Soluciones débiles y acotadas de ecuaciones de Volterra.

Sebastián Calzadillas Niechi

SOLUCIONES DÉBILES Y ACOTADAS DE ECUACIONES DE VOLTERRA.

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencias, en cumplimiento parcial de los requisitos exigidos para optar al grado de Magíster en ciencias especialidad Matemática.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
SANTIAGO-CHILE
2010

SOLUCIONES DÉBILES Y ACOTADAS DE ECUACIONES DE VOLTERRA.

Sebastián Calzadillas Niechi

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Carlos Lizama del Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, compuesta por los Doctores y Hernán Henríquez de la Universidad de Santiago de Chile y Verónica Poblete de la Universidad de Chile.

------------------------	------------------------
Profesor Informante	Profesor Informante

------------------------	------------------------
Profesor Guía	Director

Índice general

Introducción

El objetivo de esta tesis es el estudio de existencia, unicidad, regularidad y propiedades cualitativas de soluciones débiles de ecuaciones del tipo Volterra para funciones con valores en espacios de Banach.

Las ecuaciones del tipo Volterra han sido estudiadas bajo diferentes perspectivas. Por ejemplo, en el caso de espacios de dimensión finita, muchos autores (ver [27, 29, 42] y sus referencias) han estudiado condiciones de suficiencia bajo las cuales la estabilidad de una ecuación lineal de Volterra implica la correspondiente estabilidad de la ecuación no lineal. Por otro lado, en [42], se establecen condiciones bajo las cuales al perturbar una ecuación se obtienen soluciones asintóticamente casi periódicas (otros resultados sobre perturbación para ecuaciones integrodiferenciales pueden ser encontrados en [27] y [34]).

Las ecuaciones que estudiaremos aparecen de forma natural en problemas de flujo del calor con memoria [48], y han sido objeto de numerosos estudios durante los últimos años (ver [17, 29, 52, 53] y sus referencias).

Especificamente, abordamos las siguientes ecuaciones del tipo Volterra

$$u_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)[Au_\epsilon(s) + f(s) + \epsilon g(s, u_\epsilon(s))]ds, \tag{1}$$

Aquí $\epsilon > 0$ es un parámetro pequeño, $u(t)$ denota el estado del sistema en el tiempo t, A es un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ definido sobre un espacio de Banach X, a es un núcleo escalar en $L^1(\mathbb{R})$ diferente de cero y f y g son dos funciones conocidas.

Note que las ecuaciones (1) están asociadas a la ecuación lineal

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)[Au(s) + f(s)]\, ds, \text{ cuando } \epsilon \to 0. \tag{2}$$

Por otro lado, las ecuación (2) puede ser vista como la *ecuación límite* para la ecuación de Volterra

$$u(t) = \int_{0}^{t} a(t-s)[Au(s) + f(s)]ds, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Para los detalles sobre esta afirmación ver [52, capítulo 3, sección 11.5]. Más aún, si asumimos que a es acotada y su primer momento existe, en [17] se probó que el problema (2) es equivalente a

$$u(t) + \frac{d}{dt}\left(\alpha u(t) + \int_{-\infty}^{t} k(t-s)u(s)ds\right) = \left(\int_{0}^{\infty} a(\tau)d\tau\right)(Au(t) + f(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

para algún $\alpha > 0$, $k \in L^1(\mathbb{R}_+)$ no negativo y no decreciente. En [16] se estudian condiciones para la existencia y regularidad de las soluciones de la ecuación (4) cuando A genera un semigrupo contractivo sobre X. Bajo la hipótesis más fuerte de que A genera un semigrupo analítico, en [17] fue estudiada la regularidad de las soluciones para la ecuación (4) sobre los espacios $L^p(X), BUC(X), W^{\alpha,p}(X)$ y el espacio de funciones de tipo Hölder $BC^{\alpha}(X)$, para $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq p < \infty$. Estos resultados de regularidad máximal han sido aplicados al estudio de existencia y regularidad de soluciones para la ecuación (1) al considerar funciones no lineales del tipo $g(t, u(t))$.

El presente trabajo se divide en tres capítulos. En el primero de ellos, describimos ciertos subespacios de $BC(X)$ a los que pertenecerán las funciones $f(t)$ y $g(t, x)$ de las ecuaciones (1) y su contraparte lineal (2). El segundo capítulo es una pequeña introducción sobre la teoría de ecuaciones integrales abstractas del tipo Volterra. En el tercer capítulo presentamos dos clases importantes de familias de operadores lineales y acotados: las familias $(a, k)-$regularizadas y las familias resolventes integrales, finalmente pasamos a mostrar resultados recientes para la ecuación (1) obtenidos en el artículo [15].

Capítulo 1

Subespacios de $BC(X)$.

El presente capítulo tiene dos objetivos principales, el primero es el de introducir los conceptos de función casi periódica, función casi automórfica, función casi automórfica compacta y función asintóticamente casi automórfica, así como también dar algunas propiedades básicas de cada una de ellas, lo que permite presentar de forma práctica la manera usual con las que se trabaja con estas funciones. El segundo objetivo es entregar las herramientas que permitan desarrollar la principal motivación de este trabajo.
El orden escogido es cronológico, esto es, los conceptos se presentan según el orden en que se publicaron en la literatura especializada.

En lo que sigue $X \equiv (X, \mathbb{K})$ denotará un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$.
Utilizaremos la notación $BC(X)$ para identificar al conjunto

$$BC(X) = \{f : \mathbb{R} \to X : f \text{ es continua y acotada}\},$$

donde f es acotada en el sentido que la norma de la convergencia uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_X \tag{1.0.1}$$

es finita.
Para simplificar la notación escribiremos (1.0.1) simplemente por

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|,$$

cuando el contexto lo permita.

Es bien sabido que $BC(X) \equiv (BC(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, recurriremos a este hecho en varias ocasiones a lo largo de este trabajo.

1.1. Funciones casi periódicas.

Entre 1923 y 1925 Harald Bohr comenzó a desarrollar la teoría de las funciones casi periódicas, utilizando algunos métodos desarrollados por P. Bohl y E. Esclangon en sus artículos sobre las funciones cuasi periódicas. Estas generalizaban a las funciones periódicas pero tras el trabajo de H. Bohr las funciones cuasi periódicas pasaron a ser un caso particular de las casi periódicas. Muchos matemáticos fueron atraídos por los artículos de H. Bohr. Por ejemplo, en 1925 V. V. Stepanov generalizó el concepto de función casi periódica definida por Bohr sin asumir la hipótesis de continuidad, para 1933 S. Bochner definió y estudió a las funciones casi periódicas con rango en espacios de Banach. Las aplicaciones de esta clase de funciones no tardaron en llegar, tómese como referencia los trabajos de S. Bochner y J. Von Neumann concernientes a ciertos problemas de la física matemática. Por otro lado, para 1945, S. L. Sobolev establece que las soluciones de la ecuación de ondas son casi periódicas. La teoría siguió creciendo con contribuciones hechas por los mismos H. Bohr, J. V. Neumann y además por W. Maak, N. N. Bogoliubov, entre otros.

Es oportuno comenzar las siguientes líneas con la definición de este importante concepto.

Definición 1.1.1. *Una función $f : \mathbb{R} \to X$ continua se dice casi periódica si para cada $\varepsilon > 0$ existe $l > 0$ tal que en cada intervalo real de largo l existe s con la propiedad de que*

$$\|f(s+t) - f(t)\| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Al número s, de la definición anterior, le llamaremos $\varepsilon-$período.
Denotaremos al conjunto de las funciones casi periódicas por $AP(X)$ (por sus siglas del inglés almost periodic).

Note que si $f \in AP(X)$ entonces trivialmente $\lambda f \in AP(X)$, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. Una propiedad no tan obvia de probar es el hecho de que si f_1, $f_2 \in AP(X)$, entonces $f_1 + f_2 \in AP(X)$, lo que implica que $AP(X)$ es un espacio vectorial. Antes de mostrar que efectivamente $AP(X)$ es un espacio vectorial, veremos algunas propiedades para $f \in AP(X)$, y luego caracterizaremos a toda función casi periódica.

Proposición 1.1.2. *Si $f : \mathbb{R} \to X$ es una función casi periódica, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f sobre $\mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $t' \in \mathbb{R}$ y $|t - t'| < \delta$ entonces $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon$. Aún más, f es uniformemente continua sobre el intervalo $[-1, l+1]$ para cada $l > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\delta > 1$. Sea $l = l(\varepsilon) > 0$ como en la Definición 1.1.1 entonces, en el intervalo $(-t, -t+l)$ existe s tal que

$$\|f(t' + s) - f(t')\| < \varepsilon \text{ para cada } t' \in \mathbb{R}.$$

Sea $t' \in \mathbb{R}$, tal que $|t - t'| < \delta$, note que $t + s \in (0, l) \subset [-1, -1 + l]$ y $t' + s \in [-1, l + 1]$ de esta manera

$$\|f(t + s) - f(t' + s)\| < \varepsilon.$$

Finalmente

$$\|f(t) - f(t')\| \leq \|f(t) - f(t + s)\| + \|f(t + s) - f(t' + s)\| + \|f(t' + s) - f(t')\| < \varepsilon,$$

esto es, f es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$. □

Teorema 1.1.3. *Si $f : \mathbb{R} \to X$ es casi periódica, entonces es acotada en X.*

Demostración. Sea $f \in AP(X)$ y escojamos $\varepsilon = 1$, entonces existe $l = l(1) > 0$ como en la Definición 1.1.1, sea $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\|f(t)\| \leq \|f(t + s) - f(t)\| + \|f(t + s)\|,$$

donde s es un $\varepsilon-$período de $f(x)$ del intervalo $[-t, -t + l]$. Note $t + s \in [0, l]$, para cada $t \in \mathbb{R}$, y que f es acotada sobre este intervalo pues es uniformemente continua. Así,

$$\|f(t)\| < 1 + M \text{ para cada } t \in \mathbb{R},$$

esto es, f es acotada en X. □

Teorema 1.1.4. *Sea $f \in AP(X)$ entonces su rango $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto en X.*

Demostración. Dado que en un espacio de Banach los conjuntos relativamente compactos coinciden con los conjuntos precompactos, es suficiente demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$, el conjunto imagen de f está contenido en un número finito de bolas de radio ε. Sea $l = l(\varepsilon/2) > 0$ como en la Definición 1.1.1. Dado que f es continua sobre $[0, l]$, el conjunto $B = \{f(t) : t \in [0, l]\}$ es compacto.

Denotemos por $x_1, x_2, \ldots, x_p$ los centros de las bolas de radio $\varepsilon/2$ las cuales cubren al conjunto B.

Para $t \in \mathbb{R}$ arbitrario escojamos un $(\varepsilon/2)-$período τ del intervalo $[-t, -t+l]$ entonces $t+\tau \in [0, l]$, y sea x_i el centro de la bola de radio $\varepsilon/2$ el cual contiene a $f(t+\tau)$. Tenemos

$$\|f(t) - x_i\| \leq \|f(t+\tau) - f(t)\| + \|f(t+\tau) - x_i\| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es cubierto por un número finito de bolas de radio ε. $\square$

La Proposición 1.1.2 en conjunto con el Teorema 1.1.3 muestran que $AP(X) \subset BC(X)$. De hecho la próxima Proposición demuestra que $AP(X)$ es cerrado en $BC(X)$.

Proposición 1.1.5. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones casi periódicas, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f : \mathbb{R} \to X$ sobre $\mathbb{R}$ entonces f es casi periódica.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon \text{ para cada } n > N \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

Sea $n > N$ fijo, luego existe $l = l(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier intervalo I de largo l existe $s \in I$ que satisface que

$$\|f_n(t+s) - f_n(t)\| < \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente tenemos que

$$\|f(t+s) - f(t)\| \leq \|f(t+s) - f_n(t+s))\| + \|f_n(t+s) - f_n(t)\| + \|f_n(t) - f(t)\|,$$

lo que termina la prueba. $\square$

Los siguientes dos teoremas establecen condiciones necesarias y suficientes para que una función $f : \mathbb{R} \to X$ sea casi periódica.

Teorema 1.1.6. *Sea X un espacio de Banach y $f : \mathbb{R} \to X$ y una función casi periódica, entonces para cada sucesión $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión (s_n) tal que $(f(t+s_n))$ converge uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea (s_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ y considere la sucesión de funciones f_{s_n} definida por $f_{s_n}(t) = f(t+s_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Sea $S = (\eta_n)$ un subconjunto denso y numerable sobre $\mathbb{R}$. Sea $\eta_1 \in S$ fijo, dado que $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es relativamente compacto, para la sucesión $(f(\eta_1 + s_n))$ podemos obtener una subsucesión, $(f_{s_{1,n}})$, convergente.

Aplicando el mismo argumento a $(f_{s_{1,n}})$ podemos escoger $\eta_2 \in S$ y una subsucesión, $(f_{s_{2,n}})$ de $(f_{s_{1,n}}(\eta_2))$ convergente. Continuando el proceso y considerando la sucesión diagonal $(f_{s_{n,n}})$ la cual es convergente en cada η_n en S. A tal sucesión la denotamos por

(f_{r_n}).
Demostraremos que ésta converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$: esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(t + r_n) - f(t + r_m)\| < \varepsilon \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R} \text{ si } n,\, m > N.$$

Dado que que f es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$ podemos encontrar $\delta := \delta(\varepsilon/5)$ tal que

$$\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon/5,$$

para cada $t, t' \in \mathbb{R}$ con $|t - t'| < \delta$.

Sea $l > 0$, donde l es él de la Definición 1.1.1 para $\varepsilon/5$.
Dividamos el intervalo $[0, l]$ en ν subintervalos de longitud menor que δ y en cada subintervalo escogemos un punto, ξ, de S, definimos $S_0 := \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu\}$.

Como S_0 es finito (f_{r_n}) converge uniformemente sobre S_0, esto es, existe $N := N(\varepsilon/5)$ tal que

$$\|f(\xi_i + r_n) - f(\xi_i + r_m)\| < \varepsilon/5, \text{ para cada } i = 1, \ldots, \nu \text{ y } n, m > N.$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, formemos $[-t, -t + l]$ luego existe $s \in [-t, -t + l]$ tal que

$$\|f(t + s) - f(t)\| < \varepsilon/5,$$

además para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\|f(t + r_n + s) - f(t + r_n)\| < \varepsilon/5.$$

Dado que $s + t \in [0, l]$ existe ξ_i tal que $|t + s - \xi_i| < \delta$ entonces tenemos que

$$\|f(t + s + r_n) - f(\xi_i + r_n)\| < \varepsilon/5 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente escribimos:

$$\begin{aligned}
\|f(t + r_n) - f(t + r_m)\| \leq\ & \|f(t + r_n) - f(t + r_n + s)\| + \|f(t + r_n + s) - f(\xi_i + r_n)\| + \\
+\ & \|f(\xi_i + r_n) - f(\xi_i + r_m)\| + \|f(\xi_i + r_m) - f(t + r_m + s)\| + \\
+\ & \|f(t + r_m + s) - f(t + r_m)\|.
\end{aligned}$$

Así $\|f(t + r_n) - f(t + r_m)\| < \varepsilon$, si $n, m > N$ esto es, $(f(t + r_n))$ converge uniformemente sobre $t \in \mathbb{R}$ y como $(r_n) \subset (s_n)$ la prueba finaliza. $\square$

El segundo de estos teoremas obtiene lo que comunmente se conoce como (el importante) criterio de Bochner.

Teorema 1.1.7 (Criterio de Bochner). *Sea X un espacio de Banach y $f : \mathbb{R} \to X$ una función continua. Entonces, f es casi periódica si y sólo si para cada sucesión de números reales $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión (s_n) tal que $(f(t+s_n))$ converge uniformemente en t.*

Demostración. El que la condición sea necesaria fue probada en el teorema anterior. Ahora mostraremos que es suficiente, lo haremos por contradicción.

Suponga que f no es casi periódica. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $l > 0$, existe un intervalo de largo l el cual no contiene ningún $\varepsilon-$período, equivalentemente:

Existe un intervalo $[-a, -a+l]$ tal que para cada $s \in [-a, -a+l]$, existe $t = t(s) \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $\|f(t+s) - f(t)\| > \varepsilon$.

Sea $s_1 \in \mathbb{R}$ y (a_1, b_1) con $b_1 - a_1 > 2|s_1|$, tal que (a_1, b_1) no contenga ningún $\varepsilon-$período de f. Definamos $s_2 = (a_1 - b_1)/2$ entonces $s_2 - s_1 \in (a_1, b_1)$ de esta mane-ra $s_2 - s_1$ no es un número $\varepsilon-$perido de f. Considere otro intervalo (a_2, b_2) con $b_2 - a_2 > 2(|s_1| + |s_2|)$ y que no contenga ningún $\varepsilon-$período de f, sea $s_3 = (b_2 - a_2)/2$ entonces $s_3 - s_2, s_2 - s_1 \in (a_2, b_2)$ y estos no pueden ser $\varepsilon-$períodos de f.

De esta manera obtenemos una sucesión de reales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_m - s_n$ no es un $\varepsilon-$período de f, esto es

$$\|f(t + s_m - s_n) - f(t)\| > \varepsilon.$$

Defina $\sigma := t - s_n$, entonces

$$\|f(\sigma + s_m) - f(\sigma + s_n)\| > \varepsilon. \qquad (*)$$

Por hipótesis existe una subsucesión (s'_n) de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(f(t + s'_n))$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}$, esto es, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ (sin pérdida de generalidad podemos asumir que $m > n$) entonces

$$\|f(t + s'_m) - f(t + s'_n)\| < \varepsilon \text{ para cada } t \in \mathbb{R},$$

lo que contradice $(*)$ y la prueba finaliza. □

Una aplicación directa del criterio de Bochner es la facilidad con que se prueba que $AP(X)$ es un espacio vectorial (y a la vez normado por la Proposición 1.1.3), gracias a esto podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.1.8. *El espacio vectorial $AP(X)$ dotado de la norma*

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|.$$

es un espacio de Banach.

