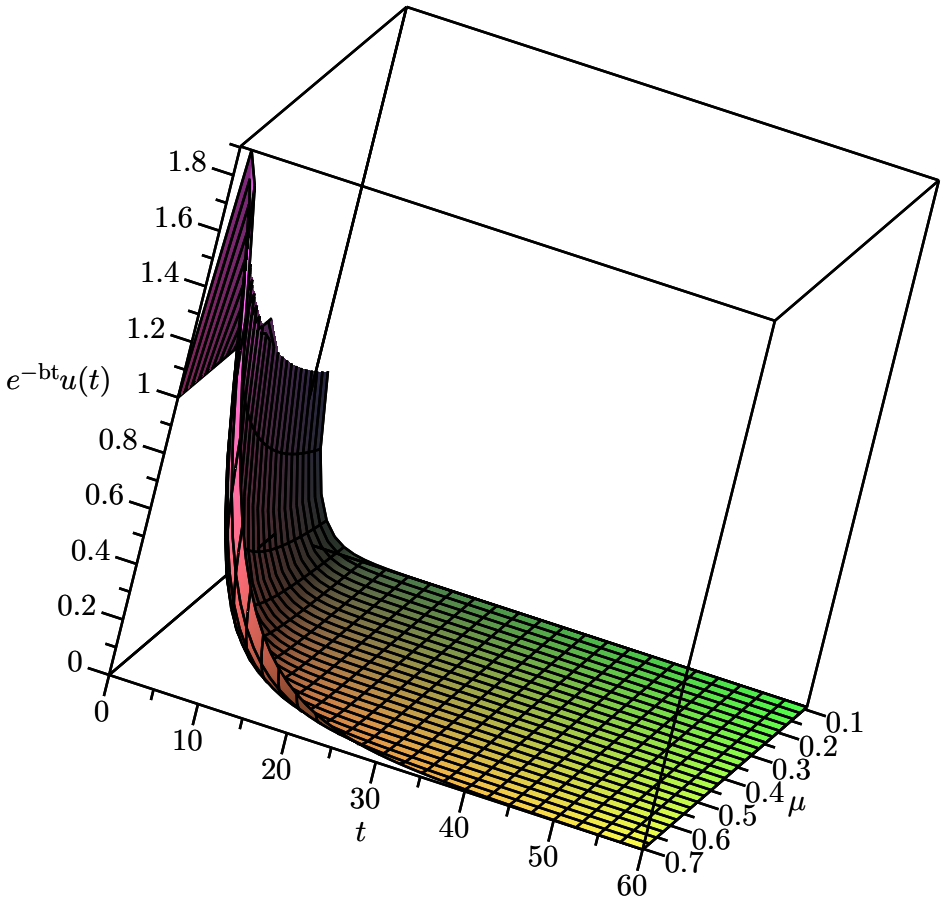


Figura 5.3: $\alpha = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

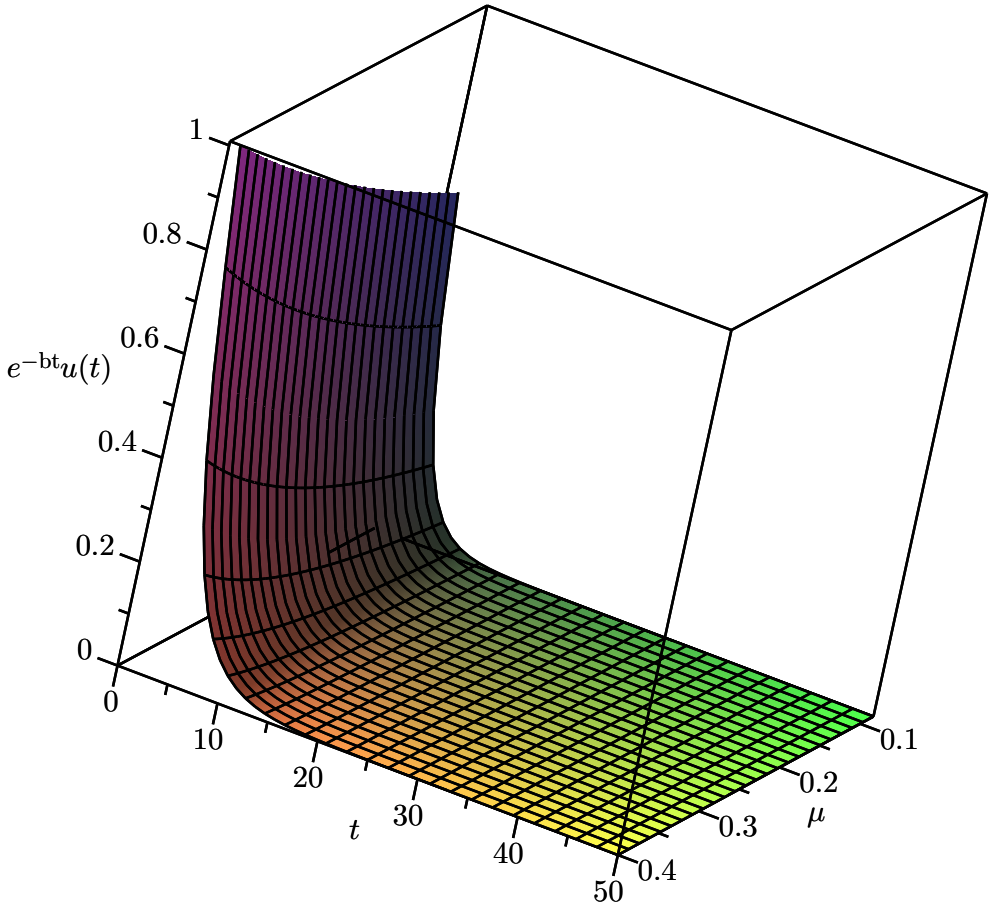


Figura 5.4: $\alpha = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

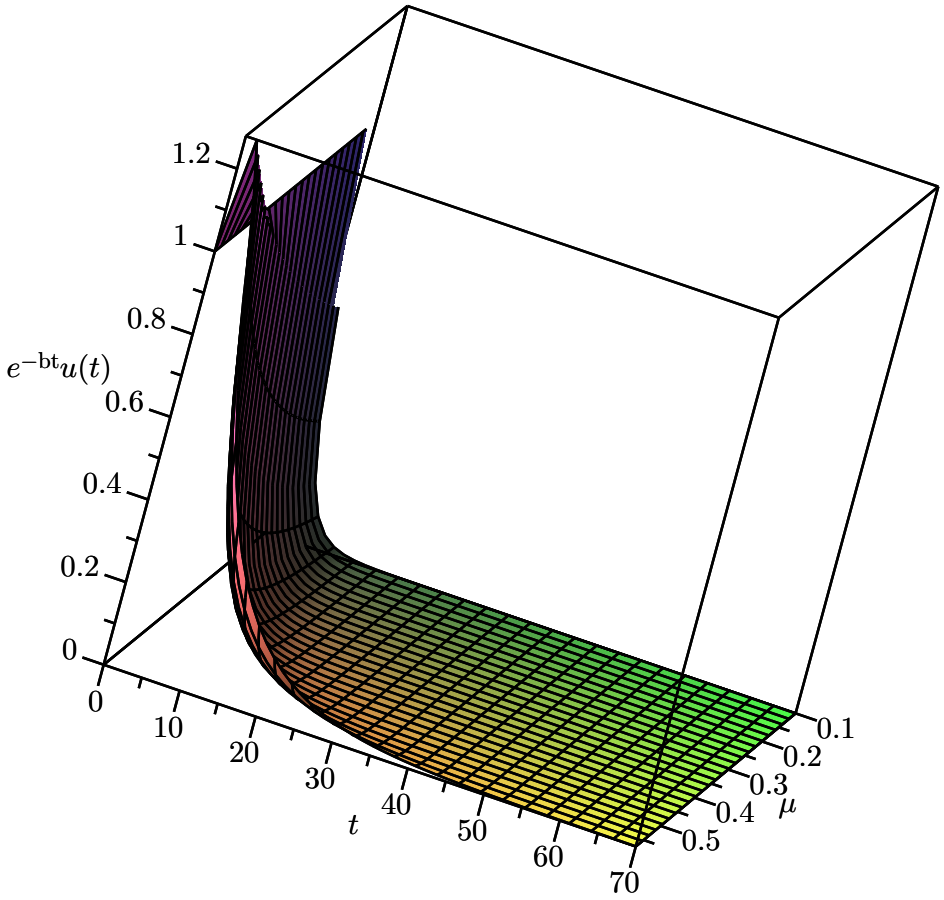