Demostración. Se sigue directamente desde que $AP(X)$ es cerrado en $BC(X)$ (Proposición 1.1.5). $\square$

Observación 1.1.9. *Todo lo anterior es generalizable a espacios de Frechet (para la definición ver [46, pág. 9] y para la extensión remitirse a [46, pp. 51-56]).*

Pasamos a enunciar uno de los teoremas fundamentales de la teoría de funciones casi periódicas y a continuación daremos una breve comentario de una de sus consecuencias, la demostración del teorema puede ser encontrada en [18, pp. 14-23].

Teorema 1.1.10. *Sea $X = \mathbb{C}$. Entonces la función -numérica- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es casi periódica si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico*

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(\varepsilon)e^{i\lambda(\varepsilon)_k x}, \quad c_k(\varepsilon) \in \mathbb{C},\ \lambda(\varepsilon)_k \in \mathbb{R},$$

tal que

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Este teorema nos permite abordar una cuestión que aparentemente estabamos omitiendo: Existe una relación entre las funciones periódicas y las casi periódicas.
Utilizando el criterio de Bochner podemos concluir que toda función periódica continua es efectivamente casi periódica, el hecho interesante es que el último concepto es más general.

Teorema 1.1.11. *Existe una función casi periódica que no es periódica.*

Demostración. Basta con exhibir un polinomio trigonométrico que no sea una función periódica. Sea

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\pi x}$$

y supongamos que existe un número real $\omega \neq 0$, tal que $f(x+\omega) = f(x)$ para cualquier x, esto es,

$$(e^{i\omega} - 1)e^{ix} + (e^{i\pi\omega} - 1)e^{i\pi x} \equiv 0$$

Pero las funciones e^{ix} y $e^{i\pi x}$ son linealmente independientes, de esta manera ω debe satisfacer las condiciones $e^{i\omega} = e^{i\pi\omega} = 1$, así $\omega = 2k\pi$, $\pi\omega = 2h\pi$, donde k y h son enteros. Sin embargo estas ecuaciones son incompatibles, y el Teorema está probado. $\square$

En distintas reformulaciones de problemas de ecuaciones diferenciales es útil tener la certeza de cuando una integral del tipo

$$F(t) := \int_a^t S(t-s)f(s)\,ds, \quad a \leq t$$

es casi periódica, donde f es una función casi periódica y $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es una familia fuertemente continua de operadores lineales y acotados (ver Definición 1.1.15).
Para ello, primeramente consideraremos $S(t) := Id_X$ y relacionaremos el rango de F con la propiedad de ser casi periódica, para luego enunciar una propiedad que permite asegurar la 'casi periocidad' de F sólo requiriendo que esta sea acotada.

Analizamos el caso particular para una función casi periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

Teorema 1.1.12. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una función casi periódica, entonces la función*

$$F(t) := \int_0^t f(s)\,ds$$

es casi periódica si y sólo si es acotada sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. Primero, note que podemos restringirnos a aquellas funciones a valores reales. En efecto, si $f(t) = f_1(t) - if_2(t)$ es casi periódica, entonces $f_1(t)$ y $f_2(t)$ también lo son y recíprocamente. Definimos

$$F_1(t) := \int_0^t f_1(s)\,ds \text{ y } F_2(t) := \int_0^t f_2(s)\,ds$$

entonces $F(t) = F_1(t) + iF_2(t)$. De esta manera, $F(t)$ es acotada si y sólo si $F_1(t)$ y $F_2(z)$ son acotadas.
Así, sea f una función casi periódica a valores reales tal que

$$m \leq F(t) \leq M, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Si $\varepsilon > 0$, entonces existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$F(t_1) < m + \varepsilon/6, \quad F(t_2) > M - \varepsilon/6.$$

Definamos $d = |t_1 - t_2|$ y sea $l_1 > 0$ un número con la propiedad de que cualquier intervalo real de largo l_1 contiene un $(\varepsilon/6d)-$periódo para la función $f(t)$. Sea $l = l_1 + d$. Demostraremos que cualquier $\varepsilon/2l-$período de $f(t)$ es un $\varepsilon-$período de la función $F(t)$.

Note primero que, cualquier intervalo de largo l en $\mathbb{R}$ contiene dos puntos z_1 y z_2 para los cuales

$$F(z_1) < m + \varepsilon/2, \quad F(z_2) > M - \varepsilon/2. \tag{1.1.2}$$

En efecto, si $\xi = \text{mín}\{t_1, t_2\}$ y τ es un $(\varepsilon/6d)-$período de $f(t)$ tal que $\xi + \tau \in (\alpha, \alpha + l_1)$, entonces los números $z_1 = t_1 + \tau$ y $z_2 = t_2 + \tau$ están en $(\alpha, \alpha + l)$.
Tenemos

$$\begin{aligned}
F(z_2) - F(z_1) &= F(t_2) - F(t_1) + \int_{z_1}^{z_2} f(s)\,ds - \int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds \\
&= F(t_2) - F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \{f(s+\tau) - f(s)\}\,ds \\
&\geq F(t_2) - F(t_1) - d\varepsilon/6d \\
&> M - m - 2\varepsilon/6 - \varepsilon/6 \\
&= M - m - \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Esta desigualdad es válida si y sólo si se tiene la desigualdad (1.1.2).
Considere ahora un $(\varepsilon/2l)-$período de $f(t)$, digamos η.
Demostraremos que

$$|F(t+\eta) - F(t)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1.3}$$

De hecho, dado que t es un número real fijo, escogemos un número z_1 en el intervalo $(t, t+l)$ con la propiedad (1.1.2). Obtenemos

$$\begin{aligned}
F(t-\eta) - F(t) &= F(z_1+\eta) - F(z_1) - \int_{t}^{t+\eta} f(s)\,ds - \int_{z_1}^{z_1+\eta} f(s)\,ds \\
&= F(z_1+\eta) - F(z_1) - \int_{t}^{z_1} f(s)\,ds - \int_{t+\eta}^{z_1+\eta} f(s)\,ds \\
&\geq m - (m+\varepsilon/2) - \left| \int_{t}^{z_1} \{f(s+\eta) - f(s)\}\,ds \right| \\
&> -\varepsilon/2 - l\varepsilon/2l = -\varepsilon.
\end{aligned}$$

Análogamente obtenemos las desigualdad

$$F(t-\eta) - F(t) < \varepsilon$$

y probamos (1.1.3) con lo que finaliza la prueba del Teorema. $\square$

Para los próximos dos teoremas note las condiciones sobre el espacio de Banach X y el rango de la función $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Se provee las referencias de las respectivas demostraciones.

Teorema 1.1.13 ([18, pág. 177, Teorema 6.19]). *Sea X un espacio de Banach. Para $f : \mathbb{R} \to X$ casi periódica definimos:*

$$F(t) := \int_0^t f(s)\,ds.$$

Si el conjunto imagen de F es relativamente compacto en X, entonces F es casi periódica.

Teorema 1.1.14 (([18, pág. 179, Teorema 6.20])). *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Para $f : \mathbb{R} \to X$ casi periódica definimos*

$$F(t) := \int_0^t f(s)\,ds.$$

Entonces, F es casi periódica si y sólo es acotada.

Utilizaremos la notación $\mathcal{B}(X)$ para denotar al espacio de operadores de X en X que sean lineales y acotados.

Definición 1.1.15. *Una familia de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se dice fuertemente continua si la función $t \mapsto S(t)x$ es continua para cada $x \in X$.*

La siguiente definición será utilizada en diferentes oportunidades.

Definición 1.1.16. *Diremos que una familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fuertemente continua es integrable si*

$$\|S\| := \int_0^\infty \|S(\tau)\|\,d\tau < \infty.$$

Consideramos ahora el caso en que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es una familia fuertemente continua.

Lema 1.1.17 (de integración). *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ una familia integrable fuertemente continua. Si $f : \mathbb{R} \to X$ es una función casi periódica, entonces $F : \mathbb{R} \to X$ definida por*

$$F(t) := \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s)\,ds$$

es casi periódica.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R} \to X$ casi periódica. La casi periocidad de f significa que para $\varepsilon > 0$ existe un $T > 0$ tal que cada subintervalo de $\mathbb{R}$ de largo T contiene al menos un punto h tal que $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t+h) - f(t)|| \leq \varepsilon$. Ahora

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} ||F(t+h) - F(t)|| &= \sup_{t\in\mathbb{R}} || \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[f(s+h) - f(s)]ds|| \\
&\leq ||S|| \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t+h) - f(t)|| \leq \epsilon ||S||,
\end{aligned}
$$

y entonces, F tiene la misma propiedad que f, i.e, es casi periódica.

□

Observación 1.1.18. *Si en el lema anterior sólo consideramos que $f \in BC(X)$ entonces $F(t)$ es una función bien definida y continua sobre $\mathbb{R}$.*

Extendemos el concepto de funciones casi periódicas a funciones definidas sobre un producto cartesiano $\mathbb{R} \times X$.

Definición 1.1.19. *Sea $f : \mathbb{R} \times X \to X$ una función continua. Diremos que f es casi periódica en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ si dada una sucesión $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales existe una subsucesión (s_n) tal que*

$$
\lim_{n\to\infty} f(t + s_n, x) := g(t, x),
$$

está bien definido para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $x \in X$ y además la convergencia del límite es uniforme en t.

Observación 1.1.20. *Por el criterio de Bochner la definición anterior es equivalente a la Definición 1.1.1 haciendo los cambios correspondientes.*

Definición 1.1.21. *Diremos que una función continua $g : \mathbb{R}\times X \to X$ es de tipo Lipschitz en $x \in X$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$ con constante L si para cada par $x, y \in X$ se tiene que*

$$
\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.
$$

Cada vez que una función g satisfaga la definición anterior, por simplicidad, sólo diremos que g es de tipo Lispschitz.

Lema 1.1.22 (de composición). *Sea $f : \mathbb{R} \times X \to X$ una función de tipo Lipschitz casi periódica en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to X$ casi periódica. Entonces la función $F : \mathbb{R} \to X$ definida por $F(t) = f(t, \varphi(t))$ es casi periódica.*

Demostración. Ver [47, pág 38, Teorema 1.69]. □

El siguiente teorema es una aplicación directa de los dos últimos lemas.

Teorema 1.1.23. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ una familia integrable, fuertemente continua. Si $f : \mathbb{R} \to X$ es una función casi periódica y $g : \mathbb{R} \times X \to X$ una función casi periódica en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$, que satisface una condición de tipo Lipschitz uniformemente en $t \in \mathbb{R}$, entonces la función*

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s, f(s))\, ds$$

es casi periódica.

1.2. Funciones casi automórficas

En uno de sus estudios sobre geometría diferencial, Salomón Bochner [10, pp. 238-240] introduce una nueva clase de funciones que se desprende del concepto de *funciones automorfas* y aunque trabaja con ellas no les da un nombre específico. Por otro lado, en 1960, Luigi Amerio [2] prueba un teorema para funciones casi periódicas, adaptando la demostración de un teorema de U. Dini sobre sucesiones monótonas de funciones de variable real. Luego, un año más tarde, Bochner [11] fusiona ambos teoremas, para ello utiliza el concepto definido en [10] al cual, en esta ocasión sí nombra, llamándole función casi automórfica.

Definición 1.2.1. *Una función $f : \mathbb{R} \to X$ continua se dice casi automórfica (o función casi automorfa) si para cada sucesión $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales existe una subsucesión (s_n) tal que el límite*

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t + s_n) \text{ existe para cada } t \in \mathbb{R}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} g(t - s_n) = f(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Observación 1.2.2. *Si la convergencia en la definición anterior es uniforme sobre $\mathbb{R}$ entonces f es una función casi periódica por el criterio de Bochner.*
En la definición anterior g es medible pero no necesariamente continua.

De la observación anterior surge el problema de que si las funciones casi automórficas son en realidad un concepto más general que las casi periódicas, Bochner en [12, pág.

2041], dice:
"We don't whether a.a functions are genuinely more general than a.p. functions"

Sin embargo, la prueba de un teorema en el mismo trabajo da la idea de que esto es así. Bochner a continuación menciona:
"But we have arrived at a general type of theorem [...], which applies alternately to a.a. functions and to a.p. functions, but which we can fully demonstrate for a.p. functions only by dealing with the case of a.a. functions first and applying it suitably."

Ya en 1963 W. A. Veech como parte de su tesis doctoral en [55] presenta los primeros ejemplos, demostrables, de funciones casi automórficas que no son periódicas sobre $\mathbb{Z}$. Presentamos uno.
Sea G_1, G_2, ... una sucesión infinita de subgrupos de $\mathbb{Z}$ tales que

$$(i)\, G_1 \text{ es propio en } \mathbb{Z} \quad (ii)\, G_{k+1} \text{ es propio en } G_k \text{ para cada } k$$

Asociamos una sucesión de enteros (a_k) y de conjuntos (A_k) que definimos como sigue. Sea $a_1 = 0$, $A_1 = G_1$, por (i) $A_1 \neq \mathbb{Z}$. Definimos $A_k = a_k + G_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ tales que $\cup_{k=1}^{n} A_k \neq \mathbb{Z}$ y $A_p \cap A_q = \emptyset$, $p \neq q$, donde a_{k+1} es el entero de menor módulo que no esté en $\cup_{k=1}^{n} A_k$. Defina $A_{n+1} = a_{n+1} + G_{n+1}$. Usando (ii) fácilmente se verfica que

$$(a)\, A_{n+1} \cap A_k = \emptyset,\ k = 1, 2, \ldots, n \quad (b)\ \cup_{k=1}^{n+1} A_k \neq \mathbb{Z}.$$

Por la elección de a_{n+1} la sucesión (A_k) satisface

$$(c)\ \cup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{Z}.$$

Tomamos la sucesión de funciones (f_k) tales que para cada k es casi automorfa sobre G_k, con $\sup_k \|f_k\| < \infty$, donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo.
Definimos la función $f(s)$ sobre $\mathbb{Z}$ por

$$f(s) = f_k(s'),\ s = a_k + s', \quad s' \in G_k.$$

Las propiedades (a) y (c) garantizan que f está bien definida sobre $\mathbb{Z}$. Luego, f es casi automórfica pero no casi periódica.

Posteriormente H. Furstenberg da otro de tales ejemplos que S. Bochner publica en 1964, ver [13]. Un ejemplo clásico y más reciente (ver por ejemplo [22]) de una función casi automórfica pero no casi periódica es el dado por la función

$$f(t) = \cos\left(\frac{1}{2 + \sin(\sqrt{2}t) + \sin(t)}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al conjunto de todas las funciones casi automorfas lo denotamos por $AA(X)$ (por sus siglas del inglés almost automorphic). Note que este es un espacio vectorial.

Proposición 1.2.3. *El espacio vectorial $AA(X)$ dotado de la función*

$$\|f\|_{AA(X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$$

es un espacio normado.

Demostración. Basta con demostrar que $\|f\|_{AA(X)} < \infty$ para cada $f \in AA(X)$.
Sea $f \in AA(X)$, y supongamos que $\|f\|_{AA(X)} = \infty$. Entonces existe una sucesión $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x'_n)\| = \infty.$$

Como f es casi automorfa, podemos obtener una subsucesión (x_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$$

existe, esto es, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(x_n)\| = \|\alpha\| < \infty$ lo cual es una contradicción. □

El siguiente resultado es el análogo al Teorema 1.1.4.

Proposición 1.2.4. *Si $f \in AA(X)$ entonces $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|g\| = \|f\|_{AA(x)}$, donde g es la función de la Definición 1.2.1, y el conjunto imagen de f es relativamente compacto.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R} \to X$ una función casi automórfica y $t \in \mathbb{R}$, luego para cada sucesión $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ existe una subsucesión (s_n) tal que $\lim_{n\to\infty} f(t + s_n) = g(t)$. Note que

$$\|f(t + s_n)\| \leq \|f\|_{AA(X)}, \text{ para cada } t \in \mathbb{R},$$

luego

$$\|g(t)\| = \|\lim_{t\to\infty} f(t + s_n)\| \leq \|f\|_{AA(X)} \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

De la misma manera

$$\|g(t - s_n)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\|, \text{ para cada } t \in \mathbb{R},$$

y dado que $\lim_{n\to\infty} g(t - s_n) = f(t)$ se sigue que

$$\|f(t)\| = \|\lim_{t\to\infty} g(t - s_n)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Esto es, $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|g\| = \|f\|_{AA(x)}$.
Por otro lado, si $t = 0$ tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} f(s_n) = g(0),$$

por lo tanto el conjunto imagen de f es relativamente compacto. □

El siguiente teorema muestra que $AA(X)$ es un espacio cerrado en $BC(X)$.

Teorema 1.2.5. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones casi automorfas tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ uniformemente sobre $\mathbb{R}$. Entonces f es casi automórfica.*

Demostración. Sea $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números reales, por el método de diagonalización para sucesiones podemos extraer una subsucesión (s_n) de $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(t+s_n) := g_i(t),$$

para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $t \in \mathbb{R}$.

La sucesión $(g_i(t))_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto:

$$g_i(t) - g_j(t) = g_i(t) - f_i(t+s_n) + f_i(t+s_n) - f_j(t+s_n) + f_j(t+s_n) - g_j(t), \quad (1.2.1)$$

luego

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \|g_i(t) - f_i(t+s_n)\| + \|f_i(t+s_n) - f_j(t+s_n)\| + \|f_j(t+s_n) - g_j(t)\|.$$

Sea $\varepsilon > 0$, por la convergencia uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i,\, j > N$ se tiene que

$$\|f_i(t+s_n) - f_j(t+s_n)\| < \varepsilon$$

y por (3.3.1) se sigue que $\|g_i(t) - g_j(t)\| < \varepsilon$.
Considerando esto, y dado que X es un espacio de Banach, se sigue que $(g_i(t))_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente. Luego, definimos

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) := g(t).$$

Probaremos que $\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t)$. Sea

$$\|f(t+s_n) - g(t)\| \leq \|f(t+s_n) - f_i(t+s_n)\| + \|f_i(t+s_n) - g_i(t)\| + \|g_i(t) - g(t)\|.$$

Para $\varepsilon > 0$ dado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(t+s_n) - f_M(t+s_n)\| < \varepsilon \text{ y } \|g_M(t) - g(t)\| < \varepsilon \text{ para cada } t \in \mathbb{R} \text{ y } n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Así

$$\|f(t+s_n) - g(t)\| < 2\varepsilon + \|f_M(t+s_n) - g_M(t)\|, \text{ para cada } t \in \mathbb{R} \text{ y } n = 1,\, 2,\, \ldots$$

De esta manera, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $K := K(t, M) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_M(t+s_n) - g_M(t)\| < \varepsilon$ para todo $n > K$. Por lo tanto $\|f(t+s_n) - g(t)\| < \varepsilon$, para cada $\varepsilon > 0$ y $n \geq N_0 := N_0(t, \varepsilon)$.
Análogamente se prueba que $\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t)$. $\square$

Finalmente podemos obtener el siguiente teorema.

Teorema 1.2.6. *El espacio vectorial $AA(X)$ dotado de la norma $\|f\|_{AA(X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f\|$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones casi automorfas tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_n(t) - f(t)\| = 0,$$

es decir, (f_n) converge a f uniformemente. Luego, por el teorema anterior f es casi automórfica, así $AA(X)$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach $BC(X)$. Por lo tanto $AA(X)$ es un espacio de Banach. $\square$

Tal como en el caso de funciones casi periódicas, nos interesa estudiar funciones del tipo

$$F(t) := \int_a^t S(t-s)f(s)\,ds \quad a \leq t,$$

donde f es una función en $AA(X)$ y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia fuertemente continua de operadores, con el objetivo de asegurar que F es una función casi automórfica. Consideraremos en primer lugar la familia $t \mapsto Id_X x$ para cada $t \in \mathbb{R}$, y posteriormente daremos hipótesis sobre el rango de F y el espacio de Banach X sobre el cual f está definida .

En el próximo teorema usamos la siguiente notación introducida por Bochner.

Notación 1.2.7. *Si $f : \mathbb{R} \to X$ es una función y una sucesión de numeros reales $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t + s_n) = g(t),$$

puntualmente sobre $\mathbb{R}$, entonces escribimos $T_s f = g$.

Observación 1.2.8. *i) T_s es un operador lineal. En efecto, sea $(s_n) \subset \mathbb{R}$ una sucesión fija. El dominio de T_s es $D(T_s) = \{f : \mathbb{R} \to X : T_s f \text{ existe}\}$. Note que $D(T_s)$ es un subespacio vectorial. Entonces, $T_s(f_1 + f_2) = T_s f_1 + T_s f_2$ y $T_s(\lambda f) = \lambda T_s f$, para cada $f_1, f_2, f \in D(T_s)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.*

ii) Si escribimos $-s = (-s_n)$ y suponemos que $f \in D(T_s)$ y que $T_s f \in D(T_{-s})$. Entonces, el operador producto *$A_s = T_{-s}T_s$ está bien definido. Note que A_s es un operador lineal.*

iii) A_s *lleva funciones acotadas en funciones acotadas, y para cada función casi automórfica* f*, tenemos que* $A_s f = f$*.*

El siguiente resultado es el análogo del Teorema 1.1.13.

Teorema 1.2.9. *Sea* $f : \mathbb{R} \to X$ *una función casi automorfa y considere la función* $F : \mathbb{R} \to X$ *definida por*

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$$

Entonces F *es casi automorfa si y sólo si su conjunto imagen* $R_F = \{F(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *es relativamente compacto en* X*.*

Demostración. Es suficiente probar que $F(t)$ es casi automorfa si R_F es relativamente compacto. Sea $(s''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Como f es casi automórfica existe una subsucesión (s'_n) tal que

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t + s'_n), \quad \lim_{n\to\infty} g(t - s'_n) = f(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Dado que R_F es relativamente compacto se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} F(s'_n) = \alpha_1,$$

para algún $\alpha_1 \in X$. Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} F(t + s'_n) = \int_0^{t+s'_n} f(r)\, dr &= \int_0^{s'_n} f(r)\, dr + \int_{s'_n}^{t+s'_n} f(r)\, dr \\ &= F(s'_n) + \int_{s'_n}^{t+s'_n} f(r)\, dr. \end{aligned}$$

Usando la sustitución $\sigma = r - s'_n$, obtenemos

$$F(t + s'_n) = F(s'_n) + \int_0^t f(\sigma + s'_n)\, d\sigma.$$

Al aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} F(t + s'_n) = \alpha_1 + \int_0^t g(\sigma)\, d\sigma,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Observe que el rango de la función $G(t) = \alpha_1 + \int_0^t g(r)\, dr$ también es relativamente compacto y además

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|G(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t)\|.$$

De esta manera podemos extraer una subsucesión (s_n) de (s'_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} G(-s_n) = \alpha_2,$$

para algún $\alpha_2 \in X$.
Al escribir

$$G(t - s_n) = G(-s_n) + \int_0^t g(r - s_n),\, dr$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} G(t - s_n) = \alpha_2 + \int_0^t f(r)\, dr = \alpha_2 + F(t).$$

Probaremos que $\alpha_2 = 0$.
Usando la notación (1.2.7) tenemos que

$$A_s F = \alpha_2 + F, \text{ donde } s = (s_n).$$

Es fácil ver que tanto F como α_2 están en el dominio de T_s, además T_s también está en el dominio de T_s y se obtiene

$$A_s^2 F = A_s\alpha_2 + A_s F = \alpha_2 + \alpha_2 + F = 2\alpha_2 + F.$$

De esta manera se tiene que

$$A_s^n F = n\alpha_2 + F, \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots.$$

Pero tenemos que

$$\|A_s^n F\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_s^n F(t)\| \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t)\| = \|F\|, \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots,$$

donde $F(t)$ es una función acotada.
Esto es una contradicción para $\alpha_2 \neq 0$. Entonces, $\alpha_2 = 0$ y $A_s F = F$, esto es, F es casi automórfica. □

La prueba del siguiente teorema, aunque sencilla, es bastante extensa por ello sólo nos remiteremos a enunciar el resultado y proporcionar la referencia de la demostración.

Teorema 1.2.10 ([46, pág. 29, Teorema 2.4.6]). *Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea $f \in AA(X)$, entonces la función*

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

es casi automorfa si y sólo si es acotada.

En lo que sigue consideramos una familia fuertemente continua de operadores lineales y acotados $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ arbitraria. El siguiente lema establece condiciones sobre $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ y $f:\mathbb{R}\to X$ para que la función $F(t)=\int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)\,ds$ sea casi automórfica.

Lema 1.2.11 (de integración). *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}\subset \mathcal{B}(X)$ una familia integrable, fuertemente continua. Si $f:\mathbb{R}\to X$ es una función casi automórfica, entonces $F:\mathbb{R}\to X$ definida por*

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)\,ds$$

es casi automórfica.

Demostración. Sea $(s_n')_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Dado que $f\in AA(X)$ existe una subsucesión $(s_n)\subset (s_n')_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) := g(t), \quad \lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t),$$

para todo $t\in\mathbb{R}$. Definamos

$$G(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(r)\,dr$$

y consideremos

$$\begin{aligned} F(t+s_n) &= \int_{-\infty}^{t+s_n} S(t+s_n-r)f(r)\,dr \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-r)f(r+s_n)\,dr. \end{aligned}$$

Note que

$$\|F(t+s_n)\| \leq \|S\|\|f\|_\infty$$

y por continuidad de $S(\cdot)x$ tenemos que $S(t-r)f(r+s_n)\to S(t-r)g(r)$, si $n\to\infty$ para cada $t\geq r$ fijo. Así, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$F(t+s_n)\to G(t),\ n\to\infty,\ \text{para cada } t\in\mathbb{R}.$$

Análogamente se prueba que

$$G(t-s_n)\to F(t),\ n\to\infty,\ \text{para cada } t\in\mathbb{R}.$$

□

Extendemos el concepto de funciones casi automórficas a funciones definidas sobre un producto cartesiano $\mathbb{R}\times X$.

Definición 1.2.12. *Sea $f : \mathbb{R} \times X \to X$ una función continua. Se dice que f es casi automorfa en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ si dada una sucesión $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales existe, una subsucesión (s_n) tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t + s_n, x) := g(t, x),$$

está bien definido para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $x \in X$ y además

$$\lim_{n\to\infty} g(t - s_n) = f(t, x).$$

El resultado que se presenta a cotinuación será de utilidad en el capítulo 3 (ver Teorema 3.4.1).

Lema 1.2.13 (de composición). *Sea $f : \mathbb{R} \times X \to X$ una función casi automórfica en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$, y asuma que f es de tipo Lipschitz. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to X$ casi automórfica. Entonces la función $F : \mathbb{R} \to X$ definida por $F(t) = f(t, \varphi(t))$ es casi automórfica.*

Demostración. Sea $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Como f y φ son funciones casi automórficas podemos obtener una subsucesión $(t_n) \subset (t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to\infty} f(t + t_n, x) = g(t, x) \quad , & \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t + t_n) = \phi(t), \\ \lim\limits_{n\to\infty} g(t - t_n, x) = f(t, x) \quad , & \lim\limits_{n\to\infty} \phi(t - t_n) = \varphi(t), \end{array}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.
Consideremos la función $G : \mathbb{R} \to X$ definida por $G(t) = g(t, \phi(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Demostraremos que $\lim_{n\to\infty} F(t + t_n) = G(t)$ y que $\lim_{n\to\infty} G(t - t_n) = F(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. En efecto, escribimos

$$F(t + t_n) - G(t) = f(t + t_n, \varphi(t + t_n)) - f(t + t_n, \phi(t)) + f(t + t_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t)).$$

Entonces

$$\|F(t + t_n) - G(t)\| \leq L\|\varphi(t + t_n) - \phi(t)\| + \|f(t + t_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t))\|.$$

De esta manera se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} F(t + t_n) = G(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Análogamente se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} G(t - t_n) = F(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, lo que completa la demostración de que F es casi automorfa. □

El siguiente teorema es una aplicación directa de los dos últimos lemas.

Teorema 1.2.14. *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ *una familia integrable, fuertemente continua. Si* $f : \mathbb{R} \to X$ *es una función casi automórfica y* $g : \mathbb{R} \times X \to X$ *una función casi automorfa en* $t \in \mathbb{R}$ *para cada* $x \in X$*, que satisface una condición de tipo Lipschitz uniformemente en* $t \in \mathbb{R}$*, entonces la función*

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s, f(s))\, ds$$

es casi automórfica.

1.3. Funciones casi automórficas compactas

Para 1968, A. M. Fink en [24] busca soluciones casi periódicas para la ecuación

$$x' = F(t, x). \tag{1.3.1}$$

En tal trabajo, reconoce que la mayoría de las publicaciones que dan condiciones para la existencia y unicidad de soluciones casi periódicas de la ecuación (1.3.1) son en términos de *estabilidad* o de un resultado previo de Amerio [1]. Él, en cambio, tal como lo hizo Favard [23], obtiene tales condiciones minimizando cierto funcional.
Para esto, define el concepto de función casi automórfica compacta que es el tema que ahora nos ocupa.

Definición 1.3.1. *Una función* $f : \mathbb{R} \to X$ *continua se dice casi automórfica compacta si para cada sucesión de números reales* $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existe una subsucesión* (s_n) *tal que los límites*

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n) \;\; y \;\; \lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t),$$

existen para cada $t \in \mathbb{R}$ *y la convergencia es uniforme sobre cada subcojunto compacto en* $\mathbb{R}$*.*

Se verifica fácilmente que el conjunto de las funciones casi automorfas compactas es un espacio vectorial. A este espacio lo denotamos por $AA_c(X)$ (por sus siglas del inglés compact almost automorphic).

Observación 1.3.2. *Note que* $AA_c(X) \subset AA(X)$ *luego, si dotamos al espacio vectorial* $AA_c(X)$ *con la función*

$$\|f\| := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$$

este es un espacio normado. Además, cada f *casi automórfica compacta tiene rango relativamente compacto.*

Teorema 1.3.3. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones casi automorfas compactas tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ *uniformemente sobre* $\mathbb{R}$*. Entonces* f *es casi automórfica compacta.*

Demostración. Note que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset AA(X)$ y dado que esta sucesión converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a f, por Teorema 1.2.5 f es casi automorfa. Esto es, para cada sucesión $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión (s_n) tal que

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n) \text{ y } \lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t),$$

existen y están bien definidos sobre $\mathbb{R}$. Sólo resta probar que estas convergencias son uniformes sobre cada subconjunto compacto en $\mathbb{R}$.

De la demostración del Teorema 1.2.5 tenemos que cada para $f_i(t)$ los límites

$$g_i(t) := \lim_{n\to\infty} f_i(t+s_n) \text{ y } \lim_{n\to\infty} g_i(t-s_n) = f_i(t),$$

existen y están bien definidos sobre $\mathbb{R}$. En nuestro caso particular estas convergencias son uniformes sobre cada subconjunto compacto en $\mathbb{R}$. Además, en aquella demostración se obtuvo que

$$\lim_{i\to\infty} g_i(t) = g(t)$$

puntualmente sobre $\mathbb{R}$.
Probaremos que para cada subcojunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sup_{t\in K} \|g_i(t) - g_j(t)\| < \varepsilon,$$

para $\varepsilon > 0$ dado e $i, j > N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.
En efecto, tenemos que

$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \leq \|g_i(t) - f_i(t+s_n)\| + \|f_i(t+s_n) - f_j(t+s_n)\| + \|f_j(t+s_n) - g_j(t)\|.$$

Lo que implica que si $t \in K$ y $\varepsilon > 0$ es dado, existe $N \in \mathbb{N}$, que sólo depende de ε, tal que $\|g_i(t) - g_j(t)\| < \varepsilon$ uniformemente sobre K.
Así, $\lim_{i\to\infty} g_i(t) = g(t)$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto en $\mathbb{R}$. La demostración se concluye siguiendo la línea de la prueba del Teorema 1.2.5. □

La prueba del siguiente teorema es consecuencia directa del anterior.

Teorema 1.3.4. *El espacio normado* $AA_c(X)$ *es un espacio de Banach.*

Siguiendo la línea de las últimas dos secciones consideremos la función

$$F(t) := \int_a^t S(t-s)f(s)\,ds, \quad a \leq t,$$

donde f es una función casi automórfica compacta y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia fuertemente continua.

Observación 1.3.5. *Aunque las funciones casi automórficas compactas son un tópico de mediados del siglo XX han sido estudiadas en profundidad sólo en los últimos años, a modo de ejemplo note que no se ha analizado el hecho de cuando*

$$\int_a^t f(s)\,ds, \quad a \geq t,$$

es casi automórfica compacta, para $f \in AA_c(X)$.

Para que el siguiente lema note que basta que una familia fuertemente continua de operadores lineales y acotados, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, sea integrable para que la función $F(t)$, definida como arriba, esté en $AA_C(X)$.

Lema 1.3.6 (de integración). *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ una familia integrable, fuertemente continua. Si $f : \mathbb{R} \to X$ es casi automorfa compacta, entonces la función $F : \mathbb{R} \to X$ definida por*

$$F(t) := \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s)\,ds$$

es casi automorfa compacta.

Demostración. Sea $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, dado que f está en $AA_c(X)$ existe una subsucesión (s_n) tal que los límites

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n) \text{ y } \lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t),$$

existen para cada $t \in \mathbb{R}$ y la convergencia es uniforme sobre cada subcojunto compacto en $\mathbb{R}$. Dado que

$$F(t+s_n) = \int_{-\infty}^{t+s_n} S(t+s_n-s)f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s+s_n)\,ds$$

entonces, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que $F(t+s_n)$ converge a

$$G(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)g(s)\,ds$$

cuando $n \to \infty$, para cada $t \in \mathbb{R}$. La convergencia anterior es uniforme sobre conjuntos compactos. En efecto,
sea $K = [-a, a]$. Para $\varepsilon > 0$ dado, existen L_ε y $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} \int_{L_\varepsilon}^{\infty} \|S(s)\| \, ds &\leq \varepsilon, \\ \|f(s+s_n) - g(s)\| &\leq \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon, \, s \in [-L, L], \end{aligned}$$

donde $L = L_\varepsilon + a$. Para $t \in K$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|F(t+s_n) - G(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\| \|f(s+s_n) - g(s)\| \, ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{-L} \|S(t-s)\| \|f(s+s_n) - g(s)\| \, ds \\ &\quad + \int_{-L}^{t} \|S(t-s)\| \|f(s+s_n) - g(s)\| \, ds \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int_{t+L}^{\infty} \|S(s)\| \, ds + \varepsilon \int_{0}^{\infty} \|S(s)\| \, ds \\ &\leq \varepsilon(2\|f\|_\infty + \|S\|), \end{aligned}$$

lo que prueba que la convergencia es independiente de la elección de $t \in K$. Análogamente se prueba que $G(t - s_n)$ converge a $F(t)$ cuando $n \to \infty$ uniformemente para sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}$. □

Extendemos la noción de función casi automórfica compacta para funciones del tipo $f : \mathbb{R} \times X \to X$.

Definición 1.3.7. *Diremos que una función continua $f : \mathbb{R} \times X \to X$ es casi automorfa compacta si $f(t, x)$ es casi automórfica en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$ y además la convergencia de los límites*

$$\lim_{n\to\infty} f(t + s_n, x) := g(t, x) \ \ y \ \lim_{n\to\infty} g(t - s_n, x) = f(t, x).$$

es uniforme sobre cada $K \subset \mathbb{R}$ compacto.