Figura 5.5: $\alpha = \frac{4}{7}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[7]{2^4}})$.

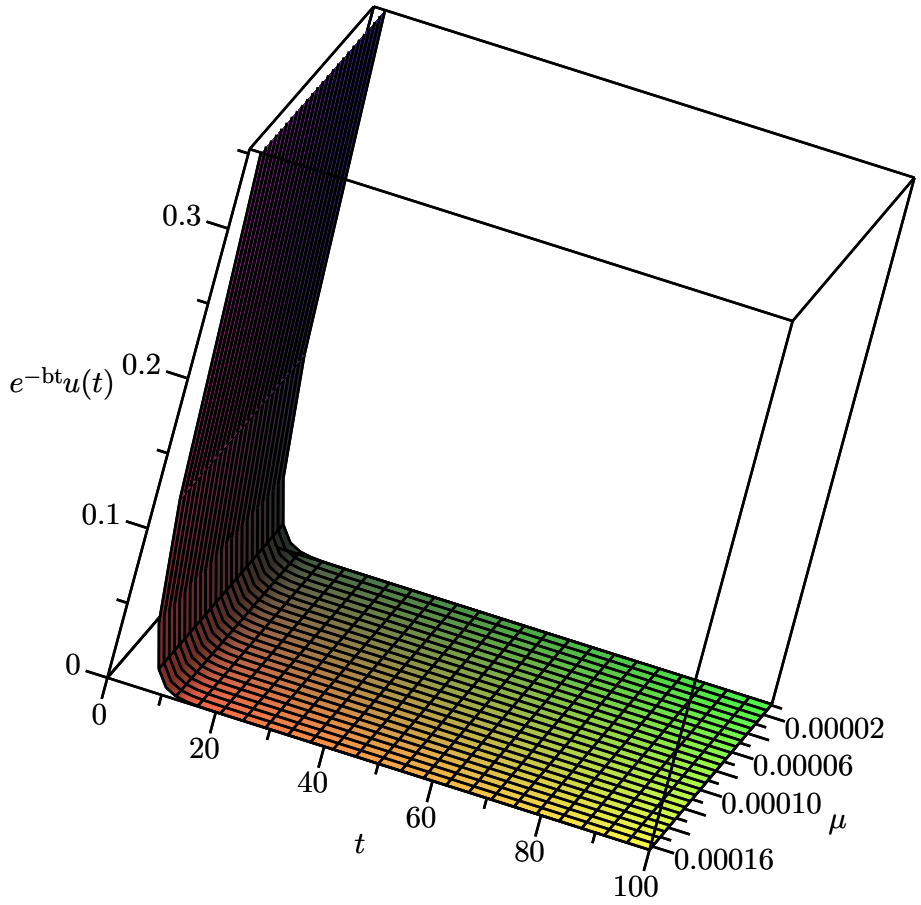


Figura 5.6: $\alpha = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}})$.

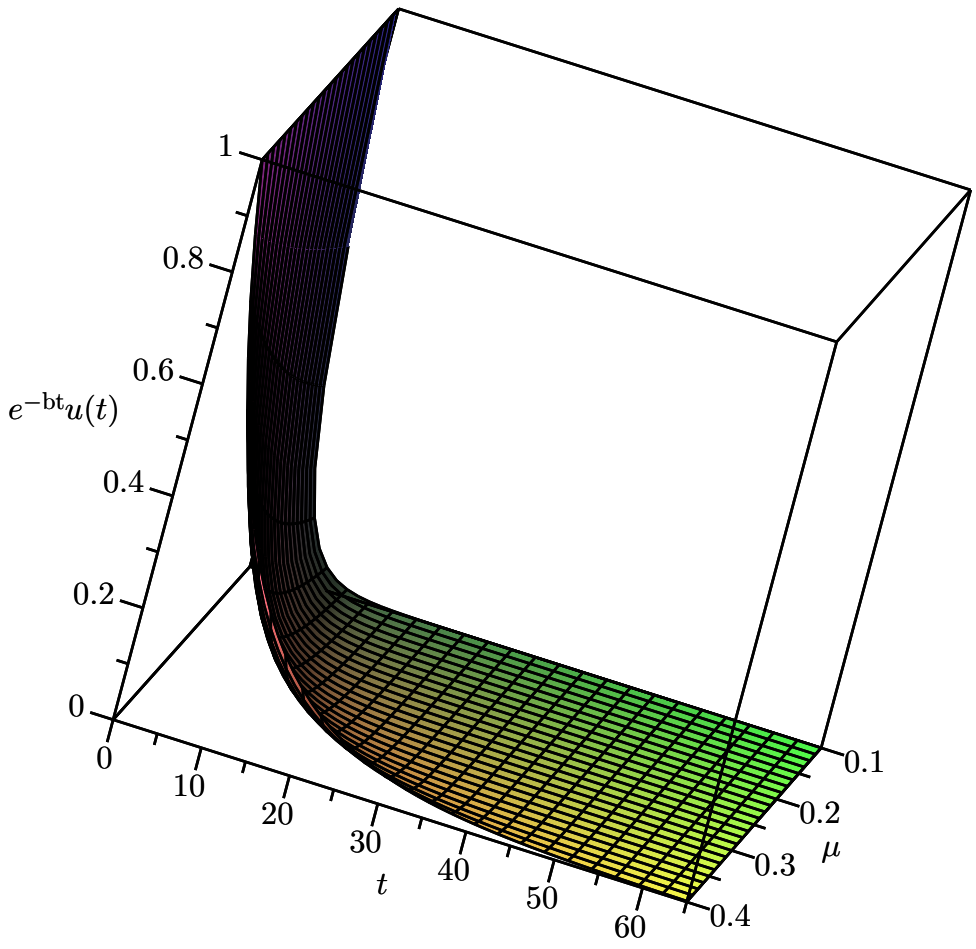


Figura 5.7: $\alpha = 1, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{2})$.