Para enfatizar, nuevamente, el reciente estudio de las funciones casi automórficas compactas enunciamos el siguiente lema, su demostración puede ser encontrada en el artículo [19, pág 4, Lema 2.1] del año 2007.

Lema 1.3.8 (de composición). *Sea $f : \mathbb{R} \times X \to X$ una función de tipo Lipschitz casi automórfica compacta en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to X$ casi automórfica compacta. Entonces la función $F : \mathbb{R} \to X$ definida por $F(t) = f(t, \varphi(t))$ es casi automórfica compacta.*

Observación 1.3.9. *Se han hecho algunas modificaciones al enunciado del lema anterior para adaptarlo al objetivo principal del trabajo presente.*

El siguiente teorema es consecuencia directa de los últimos dos lemas.

Teorema 1.3.10. *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ *una familia integrable, fuertemente continua. Si* $f : \mathbb{R} \to X$ *es una función casi automórfica compacta y* $g : \mathbb{R} \times X \to X$ *una función casi automorfa compacta en* $t \in \mathbb{R}$ *para cada* $x \in X$*, que satisface una condición de tipo Lipschitz uniformemente en* $t \in \mathbb{R}$*, entonces la función*

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s, f(s))\, ds$$

es casi automórfica compacta.

1.4. Funciones asintóticamente casi automórficas

Denotamos por $C_0(X)$ al espacio de las funciones continuas y acotadas $h : \mathbb{R}^+ \to X$ tales que $\lim\limits_{t\to\infty} \|h(t)\| = 0$.

Una función continua $f : \mathbb{R}^+ \to X$ se dice asintóticamente casi periódica si f puede ser escrita como $f = g + h$, donde $g \in AP(X)$ y $g \in C_0(X)$. Es bien conocido que si el problema

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1.4.1}$$

posee una solución asintóticamente casi periódica sobre $0 < t < \infty$ entonces existe una solución casi periódica sobre $-\infty < t < \infty$ para (1.4.1). En 1981 Gaston M. N'Gúeréka-ta en [44] persigue un objetivo en concreto: generalizar el resultado anterior a funciones casi automorfas. Lo realiza extendiendo naturalmente el concepto de funciones asintóticamente casi periódicas a un nuevo concepto que llama, como era de esperar, funciones asintóticamente casi automórficas. Lo presentamos a continuación.

Definición 1.4.1. *Sea* $f : \mathbb{R}^+ \to X$ *una función continua. Diremos que* f *es asintóticamente casi automórfica si*

$$f \in AA(X) \oplus C_0(X).$$

Al conjunto de todas las funciones asintóticamente casi automorfas lo denotaremos por $AAA(X)$ (por sus siglas del inglés asymptotically almost automorphic), esto es, $AAA(X) = AA(X) \oplus C_0(X)$.

Observación 1.4.2. *En [46] se probó que si* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es una función que puede ser escrita como* $f = g + h$ *donde* $g \in AA(X)$ *y* $h \in C_0(X)$, *entonces ésta descomposición es única. Esto hace que el concepto introducido en la Definición 1.4.1 sea consistente.*

Sea $f \in AAA(X)$ entonces podemos escribir f como

$$f = g + h, \quad g \in AA(X),\, h \in C_0(X).$$

A la función g la llamaremos *parte principal* y a h *parte correctiva* de la función f.

Observación 1.4.3. *Cada función* $f : \mathbb{R} \to X$ *casi automórfica restringida a* $\mathbb{R}^+$ *es asintóticamente casi automorfa, basta elegir* $h \equiv 0$, *de esta manera se tiene que* $AA(X) \subset AAA(X)$.

Observación 1.4.4. *El conjunto* $AAA(X)$ *es un espacio vectorial.*

La demostración de la siguiente proposición es obvia.

Proposición 1.4.5. *El espacio vectorial* $AAA(X)$ *dotado de la función*

$$\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|f(t)\|$$

es un espacio normado.

Dado que $AAA(X)$ es un espacio vectorial normado podemos formular el siguiente teorema.

Teorema 1.4.6. *El espacio normado* $AAA(X)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $AAA(X)$. Entonces los términos principales g_n, de cada f_n, forman una sucesión de Cauchy en $AA(X)$ y por el Teorema 1.2.6 se sigue que existe $g \in AA(X)$ tal que $\lim_{n \to \infty} g_n = g$.
Más aún, los términos correctivos h_n, de cada f_n, támbien forman una sucesión de Cauchy sobre el espacio BC(X). Entonces, existe $h(t) \in BC(X)$ tal que $\lim_{n \to \infty} h_n(t) = h(t)$. Note que $h(t) = h(t) - h_n(t) + h_n(t)$, esto es $h(t) \in C_0(X)$. Por lo tanto, si definimos $f(t) = g(t) + h(t)$ tenemos que $f \in AAA(X)$ y $f_n(t) \to f$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Tal como en el caso de funciones casi automorfas estudiaremos funciones del tipo:

$$F(t) := \int_a^t S(t-s) f(s)\, ds \quad a \leq t,$$

donde f es una función en $AAA(X)$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es una familia fuertemente continua.
Primero consideramos $S(t)x := Id_X x$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.4.7. *Sea X un espacio de Banach y $f \in AAA(X)$. Considere la función $F : \mathbb{R}^+ \to X$ definida por*

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

y la función $G : \mathbb{R} \to X$ definida por

$$G(t) = \int_0^t g(s)\, ds,$$

donde g es el término principal de f. Asuma que G tiene rango relativamente compacto en X y que $\int_0^\infty \|h(t)\|\, dt < \infty$, donde h es el término correctivo de f. Entonces F es asintóticamente casi automorfa.

Demostración. Dado que $g \in AA(X)$ y que G tiene rango relativamente compacto en X se sigue del Teorema 1.2.9 que G es casi automorfa, luego

$$M(t) := G(t) + \int_0^\infty h(s)\, ds$$

también lo es.
Note que $M(t)$ está bien definida puesto que

$$\|M(t)\| \leq \|G\| + \int_0^\infty \|h(s)\|\, ds < \infty.$$

Ahora bien, dado que h es continua se sigue que

$$H(t) := -\int_t^\infty h(s)\, ds$$

es continua. Además por el Teorema de Beppo Levi tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \|H(t)\| = \left\| \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty h(s)\, ds \right\| = 0.$$

Finalmente, note que podemos escribir $F(t) = M(t) + H(t)$, esto es, F es asintóticamente casi automorfa. □

La prueba del siguiente corolario es idéntica a la del teorema anterior considerando en este caso el Teorema 1.2.10.

Corolario 1.4.8. *Sea X uniformemente convexo y $f \in AAA(X)$. Considere las funciones F y G definidas como arriba. Asuma que G tiene rango acotado en X y además suponga que $\int_0^\infty \|h(t)\|\, dt < \infty$, donde h es el término correctivo de f. Entonces F es asintóticamente casi automorfa.*

Consideramos ahora el caso en que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es una familia fuertemente continua.

Lema 1.4.9 (de integración). *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ una familia integrable, fuertemente continua. Si $f : \mathbb{R}^+ \to X$ es una función asintóticamente casi automórfica, entonces $F : \mathbb{R}^+ \to X$ definida por*

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)\,ds$$

es asintóticamente casi automórfica.

Demostración. Como $f \in AAA(X)$ entonces $f = g + h$ donde g y h son sus términos principal y correctivo respectivamente. Escribimos $F(t)$ como

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s)\,ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)h(s)\,ds,$$

y definimos

$$F_1(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s)\,ds \text{ y } F_2(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)h(s)\,ds$$

Dado que g es casi automórfica tenemos que $F_1(t)$ también lo es por el Lema 1.2.11. Ahora bien, sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $T > 0$ tal que $\|h(t)\| < \varepsilon$ para cada $t > T$. Así, escribimos

$$F_2(t) = \int_{-\infty}^{T} S(t-s)h(s)\,ds + \int_{T}^{t} S(t-s)h(s)\,ds$$

y por ende

$$\|F_2(t)\| \leq \|h\|_\infty \int_{t-T}^{\infty} \|S(v)\|\,dv + \varepsilon\|S\|.$$

De esta manera se sigue que $\|F_2(t)\| \to 0$ cuando $t \to \infty$, lo que completa la prueba del Lema. □

Extendemos el concepto de funciones asintóticamente casi automórficas a funciones definidas sobre un producto cartesiano $\mathbb{R} \times X$.

Denotamos por $C_0(\mathbb{R}^+ \times X, X)$ al conjunto de las funciones $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ continuas y acotadas tal que $\lim_{t\to\infty} ||f(t,x)|| = 0$ uniformemente sobre cualquier subconjunto acotado de X.

Definición 1.4.10. *Una función continua $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ se dice asintóticamente casi automorfa si*

$$f \in AA(\mathbb{R} \times X; X) \oplus C_0(\mathbb{R}^+ \times X; X)$$

Para verificar que la descomposición $f = g + h$ con $g \in AA(\mathbb{R} \times X; X)$ y $h \in C_0(\mathbb{R}^+ \times X; X)$ es única basta seguir las líneas de la demostración de [46, Teorema 2.5.4, p. 37]

El siguiente lema es el análogo de los lemas de composición 1.1.17, 1.2.11, 1.3.6.

Lema 1.4.11 (de composición). *Sea $x(t) \in AAA(X)$ y $f(t,x) = g(t,x) + h(t,x)$ asintóticamente casi automorfa donde $g \in AA(\mathbb{R} \times X; X)$, $h \in C_0(\mathbb{R}^+ \times X; X)$ y g es una función de tipo Lipschitz, entonces $f(\cdot, x(\cdot))$ es asintóticamente casi automorfa.*

Demostración. Dado que $x(t) \in AAA(X)$ entonces $x(t) = \alpha(t) + \beta(t)$, donde $\alpha(t) \in AA(X)$ y $\|\beta(t)\| \to 0$, si $t \to \infty$. Note que

$$f(t,x(t)) = g(t,\alpha(t)) + f(t,x(t)) - g(t,\alpha(t)) = g(t,\alpha(t)) + g(t,x(t)) - g(t,\alpha(t)) + h(t,x(t)).$$

Por Lema 1.2.13 tenemos que $g(t,\alpha(t))$ es casi automorfa.
Por otro lado, la continuidad uniforme de $g(t,\cdot)$ implica que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|g(t,x(t)) - g(t,\alpha(t))\| < \varepsilon$ si $x(t), \alpha(t) \in K$ y $\|x(t) - \alpha(t)\| < \delta$.
Dado que $x(t)$ y $\alpha(t)$ son acotadas, existe un conjunto acotado K tal que $x(t)$, $\alpha(t) \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Más aún, para $\delta > 0$ fijo existe $T > 0$ tal que

$$\|x(t) - \alpha(t)\| = \|\beta(t)\| < \delta,$$

para todo $t > T$. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \|g(t,x(t)) - g(t,\alpha(t))\| = 0.$$

Considerando que $\lim\limits_{t\to\infty} \|h(t,x(t))\| = 0$ se tiene que

$$\|g(t,x(t)) - g(t,\alpha(t)) + h(t,x(t))\| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Por lo tanto $f(\cdot, x(\cdot))$ es asintóticamente casi automorfa. $\square$

El siguiente teorema es una aplicación directa de los dos últimos lemas.

Teorema 1.4.12. *Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ una familia integrable, fuertemente continua. Si $f : \mathbb{R} \to X$ es una función asintóticamente casi automórfica y $g : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ una función de tipo Lipschitz, asintóticamente casi automorfa en $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$, entonces la función*

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s) g(s, f(s))\, ds$$

es asintóticamente casi automórfica.

Capítulo 2

Familias resolventes de operadores.

A través de este capítulo desarrollaremos la teoría básica para resolver ecuaciones integrales abstractas del tipo Volterra.

Más precisamente, sea X un espacio de Banach complejo, A un operador lineal en X con dominio $D(A)$ y $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ un núcleo escalar, $a \neq 0$. Consideremos la ecuación

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)\, ds, \quad t \in J, \tag{2.0.1}$$

donde $f \in C(J, X)$, $J = [0, T]$. La ecuación (2.0.1) es llamada ecuación de Volterra.

La alternativa que introduciremos para resolver (2.0.1), es a través del concepto de *ecuación bien planteada*, el cual a su vez, es una extensión del concepto de ecuación bien planteada para problemas de Cauchy abstractos.

Es digno de mencionar que una ecuación de Volterra bien planteada posee una familia de operadores lineales acotados asociada, la que conoceremos por el nombre de *familia resolvente*, esto justifica el título del capítulo.

Para la convolución entre dos funciones usamos la siguiente notación

$$(a * f)(t) = \int_0^t a(t-s)f(s)\, ds, \quad t \in J.$$

El siguiente teorema será de gran utilidad a lo largo del presente capítulo, cuya demostración puede ser encontrada en [6, pág. 106, Corolario 2.8.4].

Teorema 2.0.1 (E. C. Titchmarsh). *Sea* $k \in L^1[0, \tau]$ *con* $0 \in supp(k)$ *y* $f \in L^1([0, \tau], X)$. *Si* $k * f = 0$ *entonces* $f = 0$.

Decimos que una función $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ es un núcleo escalar si para cada $\phi \in C(\mathbb{R}_+, X)$ la suposición $k * \phi = 0$ implica que $\phi \equiv 0$. Note que desde el teoerma de Titchmarsh se tiene que si $0 \in supp(k)$ entonces k es un núcleo escalar.

Cabe destacar que el presente capítulo sigue las líneas de la monografía *Evolutionary Integral Equations and Applications* de J. Prüss [52, pp. 30 - 48].

2.1. Ecuación bien planteada

Uno de los conceptos utilizados para resolver la ecuación de Volterra (2.0.1) es el de *familia resolvente* el cual, a su vez, está estrechamente relacionado con la noción de ecuación *bien planteada*.
A lo largo de esta sección introduciremos estos conceptos y desarrollaremos la teoría necesaria que permita asegurar, por medio de estos, la existencia y unicidad de soluciones para (2.0.1).

A menos que se indique lo contrario asumimos que A es un operador lineal cerrado no acotado en X con dominio $D(A)$ denso en X. Además, asumimos que el conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, es no vacio.

En lo que sigue X_A denota el dominio de A dotado de la norma del gráfico $\|\cdot\|_A$ de A, esto es, $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$. X_A es un espacio de Banach dado que A es cerrado, y densamente definido sobre X.

Las siguientes nociones para (2.0.1) son naturales de definir.

Definición 2.1.1. *Una función $u \in C(J, X)$ es llamada*

a) Solución fuerte de (2.0.1) sobre J si $u \in C(J, X_A)$ y (2.0.1) se satisface sobre J.

b) Solución suave de (2.0.1) sobre J si $a * u \in C(J, X_A)$ y $u(t) = f(t) + A(a * u)(t)$.

c) Solución débil de (2.0.1) sobre J si

$$\langle u(t), x^* \rangle = \langle f(t), x^* \rangle + \langle (a * u)(t), A^* x^* \rangle$$

sobre J, para cada $x^* \in D(A^*)$.

Note que a) implica b) y este a su vez implica c) además dado que $\rho(A) \neq \emptyset$ entonces c) implica b), como veremos más adelante. Pero no necesariamente b) implica a).

En el caso $a(t) \equiv 1$ y $f \in C^1(J, X)$, (2.0.1) es equivalente al problema de Cauchy

$$\dot{u}(t) = \dot{f}(t) + Au(t), \quad u(0) = f(0). \tag{2.1.1}$$

Un momento de reflexión muestra que los conceptos de solución definidos coinciden con aquellos que son usualmente empleados para (2.1.1). Similarmente, si $a(t) \equiv t$ y $f \in C^2(J, X)$, (2.0.1) es equivalente a

$$\ddot{u}(t) = \ddot{f}(t) + Au(t), \quad u(0) = f(0),\, \dot{u}(0) = \dot{f}(0). \tag{2.1.2}$$

Existen dos transformaciones naturales asociadas con (2.0.1). La primera consiste del 'shift exponencial' la cual resulta de la multiplicación de (2.0.1) con $e^{-\omega t}$, entonces $u_\omega(t) = u(t)e^{-\omega t}$ es solución de (2.0.1) considerando $f_\omega(t) = f(t)e^{-\omega t}$ y $a_\omega(t) = a(t)e^{-\omega t}$. De esta manera el núcleo puede ser hecho integrable siempre que $a(t)$ sea de crecimiento exponencial.

La segunda transformación involucra al operador A. Sumamos $\omega a * u$ a ambos lados de (2.0.1) y definimos $v = u + \omega a * u$, así (2.0.1) se transforma en una ecuación de la misma forma, pero con A reemplazado por $A + \omega$, u por v y a por el núcleo resolvente $r = r_\omega$, que es la solución de la ecuación $r + \omega a * r = a$. De esta forma se puede asumir que $0 \in \rho(A)$ siempre que $\rho(A) \neq \emptyset$.

Estas transformaciones pueden ser extendidas al considerar (2.0.1) localmente sobre $\mathbb{R}_+$ sin embargo ellas cambian su comportamiento asintótico.

Definición 2.1.2. *La ecuación (2.0.1) se dice bien planteada si para cada $x \in D(A)$ existe una única solución $u(t, x)$ sobre $\mathbb{R}_+$ de*

$$u(t) = x + (a * Au)(t), \quad t \geq 0, \tag{2.1.3}$$

y si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, entonces $x_n \to 0$ implica que $u(t, x_n) \to 0$ en X, uniformemente sobre intervalos compactos (esta es una extensión directa del concepto de bien planteado para problemas de Cauchy (2.1.1)).