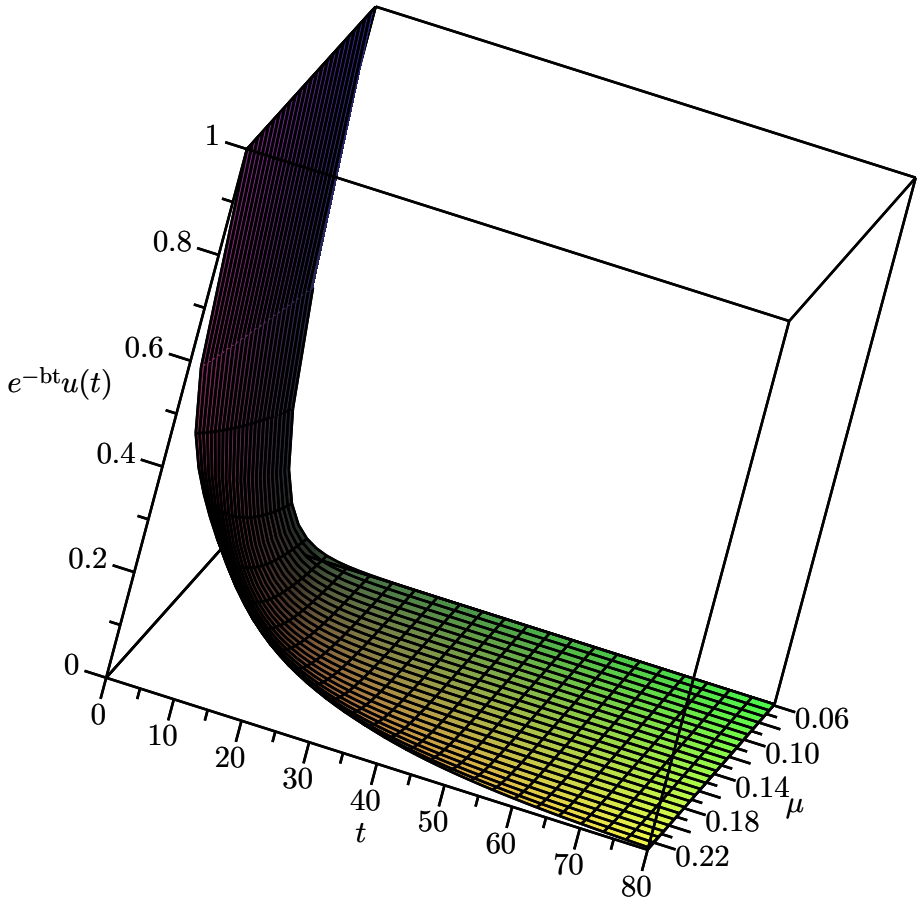


Figura 5.8: $\alpha = \frac{9}{5}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt[5]{2^9}})$.

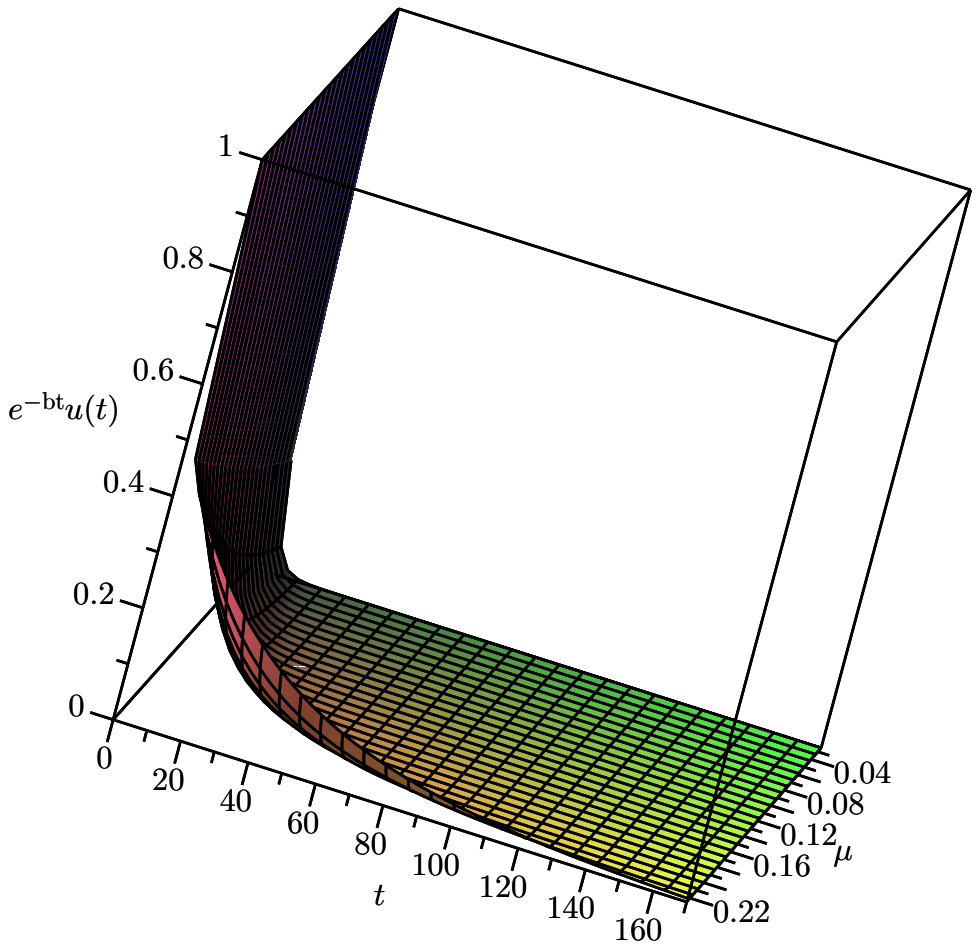


Figura 5.9: $\alpha = 2, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{4})$.

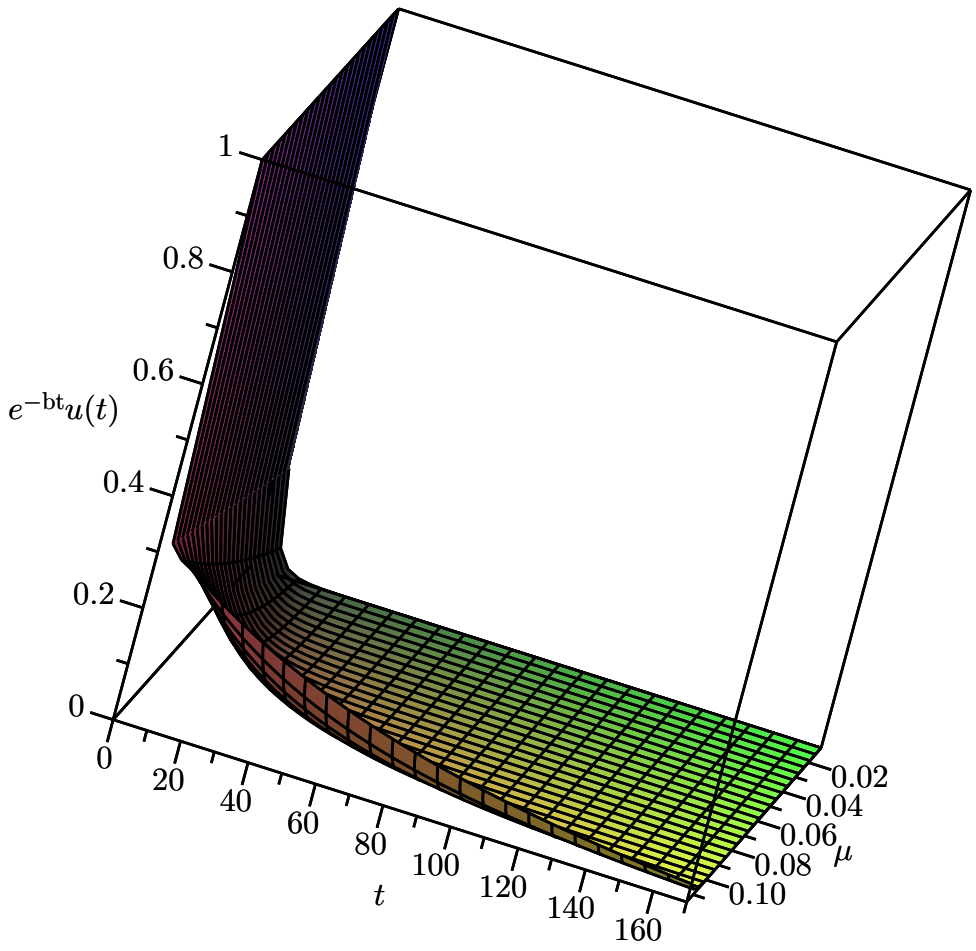


Figura 5.10: $\alpha = 3, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{8})$.

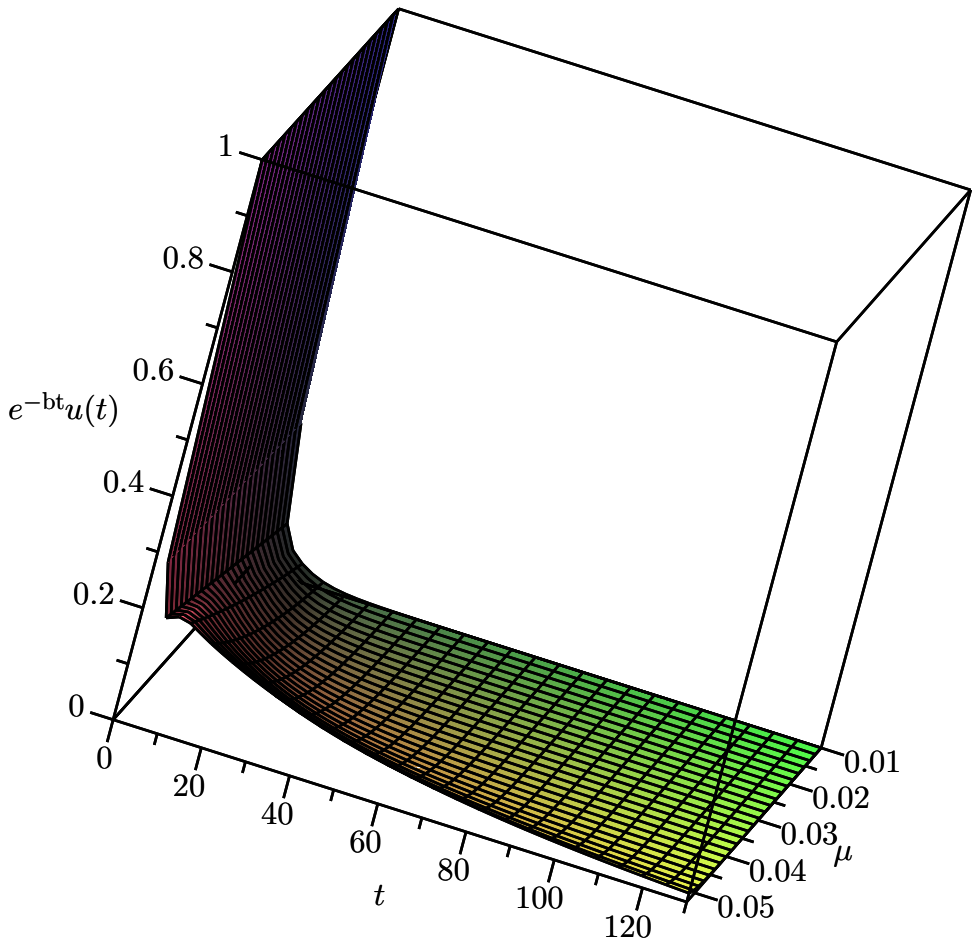


Figura 5.11: $\alpha = 4, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{16})$.

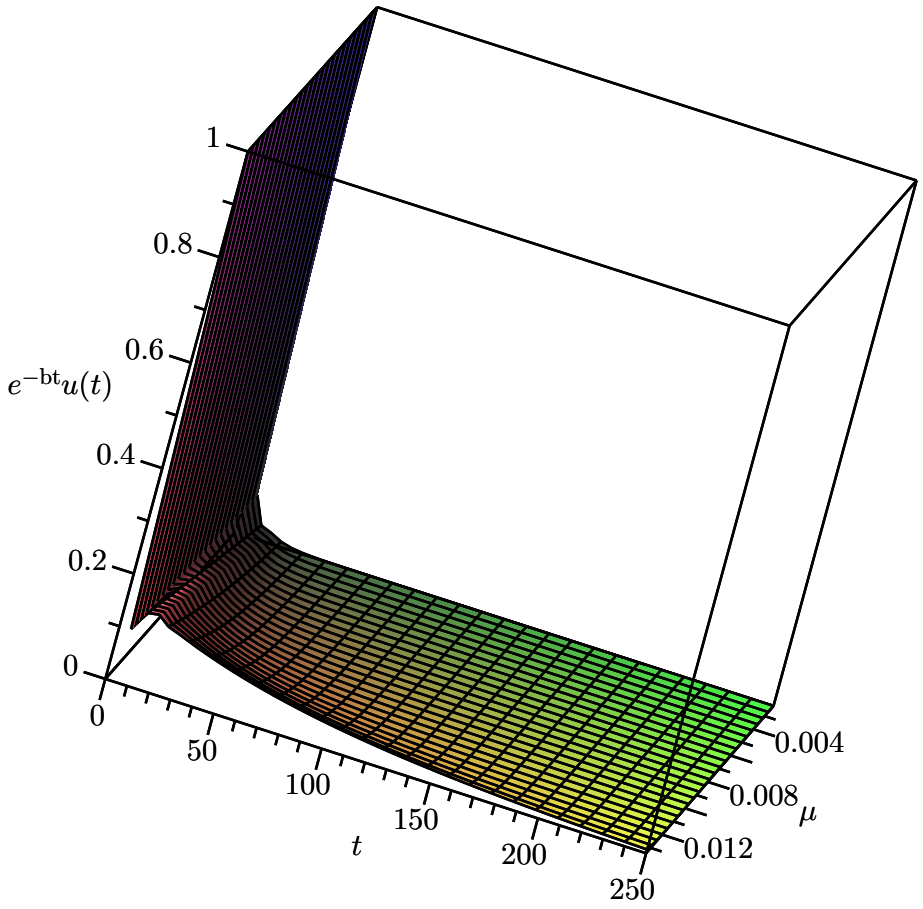


Figura 5.12: $\alpha = 6, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{64})$.