Suponga que la ecuación (2.0.1) es bien planteada. Definimos para cada $t \geq 0$ el operador $S(t) : D(A) \subset X \to X$, por

$$S(t)x = u(t, x), \quad x \in D(A),\, t \geq 0.$$

Un operador $S(t) : D(A) \subset X \to X$ definido como arriba es llamado operador *solución* para la ecuación (2.0.1).

Por unicidad $S(t)$ está bien definido y es lineal para cada $t \geq 0$, $S(0)x = x$ sobre $D(A)$ y, $S(t)x$ es continua sobre $\mathbb{R}_+$, para cada $x \in D(A)$. Mostraremos que $S(t)$ es también uniformemente acotado sobre intervalos compactos.

Para ver esto, asuma lo contrario. Supongamos que existen sucesiones $(t_n) \subset [0, T]$ e $(y_n) \subset D(A)$, $\|y_n\| = 1$, $\|S(t_n)y_n\| \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n = y_n/n \in D(A)$, $x_n \to 0$ y desde la Definición 2.1.2 obtenemos la contradicción

$$1 \leq \|S(t_n)x_n\| = \|u(t_n, x_n)\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Esto es, $S(t)$ es acotado y además admite una extensión sobre todo X, de esta forma $S(t)x$ es continuo para cada $x \in X$.

Por definición de solución fuerte es además claro que el operador solución lleva $D(A)$ en sí mismo. También tenemos que $AS(t)x$ es continua sobre $\mathbb{R}_+$, para cada $x \in D(A)$ y como A es un operador cerrado se sigue que

$$S(t)x = x + a * AS(t)x = x + Aa * S(t)x, \text{ sobre } \mathbb{R}_+.$$

Notar que tanto $S(t)x$ como x están en el dominio de A así,

$$Ran(a * S(t)) \subset D(A).$$

Además,

$$Aa * S(t) = S(t) - I.$$

De esta última igualdad note que $Aa * S(t) = S(t) - I$ es fuertemente continuo sobre $\mathbb{R}_+$, en otras palabras $u(t, x) = S(t)x$ es una solución suave de (2.1.3) para cada $x \in X$.

Observe ahora que las soluciones suaves de (2.1.3) son únicas. En efecto, si $u = Aa * u$ entonces $v = a * u$ es una solución fuerte para $x = 0$ de (2.1.3), luego

$$a * u = a * (Aa * u) = a * A(a * u),$$

y además si $u = Aa * u$ entonces u también es solución fuerte para $x = 0$ de (2.1.3). De esta manera $v = 0$, por la unicidad de soluciones fuertes. Dado que a es un núcleo escalar se sigue que $u = 0$.

Finalmente, vemos que A conmuta con $S(t)$. En efecto, para cada $x \in D(A)$ ambos $u(t, Ax)$ y $Au(t, x)$ son soluciones débiles de (2.1.3) con x reemplazado por Ax, entonces

$$S(t)Ax = Ax + (a * Au)(t) = u(t, Ax) = Au(t, x) = AS(t)x,$$

para cada $x \in D(A)$ y $t \geq 0$. Estas consideraciones llevan a la siguiente definición

Definición 2.1.3. *Una familia $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales acotados es llamada familia resolvente (o bien operador solución) para (2.0.1) si las siguientes condiciones se satisfacen*

(S_1) *$S(t)$ es fuertemente continua sobre $\mathbb{R}_+$ y $S(0) = I$*

(S_2) *$S(t)$ conmuta con A, lo cual significa que $S(t)D(A) \subset D(A)$ y $AS(t)x = S(t)Ax$ para cada $x \in D(A)$ y $t \geq 0$.*

(S_3) *La siguiente ecuación se satisface*

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)x\, ds, \tag{2.1.4}$$

para cada $x \in D(A)$, $t \geq 0$.

Hemos probado hasta ahora que un problema bien planteado (2.0.1) admite una familia resolvente, el recíproco también es cierto.

Proposición 2.1.4. *La ecuación (2.0.1) es bien planteada si y sólo si admite una familia resolvente $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Si este es el caso tenemos además que $Ran(a * S(t)) \subset D(A)$ para cada $t \geq 0$ y*

$$S(t)x = x + A\int_0^t a(t-s)S(s)x\, ds, \quad \textit{para todo } x \in X \; \textit{y } t \geq 0. \tag{2.1.5}$$

Demostración. Queda por demostrar que la existencia de una familia resolvente $S(t)$ implica que (2.0.1) sea bien planteado. Para esto suponga que $S(t)$ es una familia resolvente para (2.0.1).
Entonces, por las propiedades de $S(t)$ la función $u(t) = S(t)x$ es una solución fuerte de (2.1.3) para cada $x \in D(A)$. Probaremos la unicidad.

Sea $v(t)$ otra solución fuerte de (2.1.3), por (S_2) y (S_3) así como por (2.1.3) tenemos que

$$I * v = S * (v - a * Av) = S * x = I * Sx,$$

y derivando se obtiene que $v(t) = S(t)x$.

La dependencia continua de soluciones sobre x se sigue directamente del acotamiento uniforme de $S(t)$ sobre intervalos compactos lo cual es consecuencia de (S_1), por el principio de acotamiento uniforme.

Finalmente dado que $S(t)$ satisface la ecuación (2.1.4) y puesto que A es un operador cerrado se sigue que $Ran(A * S(t)) \subset D(A)$ y, por ende, se tiene que (2.1.5) es válida. $\square$

El siguiente resultado nos da la unicidad para familias resolventes.

Corolario 2.1.5. *La ecuación (2.0.1) admite a lo más una familia resolvente* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Demostración. Si $S_1(t)$ y $S_2(t)$ son ambas familias resolventes para (2.0.1), entonces para $x \in D(A)$ obtenemos

$$I * S_1x = S_2 * (S_1x - a * AS_1x) = S_2 * x = I * S_2x$$

luego $S_1x = S_2x$ para cada $x \in D(A)$, $t \geq 0$ y entonces $S_1(t) = S_2(t)$ por la densidad de $D(A)$. $\square$

Para el caso especial $a(t) = 1$ y $a(t) = t$ mencionados arriba el resolvente $S(t)$ es, respectivamente, el semigrupo generado por A, y la familia coseno generada por A.

Corolario 2.1.6. *Si* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es una familia resolvente para (2.0.1) y* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *entonces* $Ran(a * S(\cdot) * g) \subset D(A)$

Demostración. Note que

$$(a * S(\cdot) * g)(p) = \int_0^p \int_0^t a(t-s)S(p-s)g(s)\, dp\, ds,$$

donde $\displaystyle\int_0^t a(t-p)S(p-s)g(s)\, dp \in D(A)$ para cada $s \leq p$,

y como A es un operador cerrado se sigue que $Ran(a * S(\cdot) * g) \subset D(A)$. $\square$

2.2. Ecuaciones no homogéneas

Suponga que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente para (2.0.1) y sea $u(t)$ una solución suave de (2.0.1). Entonces por $(S_1) - (S_3)$ obtenemos:

$$1 * u = S * (u - Aa * u) = S * f.$$

Esto es, $S * f$ es continuamente diferenciable (pues es una integral bien definida y con argumento continuo) y

$$u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in J, \tag{2.2.1}$$

es la formula de *variación de parámetros* para ecuaciones de Volterra (2.0.1).
La siguiente Proposición es la primera que relaciona la existencia de soluciones para (2.0.1) con el concepto de familia resolvente.

Proposición 2.2.1. *Suponga que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una famila resolvente para (2.0.1) y sea $f \in C(J,X)$ entonces*

(i) Si $u \in C(J,X)$ es una solución suave de (2.0.1), entonces $S * f$ es continuamente diferenciable sobre J y

$$u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in J.$$

Bajo estas condiciones, la ecuación (2.0.1) tiene una única solución débil.

(ii) Si $f \in W^{1,1}(J,X)$, entonces

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)\,ds, \quad t \in J \tag{2.2.2}$$

es una solución suave de (2.0.1).

(iii) Si $f = x + a * g$, con $g \in W^{1,1}(J,X)$ y $x \in D(A)$, entonces

$$u(t) = S(t)x + a * S(\cdot)g(0) + a * S(\cdot) * g'(t), \quad t \in J, \tag{2.2.3}$$

es una solución fuerte de (2.0.1).

(iv) Si $f \in W^{1,1}(J,X_A)$, entonces $u(t)$ definido por (2.2.2) es una solución fuerte de (2.0.1).

Demostración. (*ii*) Si $f \in W^{1,1}(J,X)$, entonces $u(t)$ definido por (2.2.2) es continuo sobre J y obtenemos de la Proposición 2.1.4 y del Corolarion 2.1.6 que

$$a * u = a * S(\cdot)f(0) + a * S(\cdot) * f' \in D(A)$$

para cada $t \in J$ y

$$Aa * u = (S(\cdot) - I)f(0) + S(\cdot) * f' - I * f' = u - f,$$

esto es $u(t)$ es una solución suave de (2.0.1).

(iii) Sea $v = S(\cdot)g(0) + S(\cdot) * g'$, por *(ii)* v es una solución suave de (2.0.1) con f reemplazado por g, en particular tenemos que $a * v \in C(J, X_A)$.

Ahora, $u(t)$ dado por (2.2.3) lo escribimos como

$$u(t) = S(t)x + (a * v)(t).$$

Entonces $u \in C(J, X_A)$ dado que $x \in D(A)$ y por lo tanto u es solución fuerte de (2.0.1).

(iv) Esto es consecuencia directa de *(ii)* dado que $S(t)$ conmuta con A. $\square$

Supongamos por un momento que $a \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ entonces, dado que $x \in D(A)$, obtenemos de la ecuación resolvente (2.1.4) que $S(\cdot)x$ es de clase $W^{1,\infty}(\mathbb{R}, X)$ y

$$S'(t)x = \int_0^t da(s)S(t-s)Ax\,ds \quad t \geq 0.$$

En este caso (2.2.1) puede ser escrita como

$$u(t) = f(t) + \int_0^t S'(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in J, \tag{2.2.4}$$

y el lado derecho de esta ecuación tiene sentido simplemente si $f \in C(J, X_A)$ más que la dependencia del hecho que $f \in W^{1,1}(J, X_A)$. En general, $S(t)$ no será diferenciable sobre $D(A)$, esto lleva a restringir la clase de resolventes que consideraremos.

Definición 2.2.2. *Una familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ para (2.0.1) se dice diferenciable si $S(\cdot)x \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ para cada $x \in D(A)$ y existe $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que $\|\dot{S}(t)x\| \leq \varphi(t)\|x\|_A$ c.t.p. sobre $\mathbb{R}_+$ para cada $x \in D(A)$.*

En los párrafos anteriores hemos demostrado que $S(t)$ es diferenciable en el caso que $a(t) \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Siempre que $S(t)$ sea diferenciable entonces (2.2.4) tiene sentido para cada $f \in C(J, X_A)$ y de esto obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. *Suponga que (2.0.1) admite una familia resolvente diferenciable $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces*

(i) Si $f \in C(J, X_A)$ se sigue que $u(t)$ definido por (2.2.4) es una solución suave de (2.0.1)

(ii) Si $f = x + a * g$, con $g \in C(J, X_A)$ y $x \in D(A)$, entonces

$$u(t) = S(t)x + a * g(t) + a * S' * g(t), \quad t \in J \tag{2.2.5}$$

es una solución fuerte de (2.0.1).

Demostración. Si $S(t)$ es diferenciable, $S'(t)$ satisface

$$S'(t)x = a(t)Ax + Aa * S'(t)x, \text{ c.t.p } t \geq 0, \, x \in D(A). \tag{2.2.6}$$

En particular $a * S'(t)$ lleva $D(A)$ en $D(A)$ c.t.p. $t \geq 0$, y

$$\|Aa * S(t)x\| \leq \|\dot{S}(t)x\| + \|a(t)Ax\| \leq (\varphi(t) + |a(t)|)\|x\|_A.$$

Esto implica que para cada $f \in C(J, X_A)$ se tiene que $a * u = a * f + a * S' * f$ está en $C(J, X_A)$, entonces u es una solución suave de (2.0.1) por (2.2.6).

Por otro lado, si $f = x + a * g$ con $g \in C(J, X_A)$ entonces $v = g + S'(\cdot) * g$ es una solución suave de (2.0.1) con f reemplazado por g, entonces $a * v \in C(J, X)$, desde que (2.2.5) se escribe como $u = Sx + a * v$ y $u \in C(J, X)$ y dado que $x \in D(A)$ y u es una solución fuerte de (2.0.1) por (2.2.6). □

Concluimos esta sección demostrando que el concepto de solución suave y débil para ecuaciones de la forma (2.0.1) coinciden cuando $\rho(A) \neq \emptyset$.

Proposición 2.2.4. *Sea $f \in C(J, X)$ y suponga que $\rho(A) \neq \emptyset$. Entonces cada solución débil u sobre J de (2.0.1) es una solución suave de (2.0.1).*

Demostración. Suponga que $\mu \in \rho(A)$ y que $u \in C(J, X)$ es una solución débil de (2.0.1), entonces para cada $x^* \in D(A^*)$ tenemos

$$\langle a * u, A^* x^* \rangle = \langle u - f, x^* \rangle$$

sobre J, entonces

$$\langle a * u, (\mu - A^*)x^* \rangle = \langle f - u + \mu a * u, x^* \rangle$$

sobre J. Dado que $\mu - A^*$ es invertible, al definir $y^* = (\mu - A)x^*$ obtenemos

$$\langle a * u, y^* \rangle = \langle f - u + \mu a * u, (\mu - A^*)^{-1} y^* \rangle = \langle (\mu - A)^{-1}(f - u + \mu a * u), y^* \rangle,$$

para todo $y^* \in X^*$, entonces

$$a * u = (\mu - A)^{-1}(f - u + \mu a * u) \text{ sobre } J$$

pero esto implica que $a * u(t) \in D(A)$ para cada $t \in J$ y

$$Aa * u = u(t) - f(t), \text{ para todo } t \in J,$$

esto es, $u(t)$ es una solución suave de (2.0.1). □

2.3. Condiciones necesarias para problemas bien planteados

Suponga que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente para (2.0.1) y sea $-\mu \in \sigma(A)$ un valor propio de A con vector propio $x \neq 0$. Entonces

$$S(t)x = s(t,\mu)x, \quad t \geq 0, \tag{2.3.1}$$

donde $s(t,\mu)$ es la única solución de la ecuación (ver [29, Teorema 3.5, p.44]) de Volterra unidimensional

$$s(t,\mu) + \mu \int_0^t a(t-\tau)s(\tau,\mu)\, d\tau = 1, \quad t \geq 0. \tag{2.3.2}$$

En efecto

$$Aa * s(t,\mu)x = a * s(t,\mu)Ax = -\mu a * s(t,\mu)x = s(t,\mu)x - x.$$

Entonces (2.3.1) se satisface por la unicidad de (2.1.3), puesto que $S(t)$ es el operador solución de (2.1.3).

De igual manera, si $S(t)$ es diferenciable entonces $\dot{S}(t)x = \mu r(t,\mu)x$; $t \geq 0$ donde $r(t,\mu)$ es la solución de la ecuación unidimensional

$$r(t,\mu) + \mu \int_0^t a(t-\tau)r(\tau,\mu)\, d\tau = a(t), \quad t \geq 0. \tag{2.3.3}$$

Estas observaciones llevan a establecer condiciones necesarias para el buen planteo de (2.0.1).

Proposición 2.3.1. *Suponga que (2.0.1) admite un resolvente $S(t)$, y sean $s(t,\mu)$ y $r(t,\mu)$ las soluciones de las ecuaciones de Volterra (2.3.2) y (2.3.3) respectivamente. Entonces:*

(i) Existe una función localmente acotada, inferiormente semicontinua $\psi(t)$ tal que

$$|s(t,\mu)| \leq \psi(t), \text{ para todo } -\mu \in \sigma(A),\, t \geq 0.$$

(ii) Si $S(t)$ es diferenciable, entonces existe $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$|r(t,\mu)| \leq \varphi(t), \text{ para todo } -\mu \in \sigma(A) \text{ y c.t.p } t \geq 0.$$

Demostración. Supongamos que $-\mu \in \sigma(A)\backslash\sigma_r(A)$, entonces existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, tal que $\|x_n\| = 1$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $y_n \to 0$ con la propiedad de $(\mu + A)x_n = y_n$.
Definamos $u_n(t) = S(t)x_n - s(t,\mu)x_n$ entonces $u_n(t)$ satisface la ecuación

$$u_n + \mu a * u_n = a * Sy_n,$$

en efecto:

$$\begin{aligned} u_n(t) + \mu a * u_n(t) &= S(t)x_n - s(t,\mu)x_n + \mu a * (S(t)x_n - s(t,\mu)x_n) \\ &= (-s(t,\mu)x_n - \mu a * s(t,\mu)x_n) + (S(t)x_n + \mu a * S(t)x_n) \\ &= -x_n + x_n + a * AS(t)x_n + \mu a * S(t)x_n \\ &= a * S(t)(\mu + A)x_n = a * Sy_n \end{aligned}$$

Entonces $u_n = r(\cdot,\mu) * Sy_n \to 0$ si $n \to \infty$ uniformemente sobre intervalos compactos. Además

$$|s(t,\mu)| = \|s(t,\mu)x_n\| \leq \|u_n(t)\| + \|S(t)x_n\| \leq \|u_n(t)\| + \|S(t)\|,$$

luego si $n \to \infty$ se tiene que $|s(t,\mu)| \leq \|S(t)\|$, para todo $t \geq 0$.
Por otro lado, si $-\mu \in \sigma_r(A)$ entonces existe $x^* \in D(A*)$, $\|x^*\| = 1$, tal que $A^*x^* = -\mu x^*$. Sea $x \in X$, entonces, por (2.1.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle S(t)x, x^* \rangle &= \langle x + Aa * S(t)x, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle + \langle Aa * S(t)x, x^* \rangle \\ &= \langle x, x^* \rangle + \langle a * S(t)x, A^*x^* \rangle \\ &= \langle x, x^* \rangle - \mu \langle a * S(t)x, x^* \rangle \\ &= \langle x, x^* \rangle - \mu a * \langle S(t)x, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Esto es $\langle S(t)x, x^* \rangle = s(\cdot,\mu)\langle x, x^* \rangle$ por unicidad. Así obtenemos:

$$|s(t,\mu)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |s(t,\mu)\langle x, x^* \rangle| = \sup_{|x| \leq 1} |\langle S(t)x, x^* \rangle| \leq \|S(t)\|, \text{ sobre } \mathbb{R}_+.$$

Esto significa que $\psi(t) = |S(t)|$ es la función deseada. Se sigue de la continuidad fuerte de $S(t)$ que $\psi(t)$ es localmente acotada y semicontinua inferiormente.