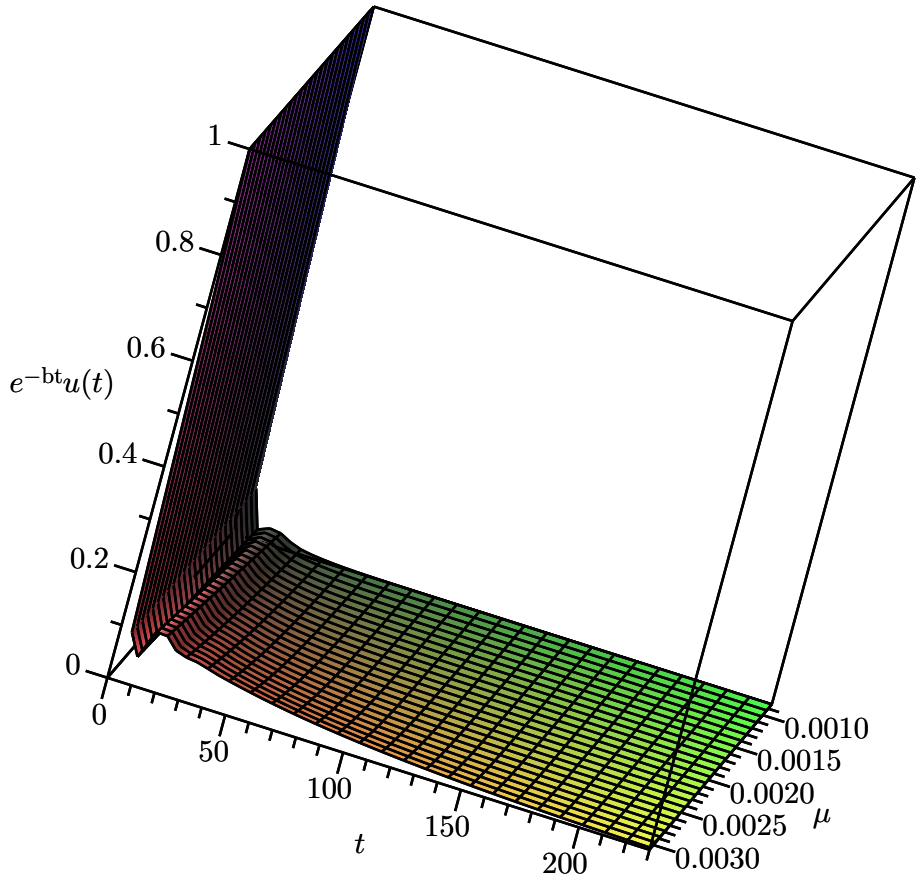


Figura 5.13: $\alpha = 8, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{256})$.

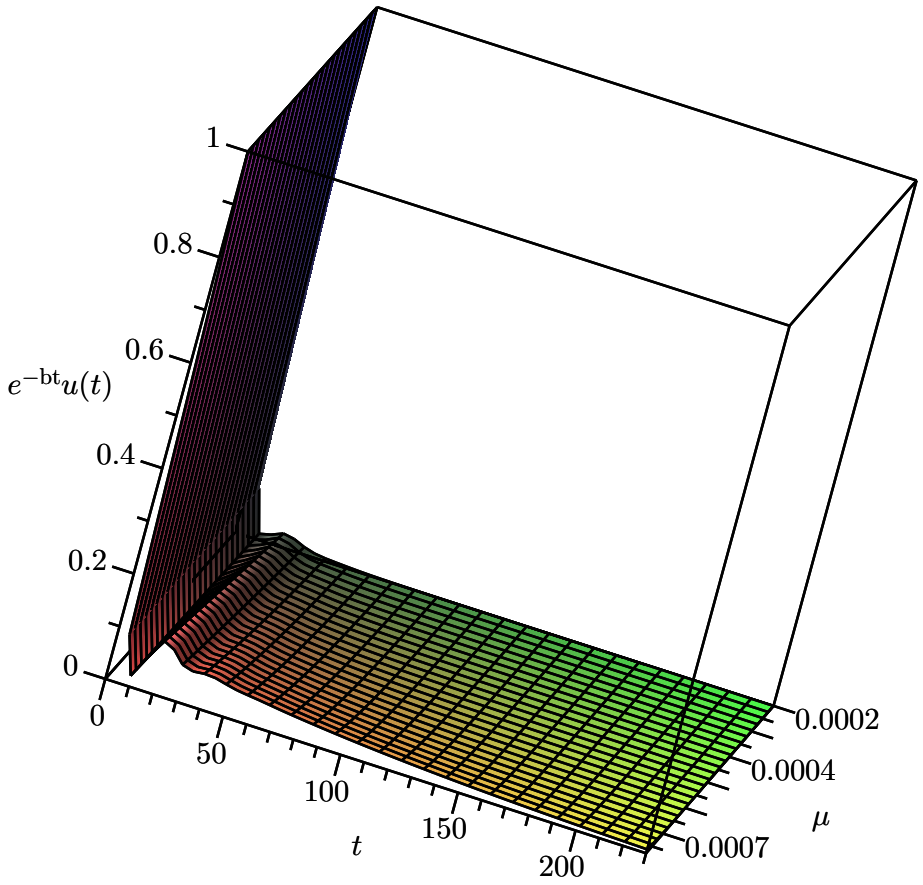


Figura 5.14: $\alpha = 10, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{2^{10}})$.

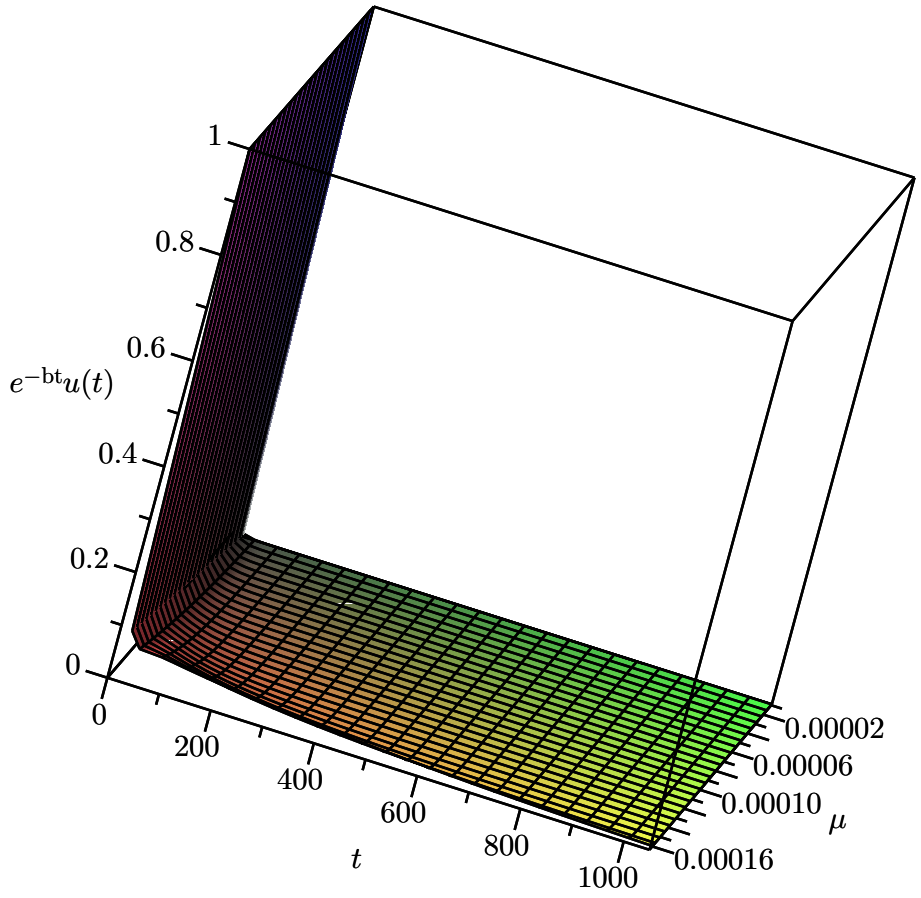


Figura 5.15: $\alpha = \frac{25}{2}, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{\sqrt{2^{25}}})$.