(ii) Es probado similarmente, la función de $\varphi(t)$ es definida a partir de la Definición de resolvente diferenciable.

□

Si X es un espacio de Hilbert y A es un operador normal entonces el cálculo funcional para tales operadores puede ser usado para construir una familia resolvente $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Teorema 2.3.2. *Sea A un operador normal en un espacio de Hilbert X. Entonces (2.0.1) es bien planteada si y sólo si existe una función semicontinua inferiormente $\psi(t)$ tal que*

$$|s(t,\mu)| \leq \psi(t), \text{ para todo } -\mu \in \sigma(A) \text{ y } t \geq 0. \tag{2.3.4}$$

La familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ está dada por

$$S(t) = \int_{\sigma(A)} s(t,-\mu) dE(\mu), \quad t \geq 0,$$

donde E denota la medida espectral de A. $S(t)$ es diferenciable si y sólo si existe $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$|r(t,\mu)| \leq \varphi(t) \textit{ para cada } -\mu \in \sigma(A) \textit{ y } t \geq 0 \textit{ c.t.p .} \tag{2.3.5}$$

Para ver detalles remitirse a [20].

Un cálculo sencillo muestra que para $a(t) = 1$ tenemos $r(t,\mu) = s(t,\mu) = e^{-\mu t}$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{C}$. Luego, bajo las hipótesis del Teorema 2.3.2, (2.3.4) significa que $Re(\mu) \leq \omega < \infty$ para cada $-\mu \in \sigma(A)$, es decir, el espectro de A debe estar contenido necesariamente en un semi-plano izquierdo.
Por otro lado, para $a(t) = t$ obtenemos

$$s(t,\mu) = cos(\sqrt{\mu}t); \quad r(t,\mu) = \sin(\sqrt{\mu}t)/\sqrt{\mu}; \quad t \leq 0,\, \mu \in \mathbb{C}.$$

En este caso, bajo las hipótesis del Teorema 2.3.2, (2.3.4) y (2.3.5) se reducen a que $Re\sqrt{\mu} \leq \omega$ para cada $-\mu \in \sigma(A)$, esto es, $\sigma(A)$ debe estar contenido necesariamente dentro de la parábola $p(y) = \omega^2 - y^2 + 2i\omega y$, $y \in \mathbb{R}$. En general, es dificil conseguir estimaciones como (2.3.4) y (2.3.5) y además el Teorema 2.3.2 involucra operadores -que aunque de fácil manejo- son de un uso limitado. Sin embargo, hay dos casos que son dignos de mencionar pues aparecen naturalmente en aplicaciones. Recalcamos que una medida $da(t)$ se dice de tipo positiva si

$$Re \int_0^T (da * \varphi)(t)\overline{\varphi}(t)\, dt \geq 0, \text{ para cada } \varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ y } T > 0.$$

Si $da(t)$ es de crecimiento subexponencial (i.e. $\int_{\mathbb{R}^+} |da|\, e^{-\varepsilon t}\, dt < \infty$, para cada $\varepsilon > 0$), entonces es de tipo positivo si y sólo si $Re\widehat{da}(\lambda) \geq 0$ para cada $Re\lambda > 0$, ver por ejemplo [29].

Corolario 2.3.3. *Suponga que A es autoadjunto, semidefinido no-negativo en un espacio de Hilbert X.*

(i) Sea $a \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que la medida da es de tipo positivo. Entonces (2.0.1) admite una familia resolvente diferenciable $S(t)$ tal que

$$|S(t)| \leq 1, \textit{ y } |S'(t)x| \leq Var\; a|_0^t\; |Ax|, \textit{ para todo } t \geq 0,\, x \in D(A).$$

(ii) Sea $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ no negativo y no-creciente. Entonces (2.0.1) admite una familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ el cual es autoadjunto y cumple con $0 \leq (S(t)x, x) \leq 1, \forall x \in X$.

Note que si $a(t)$ es no negativo, no-decreciente, entonces si $a(0+) < \infty$ se tiene que $a \in BV(\mathbb{R}_+)$ y da es de tipo positivo; esto muestra una conección entre (i) y (ii) del corolario anterior.

2.4. Ecuaciones perturbadas.

Considere la ecuación perturbada

$$u(t) = f(t) + (a + a * k) * Au(t) + b * u(t), \quad t \in J \tag{2.4.1}$$

donte $a(t)$, A, $f(t)$ son como antes y k, $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Los conceptos de solución, ecuación bien planteada y familia resolvente tienen una extensión obvia para el problema perturbado (2.4.1). Note que si $a * u \in C(J, X_A)$ entonces $(a + a * k) * u \in C(J, X_A)$. Por medio de la formula de variación de parámetros obtenida en la sección 2.2, es posible mostrar que (2.4.1) es bien planteada si y sólo si (2.0.1) tiene esta propiedad, provisto de que b y k sean localmente de variación acotada.

Teorema 2.4.1. *Suponga que k, $b \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Entonces (2.4.1) es bien planteada si y sólo si (2.0.1) lo es. Además, la familia resolvente $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ de (2.4.1) es diferenciable si y sólo si la familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de (2.0.1) tiene esta propiedad.*

Demostración. Suponga que (2.0.1) admite un resolvente $S(t)$. El resolvente $S_1(t)$ debe satisfacer la ecuación

$$S_1 = I + Aa * S_1 + k * Aa * S_1 + b * S_1 \tag{2.4.2}$$

entonces por la formula de variación de parámetros (2.2.1) esta debe ser solución de

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{d}{dt}(S * (I + b * S_1 + k * Aa * S_1)) \\ &= S + db * S * S_1 + dk * (Aa * S) * S_1 \\ &= S + [(db + dk) * S - k] * S_1 \end{aligned}$$

dado que b, k son localmente de variación acotada.
Esto es, S_1 debe ser solución de

$$S_1 = S + K * S_1 \tag{2.4.3}$$

donde $1 * K = (b + k) * S - I * k$ está en $BV^0_{loc}(\mathbb{R}_+, B(X))$. Además por [52, Teorema 0.5], (2.4.3) tiene una única solución fuertemente continua $S_1(t)$ sobre $\mathbb{R}_+$. Al convoluir (2.4.3) con $a(t)$ vemos que $a * S_1(t)$ está en $D(A)$, y aplicando A obtenemos la continuidad fuerte de $Aa * S_1(t)$. Note que K conmuta con A. Por la misma razón $S_1(t)$ conmuta con A y este satisface (2.4.2) por construcción y por la Proposición 2.2.1, $S(t)$ también es diferenciable, la diferenciación de (2.4.3) resulta en

$$S'_1 x = S' x + K * S'_1 x + Kx,$$

entonces S_1 tiene también esta propiedad. El recíproco se obtiene intercambiando los roles de $S(t)$ y $S_1(t)$. □

Corolario 2.4.2. *Suponga que k, $b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ una familia resolvente para (2.0.1). Entonces el resolvente $S_1(t)$ para (2.4.1) admite la descomposición*

$$S_1(t) = S(t) + S_2(t), \quad t \geq 0,$$

donde $S_2(t)$ es continuo en $\mathcal{B}(X)$ para todo $t \geq 0$. Si $S(t)$ es también diferenciable entonces $S'_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(X_A, X))$.

Este último corolario es simplemente el hecho de que para familias fuertemente continuas (respectivamente fuertemente localmente integrables) $T(t)$ y núcleos escalares $c \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ la convolución $c * T$ es continua en $\mathcal{B}(X)$ (respectivamente localmente integrable en $\mathcal{B}(X)$).

Para el caso especial $a(t) = 1$, la ecuación (2.4.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} u'(t) &= f'(t) + Au(t) + K * Au(t) + db * u(t); \quad t \geq 0. && (2.4.4) \\ u(0) &= f(0); && (2.4.5) \end{aligned}$$

El Teorema 2.4.1 entonces establece que el sistema anterior es bien-planteado si y sólo si A genera un C_0-Semigrupo en X. Esta observación lleva al siguiente corolario

Corolario 2.4.3. *Suponga que k, $b \in BV_{loc}(\mathbb{R})$. Entonces (2.4.4) es bien planteada si y sólo si A genera un C_0-semigrupo en X. Si este es el caso, la familia resolvente para (2.4.4) es diferenciable.*

Por otro lado, para $a(t) = t$ la ecuación (2.4.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} u'' &= f' + Au + k * Au + b'(t) f(0) + db * u', \quad t \geq 0. && (2.4.6) \\ u(0) &= f(0), \quad u'(0) = f'(0) + b(0+) f(0); && (2.4.7) \end{aligned}$$

en este caso el Teorema 2.4.1 establece que (2.4.6) es bien planteada si y sólo si A genera una familia coseno en X, donde se debe tener que $k \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Corolario 2.4.4. *Suponga que $k \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Entonces (2.4.6) es bien planteada si y sólo si A genera una familia coseno en X. Si este es el caso, la familia resolvente para (2.4.6) es diferenciable.*

2.5. Teorema de generación.

Tal como en secciones anteriores asumimos que $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador lineal cerrado no acotado, con dominio $D(A)$ denso en X, y cuyo conjunto resolvente $\rho(A)$ es no vacio.

Dado que (2.0.1) es una ecuación del tipo de convolución sobre la semirecta es natural utilizar la transformada de Laplace para su estudio.
Para tal objetivo, asumimos que $a(t)$ es un núcleo escalar no nulo, Laplace-transformable, esto es, existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|\,dt < \infty.$$

Aún más, nos restringiremos a aquellas familias resolventes que sean Laplace-transformables.

Esto nos permitirá generalizar el famoso Teorema de generación de Hille-Yosida para C_0-semigrupos.

Definición 2.5.1. *Suponga que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente para (2.0.1)*

(i) $S(t)$ es llamada exponencialmente acotada *si existen constantes $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tales que*

$$|S(t)| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para cada } t \geq 0, \tag{2.5.1}$$

la constante ω o más precisamente (M, ω) es llamada un tipo *de $S(t)$.*

(ii) La cota de crecimiento $\omega_0(S)$ de la familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ para (2.0.1) es definida por

$$\omega_0(S) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\log|S(t)| \tag{2.5.2}$$

Obviamente, tenemos la relación

$$\omega_0(S) = \inf\{\omega : \text{ existe } M > 0 \text{ tal que (2.5.1) se verifica}\}$$

Ahora, supongamos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente exponencialmente estable para (2.0.1), su transformada de Laplace

$$H(\lambda) = \hat{S}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt, \quad Re\lambda > \omega$$

está bien definida y es analítica para $Re\lambda > \omega$, además satisface la estimación

$$|H^{(n)}(\lambda)| \leq Mn!(Re\lambda - \omega)^{-(n+1)}, \quad Re\lambda > \omega,\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.5.3}$$

Para calcular $H(\lambda)$ usamos las ecuaciones resolventes (2.1.4) y (2.1.5) y a partir del teorema de convolución para transformada de Laplace obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} H(\lambda)x &= \frac{x}{\lambda} + \hat{a}(\lambda)H(\lambda)Ax, \quad \forall x \in D(A), \\ H(\lambda)x &= \frac{x}{\lambda} + A\hat{a}(\lambda)H(\lambda)x, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Note además que $H(\lambda) = (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}/\lambda$ para $Re\lambda > \omega$. En particular tenemos que $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ para todo λ tal que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$. De hecho $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ para cada $Re > \omega$. En efecto, asuma que $\hat{a}(\lambda_0) = 0$ para algún λ_0 con $Re\lambda_0 > \omega$. Dado que $\hat{a}(\lambda)$ es analítica, λ_0 es un punto aislado de multiplicidad finita y $H(\lambda_0) = I/\lambda_0$. Escojamos un circulo pequeño Γ que contenga a λ_0 el cual esté enteramente contenido en el semiplano $Re\lambda > \omega$ tal que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ sobre Γ. Entonces $AH(\lambda) = (H(\lambda) - I/\lambda)/\hat{a}(\lambda)$ está bien definido y es analítica sobre Γ.

Por la formula de Cauchy obtenemos que

$$A = A\lambda_0 H(\lambda_0) = A(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \frac{\lambda H(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma \frac{\lambda H(\lambda) - I}{(\lambda - \lambda_0)\hat{a}(\lambda)}\, d\lambda$$

y luego A es acotado, lo que contradice nuestras hipótesis sobre A. De esta manera $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ para todo $Re\lambda > \omega$.

Con esta propiedad de $\hat{a}(\lambda)$ y A, en combinación con (2.5.3) caracterizamos los resolventes de tipo (M, ω).

Teorema 2.5.2 (de generación). *Sea A un operador lineal cerrado no acotado sobre X con dominio denso $D(A)$ y sea $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que satisface $\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|\, dt < \infty$. Entonces (2.0.1) admite una familia resolvente del tipo (M, ω) si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen*

(H1) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ *y* $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A)$ *para todo* $Re\lambda > \omega$.

(H2) $H(\lambda) = (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}/\lambda$ *satisface la estimación*

$$|H^n(\lambda)| \leq Mn!|(\lambda - \omega)|^{-(n+1)}, \quad Re\lambda > \omega, n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Ver [52, pág 43]. □

Capítulo 3

Soluciones débiles de una ecuación integral perturbada

En este capítulo estudiaremos la existencia y regularidad de las soluciones débiles sobre la recta real al perturbar una ecuación del tipo Volterra con retardo infinito en los distintos espacios de funciones introducidas en el capítulo 1. Estos resultados son originales para la presente tesis y se encuentran en el artículo [15].

Para tal objetivo primeramente introduciremos el concepto de familia $(a, k)-$regularizada [37], para luego definir el concepto de familia resolvente integral que es la última herramienta previa para el desarrollo principal de este trabajo.

3.1. Familias (a, k)-regularizadas.

Durante esta sección A denota un operador lineal cerrado sobre X con dominio $D(A)$, y conjunto resolvente $\rho(A) \neq \emptyset$.

Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *Sea $k \in C(\mathbb{R}_+)$ un núcleo escalar distinto de cero, y sea $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $a \neq 0$. Una familia $\{R(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ se dice una familia resolvente $(a, k)-$regularizada con generador A si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(R1) $R(t)$ es fuertemente continua sobre $\mathbb{R}_+$ y $R(0) = k(0)I$.

(R2) $R(t)x \in D(A)$ y $AR(t)x = R(t)Ax$ para cada $x \in D(A)$ y $t \geq 0$.

(R3) Se cumple la ecuación

$$R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AR(s)x\,ds \tag{3.1.1}$$

para cada $x \in D(A)$, $t \geq 0$.

Enunciamos el siguiente lema que aunque simple es muy importante.

Lema 3.1.2. *Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ una familia resolvente $(a,k)-$regularizada con generador A. Entonces $a * R(t)x \in D(A)$ para cada $x \in X$, $t \geq 0$ y*

$$R(t)x = k(t)x + A\int_0^t a(t-s)R(s)x\,ds, \quad x \in X, t \geq 0. \tag{3.1.2}$$

Demostración. Sea $x \in X$ y defina $y = (\lambda - A)^{-1}x \in D(A)$, donde $\lambda \in \rho(A)$ es fijo. Sea $z = a * R(t)x$, $t \geq 0$. Debemos demostrar que $z \in D(A)$ y que $Az = R(t)x - k(t)x$. Usando $(R2)$ y $(R3)$ obtenemos

$$z = (\lambda - A)a * R(t)y = \lambda a * R(t)y - A(a * R(t)y) = \lambda a * R(t)y - (R(t)y - k(t)y) \in D(A).$$

y

$$(\lambda - A)z = \lambda a * R(t)x - (R(t)x - k(t)x) = \lambda z - (R(t)x - k(t)x)$$

con lo que se obtiene lo pedido. □

Observación 3.1.3. *Bajo ciertas condiciones sobre el núcleo escalar $k(t)$ (ver [40]), el generador A de una familia $(a,k)-$regularizada es único y está dado por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{R(t)x - k(t)x}{(k*a)(t)}, \quad x \in D(A).$$

El siguiente resultado trata el problema de unicidad para familias $(a,k)-$regularizadas con generador A.

Corolario 3.1.4. *Si $\{R_1(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{R_2(t)\}_{t\geq 0}$ son dos familias resolventes $(a,k_1)-$regularizada y $(a,k_2)-$regularizada respectivamente, entonces $(k_1 * R_2)(t) = (k_2 * R_1)(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Para cada $x \in D(A)$ obtenemos

$$k_2 * R_1 x = (R_2 - a * AR_2) * R_1 x = R_2 * R_1 - a * R_2 * AR_1 x = R_2 * (R_1 x - a * AR_1 x) = k_1 * R_2 x.$$

Entonces $(k_2 * R_1)(t)x = (k_1 * R_2)(t)x$ para cada $x \in D(A)$, $t \geq 0$. Sea $\lambda \in \rho(A)$ e $y \in X$. Definamos $x = (\lambda - A)^{-1}y$. Entonces

$$(\lambda - A)(k_2 * R_1(t))x = (\lambda - A)(k_1 * R_2)(t)x$$

implica que $(k_2 * R_1)(t)y = (k_1 * R_2)(t)y$ para cada $y \in X$, $t \geq 0$. □

Observación 3.1.5. *i) Dado que k es un núcleo escalar se sigue desde el corolario anterior y el Teorema de Titchmarsch, que si A es el generador de dos familias $(a,k)-$regularizadas, $\{R_1(t)\}_{t\geq 0}$, $\{R_2(t)\}_{t\geq 0}$, entonces $R_1(t) = R_2(t)$ para todo $t \geq 0$.*

ii) Si $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia $(a,k_i)-$regularizada, $i = 1, 2$, con generador A entonces $k_1 = k_2$.

iii) Sea $\{R_i(t)\}_{t\geq 0}$ una familia resolvente $(a,k_i)-$regularizada con generador A. Entonces $\{(R_1 + R_2)(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente $(a,k_1 + k_2)-$regularizada con generador A.

iv) Si $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente $(a,k)-$regularizada con generador A, $k \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, entonces $((b * R)(t))_{t\geq 0}$ es una familia resolvente $(b * k)-$regularizada con generador A.

Ahora bien, suponga $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente para (2.0.1). Entonces podemos definir una familia resolvente $(a,k)-$regularizada con generador A dada por

$$R(t)x = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t k(t-s)S(s)x\,ds\right)$$

para todo $x \in D(A)$ y $t \in J$. Recíprocamente, tenemos el siguiente criterio, muy útil para aplicaciones.

Proposición 3.1.6. *Suponga $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente $(a,k)-$regularizada con generador A, con $k \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $k(0) \neq 0$. Entonces (2.0.1) admite una familia resolvente.*

Demostración. Sea $k \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $k(0) \neq 0$, por [29, Teorema 3.1, pág 42], existe $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tal que $b * k' = -k'k(0)^{-1} - bk(0)$. Al convoluir esta última igualdad con $1(t) \equiv 1$, obtenemos

$$(b * k)(t) + k(t)k(0)^{-1} = 1 \text{ para cada } t \geq 0. \tag{3.1.3}$$

Afirmamos que (2.0.1) admite una familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dada por

$$S(t)x = k(0)^{-1}R(t)x + \int_0^t b(t-s)R(s)x\,ds$$

para cada $x \in X$ y $t \geq 0$. En efecto, es claro que $S(t)$ es fuertemente continua sobre $\mathbb{R}_+$, $S(0) = I$, y $S(t)$ conmuta con A para cada $x \in D(A)$ y $t \geq 0$. Para todo $x \in D(A)$

obtenemos por (3.1.1) y por (3.1.3)

$$
\begin{aligned}
S(t)x &= k(0)^{-1}R(t)x + b * R(t)x \\
&= k(0)^{-1}(k(t)x + a * AR(t)x) + b * (k(t)x + a * AR(t)x) \\
&= k(0)^{-1}k(t)x + k(0)^{-1}a * AR(t)x + b * k(t)x + b * (a * AR(t))x \\
&= x + k(0)^{-1}a * AR(t)x + b * (a * AR(t))x \\
&= x + a * A(k(0)^{-1}R(t)x + b * R(t)x) \\
&= x + a * AS(t)x.
\end{aligned}
$$

Esto es, $S(t)x = x + (a * AS)(t)x$ para cada $x \in D(A)$ y $t \geq 0$, lo cual demuestra la afirmación, y finaliza la prueba. □

Observación 3.1.7. *1. De la demostración anterior notamos que sólo la condición (3.1.3) es necesaria para obtener la existencia de una familia resolvente.*

2. Suponga que $f \in W^{1,1}_{loc}(J,X)$ y $k \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $k(0) \neq 0$. Para el caso especial $a(t) \equiv 1$,(2.0.1) es equivalente a

$$\dot{u}(t) = \dot{f}(t) + Au(t), \quad u(0) = f(0). \tag{3.1.4}$$

La proposición anterior establece que (3.1.4) admite un semigrupo $k-$convoluido si y sólo si A genera un C_0-semigrupo en X.

Ejemplos de resolventes $k-$regularizadas los cuales no son resolventes son dados por los núcleos $k(t) = t^\alpha/\Gamma(\alpha+1), \alpha > 0$. Para $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$, existen resolventes $n-$integrados tratados en [33] y [49]. Note que en este caso $k(0) = 0$.

En las líneas que siguen mostraremos como a partir de una familia resolvente (a,k)-regularizada podemos obtener criterios de existencia y unicidad para soluciones de la ecuación (2.0.1).

Sea $k \in C(\mathbb{R}_+)$ un núcleo escalar, tal que $0 \in supp(k)$. Definimos la transformada de convolución $K : C(J,X) \to C(J,X)$ por $Ku = k * u$. Note que K es lineal, acotado y además, por el Teorema de Titchmarsch-Foias (ver [9, Teorema 1, pág. 2]), un operador inyectivo.

Teorema 3.1.8. *Sea $f \in C(J,X)$, A el generador de una familia $(a,k)-$regularizada, $\{R(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces existe una única solución para (2.0.1) si y sólo si $R * f \in Ran(K)$.*

Demostración. Sea $u(t)$ la única solución de (2.0.1). Entonces por $(R1)-(R3)$ y el Lema (3.1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} R*f &= R*(u-A(a*u)) = R*u-R*A(a*u) = R*u-R*A(a*u) \\ &= R*u-AR*(a*u) = (R-A(a*R))*u = k*u. \end{aligned}$$

Recíprocamente, suponga que $R*f$ está en el rango de la transformada de convolución. Entonces existe $u \in C(J,X)$ tal que $k*u = R*f$. De esta manera, por el Lema 3.1.2 obtenemos:

$$(a*u)*k = a*(R*f) = (a*R)*f \in D(A),$$

para cada $t \in J$, y

$$A((a*u)*k) = A(a*R)*f = (R-k)*f = R*f-k*f = k*u-k*f.$$

Entonces, para cada $x^* \in D(A^*)$ e $y^* = A^*x^*$,

$$\begin{aligned} k*\langle u,x^*\rangle &= \langle k*u,x^*\rangle = \langle k*f,x^*\rangle + \langle a*u*k,y^*\rangle \\ &= k*\langle f,x^*\rangle + k*\langle a*u,y^*\rangle. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Titchmarsch tenemos que

$$\langle u,x^*\rangle = \langle f,x^*\rangle + \langle a*u,y^*\rangle.$$

Entonces $u \in C(J,X)$ es una solución débil de (2.0.1) sobre J.

Sea $\lambda \in \rho(A)$, entonces para cada $x^* \in D(A^*)$ e $y^* = A^*x^*$ se tiene que

$$\langle a*u, \lambda x^*-y^*\rangle = \langle \lambda a*u-u+f,x^*\rangle.$$

Sea $z^* \in X^*$. Dado que $\lambda \in \rho(A^*)$, entonces existe un $x_0^* \in D(A)^*$ tal que $z^* \in (\lambda-A^*)x_0^*$. Se sigue que $z^* = \lambda x_0^* - y_0^*$ para algún $y_0^* = A^*x_0^*$.

Entonces $(\lambda-A^*)^{-1}z^* = ((\lambda-A)^{-1})^*z^* = x_0^*$, luego

$$\langle a*u,z^*\rangle = \left\langle \lambda a*u-u+f,((\lambda-A)^{-1})^*z^*\right\rangle.$$

Esto es,

$$\langle a*u,z^*\rangle = \left\langle (\lambda-A)^{-1}(\lambda a*u-u+f),z^*\right\rangle.$$

Dado que $z^* \in X^*$ es arbitrario, se sigue que

$$(a*u)(t) = (\lambda-A)^{-1}(\lambda(a*u)(t)-u(t)+f(t))$$

para cada $t \in J$. Además, $\lambda(a*u)(t)-A(a*u)(t) = \lambda(a*u)(t)-u(t)+f(t)$. De esta ecuación se desprende que u es la única solución para (2.0.1). $\square$

Observación 3.1.9. *1. En muchos casos, $Ran(K)$ es el dominio de un operador diferencial, ver [54].*

2. El teorema anterior establece que $u \in C(J,X)$ es solución de (2.0.1) si y sólo si la siguiente formula de variación de parámetros 'generalizada' se satisface:

$$\int_0^t k(t-s)u(s)\,ds = \int_0^t R(t-s)f(s)\,ds. \tag{3.1.5}$$

Pues, si $f \in W^{1,1}(J,X)$ y $k(t) \equiv 1$ entonces, despues de derivar, (3.1.5) coincide con la formula de variación de parámetros

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)\dot{f}(s)\,ds, \quad t \in J.$$

Para $m = 1, 2, \ldots$ denotamos por $C^{n,m}(J,X)$ al conjunto de las funciones $n-$veces continuo-diferenciables $v : J \to X$ tales que $v(0) = \ldots v^{(m-1)}(0) = 0$. Si $m = 0$ o $m = n$, denotamos por $C^{n,0}(J,X) \equiv C^{(n)}(J,X)$ y $C^{n,n} \equiv C_0^n(J,X)$, respectivamente. Con esta notación, se puede verificar que $Ran(K) \subset C^{n,m+1}(J,X)$ para todo n, $m \in \mathbb{N}_0$, siempre que $k \in C^{n,m}(J,\mathbb{C})$.

Note que la propiedad de que $k \in C_0^n(J,\mathbb{C})$ implica que $R * f \in C_0^{n+1}(J,X)$ si y sólo si $R * f \in C^{(n+1)}(J,X)$.
En efecto, asuma que $w := R * f \in C^{(n+1)}(J,X)$. Entonces por $(R3)$ tenemos que $R * f = (k + A(a * R)) * f = k * f + A(a * R * f)$. Entonces

$$w = k * f + A(a * w).$$

Dado que A es cerrado y $w(0) = 0$, podemos derivar y obtener $w^m(0) = 0$ para cada $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, esto es, $R * f \in C_0^{n+1}(J,X)$.
Aún más, considere una familia resolvente $(a,k)-$regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ y suponga que $k \in C^1(J)$ con $k(0) \neq 0$. Definamos $B : C_0^1(J,X) \to C(J,X)$ por $Bv(t) = v(t)k(0)^{-1} + (b * v)(t)$. Tenemos que

$$KBv(t) = (k*v)(t)k(0)^{-1} + ((k*b)*v)(t) = (k*v)(t)k(0)^{-1} + (1*v)(t) - (k*v)(t)k(0)^{-1} = v(t).$$

Dado que $k \in C^{1,0}(J,\mathbb{C})$ obtenemos por la observación anterior que $Ran(K) = C_0^1(J,X)$. Así, obtenemos el siguiente resultado

Corolario 3.1.10. *Suponga que A es el generador de una familia $(a,k)-$regularizada, $(R(t))_{t\geq 0}$ con $k \in AC_{loc}(J)$ y $k(0) \neq 0$. Asuma que $f \in C^1(J,X)$. Entonces existe una única solución para (2.0.1).*

En lo que sigue, asuma que a y k estan en $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ poseen transformada de Laplace y que existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ para cada $\lambda > \omega$.

Proposición 3.1.11 ([37, pág 287]). *Sea $R(t)$ una familia fuertemente continua de operadores exponencialmente acotada en $\mathcal{B}(X)$ tal que la transformada de Laplace $\hat{R}(\lambda)$ existe para $\lambda > \omega$. Entonces $(R(t))_{t\geq 0}$ es una familia resolvente $(a,k)-$regularizada con generador A si y sólo si para cada $\lambda > \omega$, $(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ existe en $\mathcal{B}(X)$ y*

$$\hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda))^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} R(s)\, ds \text{ para todo } x \in X.$$

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la proposición anterior y la versión vectorial del Teorema de Widder [5, Teorema 4.1].

Teorema 3.1.12. *Sea A un operador lineal cerrado. Suponga que $(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ existe en $\mathcal{B}(X)$ para cada $\lambda > \omega$, y $H(\lambda) = \hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ satisface la estimación*

$$\|H^{(n)}(\lambda)\| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - w)^{(n+1)}}, \quad \lambda > \omega,\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces la ecuación (2.0.1) admite una familia resolvente $(a, 1{*}k)-$regularizada Lipschitz-continua con generador A.

El próximo teorema de generación es otro resultado inmediato. La prueba sigue la línea de la demostración para el caso de familias resolventes.

Teorema 3.1.13. ***(de generación)*** *Sea A un operador lineal cerrado densamente definido en un espacio de Banach X. Entonces existe una familia resolvente $(a,k)-$regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ del tipo (M,ω) para la ecuación (2.0.1) si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

(H1) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ *y* $\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ *para cada* $\lambda > \omega$;

(H2) $H(\lambda) = \hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ *satisface las desigualdades*

$$\|H^{(n)}(\lambda)\| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - \omega)n + 1}, \quad \lambda > \omega,\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Observación 3.1.14. *En el caso donde $k(t) \equiv 1$, el teorema anterior es bien conocido. En efecto, si $a(t) \equiv 1$, entonces este coincide con el Teorema de Hille-Yosida; si $a(t) \equiv t$, entonces es el teorema de generación para generadores de familias coseno hecho por Sova y Fattori; para un $a(t)$ arbitrario, este teorema coincide con el demostrado, escencialmente, por Da Prato y Iannelli [51]. En el caso donde $k(t) = t^n/n!$ y $a(t) \equiv 1$, es el teorema de generación para semigrupos $n-$veces integrado [32]; Si $k(t) = t^n/n!$ y $a(t)$ es arbitrario el teorema coincide con el teorema para soluciones integradas de ecuaciones de Volterra obtenido por Arendt y Kellermann [4].*

3.2. Resolventes integrales

En esta sección introducimos la familia de operadores con las que trabajaremos en el próximo apartado.

Suponga que A es un operador cerrado, con dominio $D(A) \subset X$ densamente definido sobre X y $\rho(A) \neq 0$. Además, suponga que (2.0.1) admite una familia resolvente $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Sea $a \in BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$, como vimos en la sección 2.2 se tiene entonces que $S(t)$ es diferenciable y para cada $x \in D(A)$, $S'(t)$ es solución de

$$S'(t)x = a(t)Ax + A\int_0^t a(t-\tau)S'(\tau)x\,d\tau;$$

En la Proposición 2.2.3 se demostró que $S'(t)$ es también útil para la formula de variación de parámetros.

Recordemos además que una familia resolvente para la ecuación (2.0.1) satisface la ecuación

$$S(t)x = x + A\int_0^t a(t-s)S(s)x\,ds, \text{ para cada } x \in X \text{ y } t \geq 0.$$

A lo largo de esta sección consideraremomos la ecuación integral

$$R(t)x = a(t)x + A\int_0^t a(t-\tau)R(\tau)x\,d\tau, \quad t \geq 0, \tag{3.2.1}$$

en cambio de la anterior. Una solución de (3.2.1) es llamada una resolvente integral para la ecuación (2.0.1). Note que la ecuación (3.2.1) coincide con la ecuación (3.1.1) cuando $k(t) = a(t)$. Con esto en mente definimos el concepto de *familia resolvente integral*.

Definición 3.2.1. *Sea $\{R(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{BC}(X)$, una familia $(a,k)-$regularizada con generador A, si $k(t) = a(t)$ entonces $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es llamada una familia resolvente integral.*

Para una definición más general ver [52, Definición 1.6].

Suponga que $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente integral con generador A, sea $f \in C(J,X)$ y $u \in C(J,X)$ una solución suave para (2.0.1). Entonces $R * u$ está bien definida y obtenemos por (3.1.1) y (2.0.1) que

$$a * u = (R - a * AR) * u = R * u - R * Aa * u = R * u - R * (u - f) = R * f,$$

esto es $R * f \in C(J, X_A)$ y desde (2.0.1) se tiene que

$$u(t) = f(t) + A\int_0^t R(t-s)f(s)\,ds; \quad t \in J. \tag{3.2.2}$$

Desde (3.2.2) se obtiene que si $\{R_i(t)\}_{t\geq 0}$, es una familia resolvente integral con generador A, $i = 1, 2$, entonces $R_1(t) = R_2(t)$ para todo $t \geq 0$.

Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente para (2.0.1) y $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente integral con generador A, las relaciones entre ellas estan dadas por

$$\begin{aligned} R(t)Ax &= \dot{S}(t)x, \quad x \in D(A),\, t \geq 0, \\ R(t)x &= \frac{d}{dt}(a * S)(t)x, \quad x \in X,\, t \geq 0. \end{aligned}$$

Para el caso del problema de Cauchy, esto es, $a(t) = 1$ tenemos que $R(t) \equiv S(t)$ mientras que para la ecuación de segundo orden (2.1.2) $S(t) = Coseno(t)$ es la familia coseno generada por A y $R(t) = Seno(t)$ es la familia seno generada por A. Es posible que $R(t)$ exista pero $S(t)$ no exista y viceversa.

Si $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia resolvente integral con generador A entonces (3.2.2) genera una solución suave para (2.0.1) en el caso en que $f \in C(J, X_A)$, e incluso una solución fuerte si $f = a * g$ cuando $g \in C(J, X_A)$. La prueba de esto sigue la línea de la Proposición 2.2.3.

Finalizamos esta sección con un ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. *Considere el problema de borde con valores iniciales*

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= Du(t,x) - \int_0^t b(t-\tau)Du(\tau,x)\,d\tau, \quad t \geq 0,\, x \in [0, 2\pi], \\ u(t,0) &= u(t,2\pi),\, t \geq 0, \\ u_x(t,0) &= u_x(t,2\pi),\, t \geq 0, u(0,x) = u_0(x), x \in [0,2\pi], \end{aligned}$$

donde $b(t) = 1/\sqrt{\pi t}$ *y* $D = -2i(d/dx)^2 + (1-i)(d/dx)$. *Obviamente este problema es de la forma (2.0.1) con* $a(t) = 1 - 2\sqrt{t/\pi}$ *y* A *definido en* $X = L^2(0, 2\pi)$ *por* $(Au)(x) = Du(x)$, *con dominio* $D(A) = \{u \in W^{2,2}(0, 2\pi) : u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)\}$.