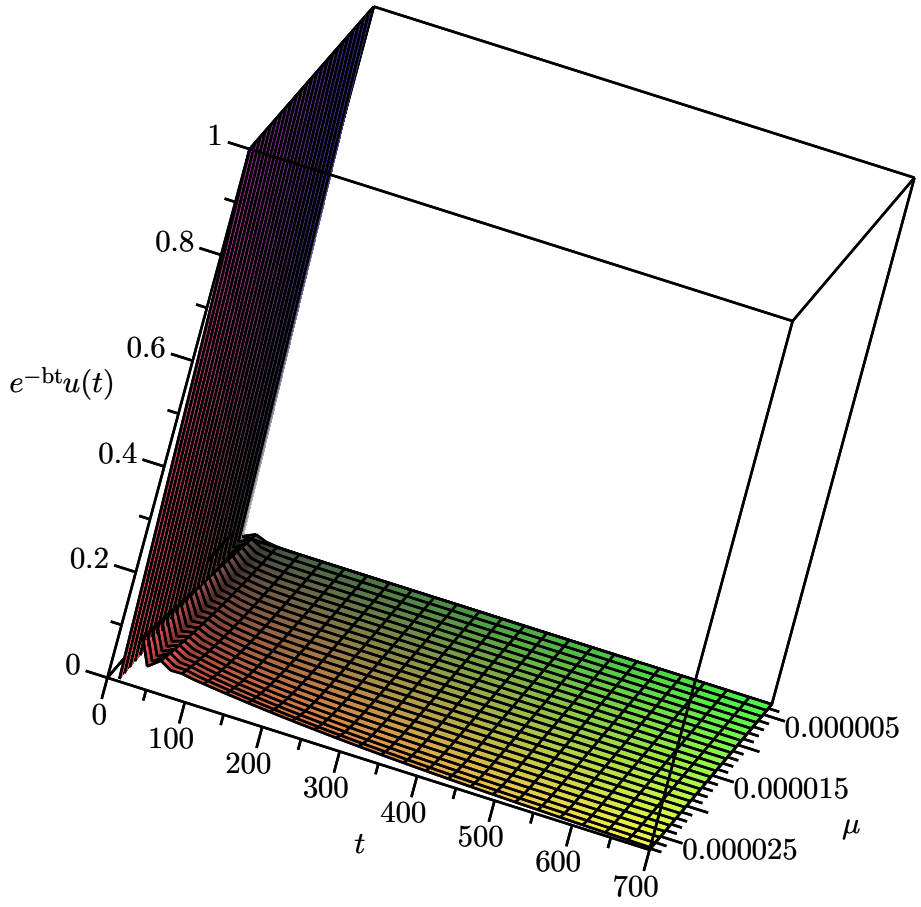


Figura 5.16: $\alpha = 15, b = \frac{1}{2}$ y $\mu \in (0, \frac{1}{2^{15}})$.

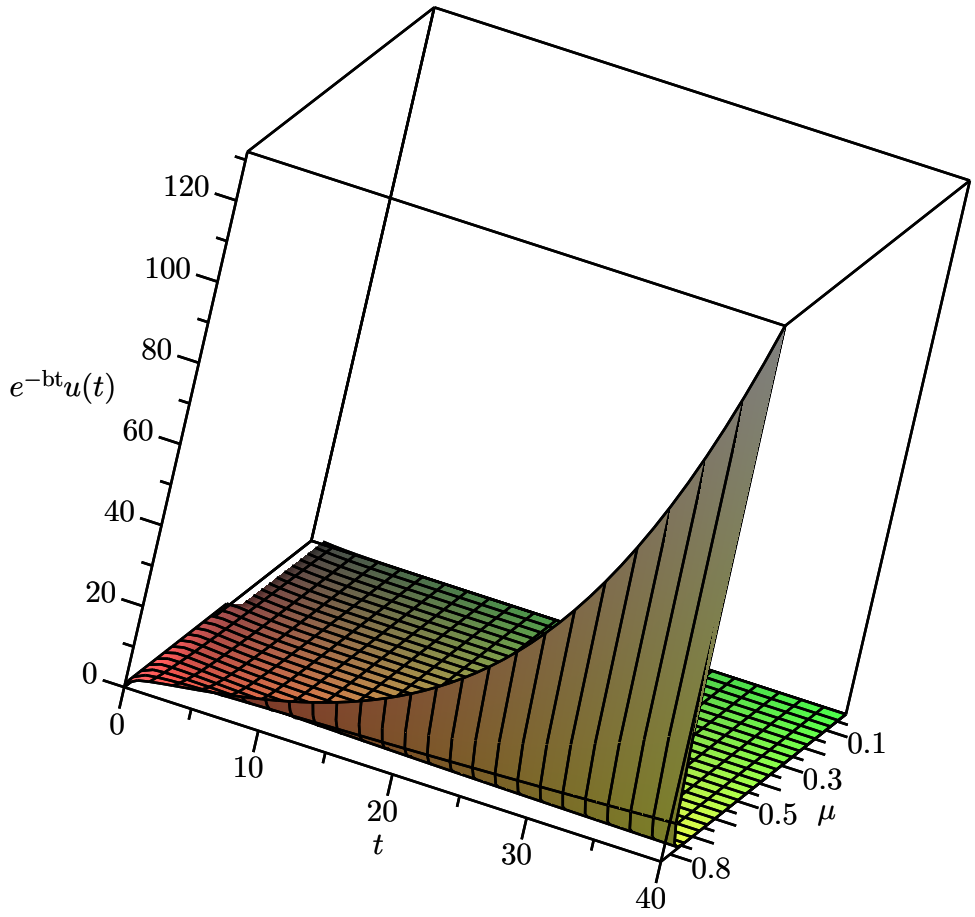


Figura 5.17: Se observa divergencia, en el caso $(\alpha, b) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, para $\mu > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Resumiendo, en estos distintos casos que hemos expuestos, y también al manipular el programa, uno se puede dar cuenta, que al hacer $\mu \to b^{\alpha}$, es decir, ir a la condición límite, la convergencia se hace mucho más lenta, por lo que puede considerarse óptima dicha condición.

Ejemplo 5.3.3. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y para $0 < \alpha < 1$ consideremos la ecuación fraccional de relajación*

$$u'(t) - AD^{\alpha}u(t) + u(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{5.3.8}$$

con condición inicial $u(0) = u_0$ y f una función apropiada $\mathscr{H}$-valuada. La ecuación 5.3.8 corresponde a la versión abstracta del problema de Basset. Recordemos que la ecuación

de Basset surge en la dinámica de fluidos sobre el movimiento de una partícula inestable al acelerar en un fluido viscoso bajo la acción de la gravedad. Como se indica en [5] (sección 3), que (5.3.8) esté bien planteado es equivalente a la existencia de una familia (a,k)-regularizada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ generada por A con,

$$a = g_{1-\alpha} - (g_{1-\alpha} * e_{-1}) \ \ y \ \ k = e_{-1}. \tag{5.3.9}$$

Más aún, es fácil comprobar que la solución del problema en términos de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ viene dada por

$$u(t) = u(0) - \int_0^t S(s)u(0)ds + \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \tag{5.3.10}$$

Corolario 5.3.4. *Sea $0 < \alpha < 1$. Supongamos que A genera una familia $(g_{1-\alpha} - (g_{1-\alpha} * e_{-1}), e_{-1})$-regularizada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. *$\frac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} \in \rho(A)$ para todo $\Re\lambda$ y $\lambda \neq 0$.*
2. *$\sup_{\Re\lambda} ||(1+\lambda-\lambda^\alpha A)^{-1}|| < \infty$.*

Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable.

Demostración. Se sigue desde las identidades $\hat{a}(\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{1+\lambda}$ y $k = \frac{1}{1+\lambda}$ que

$$\lim_{\lambda\to 0} H(\lambda)x = \lim_{\lambda\to 0}((1+\lambda) - \lambda^\alpha A)^{-1}x = x, \quad x \in \mathscr{H},$$

y la conclusión viene del Teorema 5.2.1. □

Por ejemplo, supongamos que el operador A es escalar($Ax = \mu x$, para algún $\mu \in \mathbb{C}$ y para todo $x \in \mathscr{H}$). Consideremos la ecuación (5.3.8) con condiciones iniciales, es decir,

$$u'(t) - \mu D^\alpha u(t) + u(t) = f(t), \quad u(0) = u_0$$

Afirmamos que si $\Re\mu < 0$ entonces A genera una familia (a,k)-regularizada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ uniformemente estable.
En primer lugar, vamos a demostrar que existe una función continua acotada $S : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ tal que

$$\hat{S}(\lambda) = H(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda-\lambda^\alpha\mu} \text{ para todo } \Re\lambda \geq 0,$$

y utilizaremos la Proposición 4.2.2 para mostrar que A genera una familia (a,k)-regularizada, donde a y k son dadas en (5.2.3). Para esto, notemos que $\frac{1+\lambda}{\lambda^\alpha} \neq \mu$ para todo $\Re\lambda > 0$. En

efecto, sea $\theta_\lambda := Arg_{[-\pi,\pi)}(\lambda)$

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{1+\lambda}{\lambda^\alpha}\right) &= \Re\left(\frac{1+\Re\lambda+\Im\lambda}{|\lambda|^\alpha e^{i\alpha\theta_\lambda}}\cdot\frac{e^{-i\alpha\theta_\lambda}}{e^{-i\alpha\theta_\lambda}}\right)\\ &= \Re\left(\frac{(1+\Re\lambda+\Im\lambda)e^{-i\alpha\theta_\lambda}}{|\lambda|^\alpha}\right)\\ &= \Re\left(\frac{(1+\Re\lambda+\Im\lambda)[\cos(\alpha\theta_\lambda)-i\sin(\alpha\theta_\lambda)]}{|\lambda|^\alpha}\right)\\ &= \left(\frac{\cos(\alpha\theta_\lambda)+\Re\lambda\cos(\alpha\theta_\lambda)+\Im\lambda\sin(\alpha\theta_\lambda)}{|\lambda|^\alpha}\right)\end{aligned}$$

Así, se tiene la identidad

$$\Re\left(\frac{1+\lambda}{\lambda^\alpha}\right) = \frac{1}{|\lambda|^\alpha}[(1+\Re\lambda)\cos(\alpha\theta_\lambda)+(\Im\lambda)\sin(\alpha\theta_\lambda)].$$

Entonces usando que $0<\alpha<1$, concluimos que $\Re\left(\frac{1+\lambda}{\lambda^\alpha}\right)\geq 0$ para todo $\Re\lambda>0$. De $\Re\mu<0$ obtenemos que $\frac{1+\lambda}{\lambda^\alpha}\neq\mu$ para todo $\Re\lambda>0$.
Por otra parte, del hecho de que $0<\alpha<1$ y la continuidad de H y H' sobre $i\mathbb{R}$, concluimos que existe $M>0$ tal que

$$|\lambda H(\lambda)|\leq M \text{ y } |\lambda^2 H'(\lambda)|\leq M \text{ para todo } \Re\lambda>0.$$

Así por [[2], Corolario 2.0.4] existe una función acotada $S\in C(\mathbb{R}_+)$ tal que $\hat{S}(\lambda)=H(\lambda)$, para todo $\Re\lambda>0$.
En segundo lugar, aplicando el Corolario 5.3.4 se concluye que la solución es uniformemente estable. El hecho que $\Re\mu<0$ y $\Re\frac{1+\lambda}{\lambda^\alpha}\geq 0$ para todo $\Re\lambda\geq 0$, implican que la condición (1) de (5.3.4) se satisface. La condición (2) viene del hecho de que H es analítica sobre $\mathbb{C}_+$ y continua en $i\mathbb{R}$. Por lo tanto tenemos

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} H(\lambda) = \lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{1}{1+\lambda-\lambda^\alpha\mu}=0,$$

y así la resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente estable. En particular, concluimos de (5.2.4) que si $\Re\mu<0$ entonces la solución de la ecuación

$$u'(t)-\mu D^\alpha u(t)+u(t)=0,\quad u(0)=u_0$$

satisface $\mu D^\alpha u(t)-u(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$.

Capítulo 6

Comentarios finales

A lo largo de este trabajo se han abordado dos grandes temas respecto de las familias (a,k)-regularizadas, primeramente el estudio de las familias (a,k)-regularizadas, y su posterior asociación a problemas de ecuaciones diferenciales parciales, y segundo las condiciones necesarias para asegurar la estabilidad de estas familias en un espacio de Hilbert.

Durante esta investigación, se pudo comprender las variadas ecuaciones que pueden ser tratadas o analizadas desde la óptica de las familias (a,k)-regularizadas, no sólo por el hecho que esta técnica deja a la ecuación original en otra equivalente que envuelve a un operador, y así se facilita el análisis de propiedades, si no que también las familias (a,k)-regularizadas generalizan a otras familias de las cuales ya se tienen resultados conocidos como por ejemplo los C_0-semigrupos, las familias coseno, semigrupos integrados, etc. y por ende también se obtienen como casos particulares resultados conocidos sobre algunas ecuaciones que ya han sido obtenidos a través del estudio de estas familias más particulares. Por ende, se pueden ver en detalle desde ecuaciones diferenciales, integro-diferenciales y ecuaciones de orden fraccionario. En este contexto permite que se traten problemas de orden fraccionario de una forma más natural a lo usual, y así obtener importantes conclusiones sobre estos, muy útiles por lo demás, pues ellos tienen variadas aplicaciones ya que modelan distintos fenómenos de la física y la naturaleza.
Finalmente se ha visto bajo qué condiciones se puede tener la estabilidad de una familia y de cualquier ecuación que se pueda llegar a asociar a una de estas familias en un espacio de Hilbert, o en el caso que no se tenga la estabilidad ver qué hipótesis alternativas adicionar con el fin de llegar a obtener dicha condición.

Bibliografía

[1] F. Alvarez and J. Peypouquet. *Introducción a la Teoría de Semigrupos*. Escuela de Verano DIM-MECESUP-CMM, 2003.

[2] W. Arendt, J.K. Batty, M. Hierber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, volume 96 of Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2001.

[3] K.-J Engel and R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer-Verlag, 2000.

[4] H.J. Haubold, A.M. Mathai, and R.K. Sakena. Mittag-leffler functions and their applications. *Applied Mathematics*, 2011:51 pages, 2011.

[5] A. Karczewska and C. Lizama. Solutions to stochastic fractional relaxation equation. *Physica Scripta*, 136, 2009.

[6] M. Kostić. (a,k)-regularized c-resolvent families: regularity and local properties. *Abs. Appl. Anal.*, page 27 pages, 2009. Art. ID 858242.

[7] C. Lizama. Regularized solutions for abstract volterra equation. *Mathematical Analysis and Applications*, 243(2):278–292, 2000.

[8] C. Lizama. On approximation and representation of k-regularized resolvent families. *Integral Equations and Operator Theory*, 41(2):223–229, 2001.

[9] C. Lizama, P.J.Miana, and F. Poblete. Uniform stability of (a,k)- regularized families. *Asymptotic Analysis*, 84(3):47–60, 2013.

[10] C. Lizama and H. Prado. Rates of approximation and ergodic limits of regularized operator families. *Approx. Theory*, 122(1):42–61, 2003.

[11] C. Lizama and H. Prado. On duality and spectral properties of (a,k)-regularized resolvents. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A.*, 139(3):505–517, 2009.

[12] C. Lizama and J. Sánchez. On perturbation of k-regularized resolvent families. *Taiwanese J. Math*, 243(7):217–227, 2003.

[13] C. Lizama and V. Vergara. Uniform stability of resolvent families. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(1):175–181, 2004.

[14] B. Nagy. On cosine operators functions in banach spaces. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 36:281–289, 1974.

[15] F. Poblete. *(a,k)-regularized families and some evolutions equations*. PhD thesis, Universidad de Chile, Febrero 2013.

[16] J. Prüss. *Evolutonary integral equations and applications*, volume 87 of Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 1993.

Apéndice A

Código en Maple

Antes que nada, sabemos que la función de Mittag-Leffler se define como $E_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, por lo que $E_\alpha(\mu t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$.

A continuación se detalla el programa realizado en **Maple** con el fin de graficar y ejemplificar los diferentes casos de la función (5.3.7).

La idea principal del programa es aproximar a $S(t) = e^{-bt}E_\alpha(\mu t^\alpha)$, con la cantidad de términos que se desee, en este caso 3000. Además se que se pueden ingresar los parámetros α, b, μ a elección y se genere la superficie en base a la restricción $0 < \mu < b^\alpha$.

$$>(\alpha, b) := (4, \frac{1}{2});$$

$$>\eta := \text{evalf}(b^\alpha);$$

$$>\epsilon := \frac{1}{100};$$

$$>\kappa := \text{evalf}(\eta - \epsilon);$$

$$>m := 3000;$$

$$>a := n \to \frac{(\mu \cdot t^\alpha)^n}{\text{GAMMA}(\alpha \cdot n + 1)};$$

$$>h(\alpha, b, \mu, t) := Sum(a(n), n = 0..m) \cdot \exp(-b \cdot t);$$

$$>(c, d) := (0, 130);$$

$$>\text{plot3d}\Big(h(\alpha, b, \mu, t), \mu = \epsilon..\kappa, t = c..d, axes = \text{boxed}, \text{labels} = [\mu, t, e^{-bt}u(t)]\Big);$$

Mostramos a continuación el interfaz que genera en Maple el código anteriormente expuesto, con comentarios para su mayor comprensión.

```
> (α, b) := (4, 1/2); # Definimos parámetros
```

$$\alpha, b := 4, \frac{1}{2}$$

```
> η := evalf(b^α); # Condición para la convergencia de la solución
```

$$\eta := 0.06250000000$$

```
> ϵ := 1/100; # Límite inferior para μ, y tolerancia respecto de η
```

$$\epsilon := \frac{1}{100}$$

```
> κ := evalf(η − ϵ); # Límite superior para μ
```

$$\kappa := 0.05250000000$$

```
> m := 3000; # nro de términos de la serie
```

$$m := 3000$$

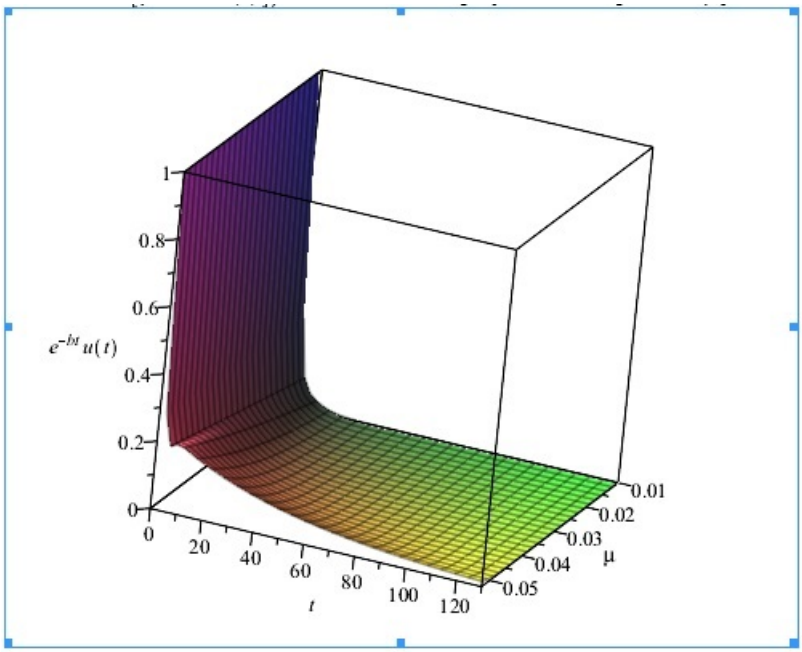
```
> a := n→ (μ·t^α)^n / GAMMA(α·n + 1); # Definimos el sumando de la serie
```

$$a := n \to \frac{(\mu\, t^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

```
> h(α, b, μ, t) := Sum(a(n), n = 0..m)·exp(−b·t);
```

$$h\left(4, \frac{1}{2}, \mu, t\right) := \left(\sum_{n=0}^{3000} \frac{(\mu\, t^4)^n}{\Gamma(4n+1)}\right) e^{-\frac{1}{2}t}$$

```
> (c, d) := (0, 130); # Límites en los cuales se moverá "t"
```

$$c, d := 0, 130$$

```
> plot3d(h(α, b, μ, t), μ = ϵ..κ, t = c..d, axes = boxed, labels = [μ, t, e^(−bt)u(t)]); # Ploteamos la superficie, con respecto de μ y t
```