No es dificil probar que A no genera un C_0-semigrupo dado que $\sigma(A) = \{n(1+i) + 2in^2 : n \in \mathbb{Z}\}$ no está contenido en ningún semiplano izquierdo. Por otro lado en Prüss [50] o en Grimmer y Prüss [28] se demostró que este sistema admite una familia resolvente, es decir, es bien planteado.

3.3. Soluciones débiles en $BC(X)$.

Los resultados que se presentan tanto en esta sección como en la siguente se encuentran en el artículo [15].

Considere las siguientes dos ecuaciones

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\{Au(s) + f(s)\}\, ds \tag{3.3.1}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\{Au(s) + f(s) + g(s, u(s))\}\, ds, \tag{3.3.2}$$

Asuma que A es el generador de una familia resolvente integral $S(t)$ la cual es integrable (ver Definición 1.1.16).

Dada $f \in BC(X)$, sea $\varphi^*(t)$ la función dada por

$$\varphi^*(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3.3}$$

Entonces, tenemos

$$||\varphi^*||_\infty \leq ||S||||f||_\infty.$$

Suponga que $f(t) \in D(A)$, entonces se sigue que $\varphi^*(t) \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (vea 2.2.1). Usando (3.1.1) y el Teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} a(t-s)A\varphi^*(s)\, ds &= \int_{-\infty}^{t} a(t-s)A\int_{-\infty}^{s} S(s-\tau)f(\tau)\, d\tau\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} a(t-s)AS(s-\tau)f(\tau)\, d\tau\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_{\tau}^{t} a(t-s)AS(s-\tau)f(\tau)\, ds\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{t-\tau} a(t-\tau-p)AS(p)f(\tau)\, dp\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} (S(t-\tau)f(\tau) - a(t-\tau)f(\tau))\, d\tau \\
&= \varphi^*(t) - \int_{-\infty}^{t} a(t-\tau)f(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

Lo cual establece que $\varphi^*(\cdot)$ es una solución (estricta) de la ecuación (3.3.1). En general, tenemos solo que $f(t) \in X$ y entonces, en lo que sigue, diremos que $\varphi^*(t)$ definido por (3.3.3) es una solución *débil* de la ecuación (3.3.1).

Introducimos la siguiente definición natural para la ecuación (3.3.2).

Definición 3.3.1. *Sea A el generador de una familia resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Una función continua $u : \mathbb{R} \to X$ que satisface la ecuación*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[f(s) + g(s, u(s))]ds, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{3.3.4}$$

es llamada una solución débil sobre $\mathbb{R}$ de la ecuación (3.3.2).

Probaremos la existencia de una solución débil para las ecuaciones de la forma

$$u_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\{Au_\epsilon(s) + f(s) + \epsilon g(s, u_\epsilon(s))\}ds, \tag{3.3.5}$$

donde ϵ es un parámetro positivo y la función $g(t, x)$ satisface ciertos condiciones que especificaremos más adelante.

A continuación presentamos el principal resultado de esta sección.

Teorema 3.3.2. *Asuma que A genera una familia resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ la cual es integrable. Si f es una función continua acotada, g una función continua que satisface la condición de tipo Lipschitz*

$$\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, y

$$\int_{\mathbb{R}} \|g(t, 0)\|\, dt =: M < \infty.$$

Entonces para todo $0 < \epsilon < \frac{1}{L||S||}$ existe una solución débil $\varphi_\epsilon \in BC(X)$ de (3.3.5) tal que $\varphi_\epsilon \to \varphi^*$ uniformemente cuando $\epsilon \to 0$, donde φ^* es la solución débil acotada de (3.3.1).

Demostración. Sea $0 < \epsilon < \frac{1}{L||S||}$ fijo. Sobre $BC(X)$ definimos F_ϵ por

$$(F_\epsilon\varphi)(t) = \epsilon \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s, \varphi(s))\, ds, \quad \varphi \in BC(X). \tag{3.3.6}$$

Note que F_ϵ está bien defenido. En efecto:

$$\begin{aligned} \|F_\epsilon\varphi(t)\| &\leq \epsilon \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\|[\|(g(s,\varphi(s)) - g(s,0))\| + \|g(s,0)\|]\, ds \\ &\leq \epsilon||S|| \left\{ L \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\| + \int_{-\infty}^{t} \|g(s,0)\|\, ds \right\} \end{aligned}$$

y entonces,

$$\|F_\epsilon\varphi\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F_\epsilon\varphi(t)\| \leq \epsilon||S||\{\|\varphi\|_\infty L + M\}. \tag{3.3.7}$$

Notemos que F_ϵ es una contracción:

$$\|F_\epsilon\varphi_1 - F_\epsilon\varphi_2\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F_\epsilon\varphi_1(t) - F_\epsilon\varphi_2(t)\| \leq \epsilon L||S|| \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Ahora, para cada $\varphi \in BC(X)$, definimos

$$G_\epsilon\varphi(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds + F_\epsilon\varphi(t). \tag{3.3.8}$$

Dado que $f \in BC(X)$ tenemos que $G_\epsilon\varphi \in BC(X)$. Más aún G_ϵ es una contracción, ya que F_ϵ lo es. Por el Teorema del punto fijo de Banach, concluimos que existe una única solución débil acotada φ_ϵ de (3.3.5).

Para verificar la convergencia uniforme. Sea $\delta > 0$ definido por

$$\delta := \frac{1}{\|S\|\{L + M + L\|f\|\|S\|\}}$$

Note que $0 < \delta < 1/L\|S\|$, luego para cada ϵ tal que $0 < \epsilon < \delta < 1/L\|S\|$, tenemos que

$$\|\varphi_\epsilon\|_\infty \leq \|f\|\|S\| + \delta\|S\|\{L\|\varphi_\epsilon\| + M\}.$$

Entonces,

$$\|\varphi_\epsilon\|_\infty < \frac{\|f\|\|S\| + \delta\|S\|M}{1 - \delta\|S\|L} := P. \tag{3.3.9}$$

Ahora bien, sea φ^* una solución débil de (3.3.1), esto es, $\varphi^*(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds$. A partir de (3.3.9), (3.3.8) y (3.3.7) tenemos que

$$||\varphi_\epsilon - \varphi^*||_\infty = ||F_\epsilon\varphi_\epsilon|| < \epsilon||S||\{P \cdot L + M\}.$$

De lo que se concluye que $||\varphi_\epsilon - \varphi^*||_\infty \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Esto completa la demostración. □

Observación 3.3.3. *Observe que en el caso escalar, i.e $X = \mathbb{C}^n$, condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de $S(t)$ son ya conocidas. Vea el ejemplo (3.4.3) de más abajo. En el caso en que X es un espacio de Hilbert o de Banach, el problema de integrabilidad de resolventes ha sido estudiado por J. Prüss [52, Cápitulo III].*

3.4. Soluciones débiles en subespacios de $BC(X)$.

Recordamos que hemos denotado por $AP(X)$ al espacio de Banach (con la norma del supremo) de todas las funciones casi periódicas (en el sentido de Bohr). Similarmente, $AA_c(X)$ es el espacio de las funciones casi automórficas compactas, $AA(X)$ es el espacio de las funciones casi automórficas y $AAA(X)$ es el espacio de las funciones asintóticamente casi automórficas.

En lo que sigue, definimos $\mathcal{M}(X)$ como el espacio de las funciones casi periódicas, casi automórficas compactas o casi automórficas, y $\mathcal{M}(\mathbb{R} \times X; X)$ el espacio de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \times X \to X$ tales que $f(\cdot, x) \in \mathcal{M}(X)$. El siguiente resultado es el principal de esta sección.

Teorema 3.4.1. *Asuma que A genera una familia resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ la cual es integrable. Si $f \in \mathcal{M}(X)$, $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R} \times X; X)$ y satisface la condición de tipo Lipschitz*

$$\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, y

$$\int_{\mathbb{R}} \|g(t, 0)\|\, dt =: M < \infty.$$

Entonces φ^* definida como en (3.3.3) está en $\mathcal{M}(X)$ y, para todo $0 < \epsilon < \frac{1}{L\|S\|}$ existe una solución débil $\varphi_\epsilon \in \mathcal{M}(X)$ de (3.3.5) tal que $\varphi_\epsilon \to \varphi^*$ uniformemente $\epsilon \to 0$.

Demostración. Sobre $\mathcal{M}(X)$ definimos las funciones F_ϵ y G_ϵ como en (3.3.6) y (3.3.8) respectivamente. Dado que $f \in \mathcal{M}(X)$ tenemos por los lemas de integración 1.1.17, 1.2.11 y 1.3.6 que $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds \in \mathcal{M}(X)$. Por la regla de composición 1.1.22 para funciones casi periódicas, por 1.2.13 en el caso de funciones en $AA(X)$ y por 1.3.8 en el caso de funciones en $AA_c(X)$, tenemos $G_\epsilon\varphi \in \mathcal{M}(X)$ para cada $\varphi \in \mathcal{M}(X)$. concluimos que $\mathcal{M}(X)$ es invariante bajo F_ϵ y la prueba se sigue como en el Teorema 3.3.2. $\square$

Finalmente, consideremos funciones asintóticamente casi automórficas. Este caso tiene una pequeña diferencia con el anterior, esencialmente por la regla de composición (1.4.11).

Teorema 3.4.2. *Asuma que A genera una familia resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ la cual es integrable. Si $f \in AAA(X)$, $g = h + p \in AAA(\mathbb{R} \times X; X)$, donde $h \in AA(\mathbb{R} \times X, X)$, $p \in C_0(\mathbb{R} \times X, X)$ y h satisface la condición de tipo Lipschitz*

$$\|h(t, x_1) - h(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, *y*

$$\int_{\mathbb{R}} \|h(t,0)\| \, dt =: M < \infty,$$

entonces se sigue la misma conclusión del Teorema 3.4.1.

Finalizamos el presente trabajo con los siguientes ejemplos ilustrativos de los resultados obtenidos.

Ejemplo 3.4.3. Sea $\mathcal{M}(X)$ el espacio de las funciones casi periódicas, casi automórficas compactas o casi automórficas . Sea $b \in L^1(\mathbb{R}) \cap BC(\mathbb{R})$, y $h \in \mathcal{M}(X)$ que satisface la condición de Lipchitz:

$$||h(x) - h(y)|| < L||x - y||, \quad x, y \in X.$$

Usando el teorema anterior, con $g(t, x) = b(t)h(x)$, podemos plantear para cada $f \in \mathcal{M}(X)$, la ecuación

$$u_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\{Au_\epsilon(s) + f(s) + \epsilon b(s)h(u_\epsilon(s))\}ds, \tag{3.4.1}$$

donde $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$ y A es el generador de una familia resolvente integral que satisface (1.1.16). Entonces (3.4.1) tiene una única solución débil en $\mathcal{M}(X)$, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

En particular si hacemos $A \equiv 0$, tenemos que la familia resolvente integral es dada por $S(t)x = a(t)x$ y además, la ecuación

$$u_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\{f(s) + \epsilon b(s)h(u_\epsilon(s))\}ds, \tag{3.4.2}$$

tiene una única solución débil en $\mathcal{M}(X)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, siempre que $f \in \mathcal{M}(X)$.

Consideramos algunos ejemplos para el caso escalar:

Hacemos $X = \mathbb{C}^n$, $A = \rho I$, $\rho \in \mathbb{C}$, y $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Suponga que

$$\rho\hat{a}(\lambda) \neq 1 \text{ para todo } Re\lambda \geq 0. \tag{3.4.3}$$

Por el Teorema de Paley- Wiener (vea [29, pág.45]) tenemos que A genera una familia resolvente integral $S_\rho \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$, que cumple con (1.1.16). Concluimos que para cada

$$0 < \epsilon < \frac{1}{L||S_\rho||} \tag{3.4.4}$$

la ecuación

$$u_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\{\rho u_\epsilon(s) + f(s) + \epsilon b(s)h(u_\epsilon(s))\}ds, \tag{3.4.5}$$

tiene una única solución débil que está en $\mathcal{M}(X)$ siempre que $f \in \mathcal{M}(X)$.

Para un ejemplo concreto, tomamos $a(t) = t^\alpha e^{-\omega t}$, $\omega > 0, \alpha \geq 0$. Note que en el caso $\alpha = 0$ tenemos que

$$S_0(t) = e^{(\rho-\omega)t} I, \quad t \geq 0$$

y, en el caso $\alpha = 1$, tenemos para $\rho > 0$:

$$S_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\omega t} \sinh(\sqrt{\rho} t), \quad t \geq 0.$$

En el caso particular $\alpha = 0$, observamos que la condición (3.4.3) es equivalente a

$$Re(\rho) < \omega,$$

y entonces, claramente que $S_0 \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$. Más precisamente, tenemos que $||S_0|| = \frac{1}{\omega - Re(\rho)}$. Usando (3.4.4) concluimos que para cada ρ tal que $Re(\rho) < 0$, y cualquier $\epsilon > 0$, existe una única solución débil de la ecuación

$$u_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\{\rho u_\epsilon(s) + f(s) + \epsilon b(s)h(u_\epsilon(s))\}ds. \tag{3.4.6}$$

Más aún, está solución pertenece a $\mathcal{M}(X)$ para cada $f \in \mathcal{M}(X)$.

Bibliografía

[1] L. Amerio. *Soluzioni quasi-periodiche, o limitati di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitate*, Ann. Mat. Pura Appl. **39**, (1955) 97-119.

[2] L. Amerio. *Quasi periodicita degl' integrali ad energie limitate dell equazione delle onde con termine noto, quasi periodico, I, II, III.* Rend. acad. Naz. dei Linci. **28**, Febrere, Marzo, Abril, (1960).

[3] D. Araya, C. Lizama. *Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations.* Nonlinear Anal. **69** (11) (2008), 3692–3705.

[4] W. Arendt and H. Kellermann. *Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications*, in Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 190, pp. 21-51, Longman, HarlowrNew York, (1987).

[5] W. Arendt. *Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems*, Israel J. Math. **59**, (1987), 327-352.

[6] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Monographs in Mathematics. **96**, Birkhäuser, Basel, 2001.

[7] B. Basit and H. Günzler. *Difference propertty for perturbations of vector valued Levitan almost periodic functions and their analogs,* Russ. J. Math. Phys., **12** (4) (2005), 424-438.

[8] B. Basit, A.J. Pryde. *Asymptotic behavior of orbits of C_0-semigroups and solutions of linear and semilinear abstract differential equations.* Russ. J. Math. Phys., **13** (1) (2006), 13–30.

[9] B. Bäumer, G. Lumer, and F. Neubrander. *Convolution kernels and generalized functions, Generalized Functions*, Operator Theory, and Dynamical Systems (Brussels, 1997), Chapman Hall/CRC Res. Notes Math., vol. 399, Chapman Hall/CRC, Florida, (1999), 6878.

[10] S. Bochner. *Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles*. Rendiconti del Seminario Matematico, Universita e Politecnico di torino. **15**, (1955/6), 238-240.

[11] S. Bochner. *Uniform convergence of monotone sequences of functions*. Proc. Nat. Acad. Sc; U.S.A. **46**, (1961) 582-585.

[12] S. Bochner. *A new approach to almost periodicity*. Proc. Nat. Acad. Sc; U.S.A. **48**, (1962) 2039-2043.

[13] S. Bochner. *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions*. Proc. Nat. Acad. Sc; U.S.A. **52**, (1964) 907-910.

[14] D. Bugajewski, T. Diagana. *Almost automorphy of the convolution operator and applications to differential and functional differential equations*, Nonlinear Stud., **13** (2) (2006), 129-140.

[15] S. Calzadillas, C. Lizama. *Bounded mild solutions of perturbed Volterra equations with infinite delay.* Nonlinear Analysis, Series A, Theory, Methods & Applications, **72**, (2010) 3976-3983.

[16] Ph. Clément. *On abstract Volterra equations with completely positive kernels in infinite dimensional systems,* Springer, Lecture Notes **1076**, 32-40 (1984).

[17] Ph. Clément, G. Da Prato. *Existence and regularity results for an integral equation with infinite delay in a Banach space.* Integral Equations Operator Theory **11** (4), 480-500 (1988).

[18] C. Corduneanu. *Almost periodic functions*, Chelsea Publishing Company New York, N. Y. (1989).

[19] T. Diagana, H. Henriquez, E. M. Hernández. *Almost automorphic mild solutions to some partial neutral functional-differential equations and applications* Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, **69**, (2008) 1485-1493.

[20] J. N. Dunford y J. T. Schwartz. *Linear Operators*, volumen 7 de Pure Appl. Math. Interscience Inc., New York (1957).

[21] L. C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. Graduate Studies in Mathematics, Volume 19 (1998).

[22] S. Fatajou, M. V. Minh, G.M. N'Guérékata, and A. Pankov. *Stepanov-like almost automorphic solutions for nonautonomous evolution equations,* Electron. J. Differential Equations, 2007, No. 121, 11 pp. (electronic).

[23] J. Favard. *Sur les equations differentielles lineaires a coefficients presque-periodiques.* Acta Math. **51**, (1928) 31-81.

[24] A. M. Fink. *Almost automorphic and almost periodic solutions which minimize functionals.* Tohoku Math. Journ. **20**, (1968) 323-332.

[25] C. G. Gal, S. G. Gal and G.M. N'Guérékata. *Almost automorphic functions in Fréchet spaces and applications to differential equations,* Semigroup Forum, **71** (2) (2005),23-48.

[26] J.A. Goldstein, G.M. N'Guérékata. *Almost automorphic solutions of semilinear evolution equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **133** (8) (2005), 2401-2408.

[27] R. Grimmer, G. Seifert. *Stability properties of Volterra integrodifferential equations.* J. Differential Equations **19** (1), 142-166 (1975).

[28] R. Grimmer y J. Prüss. *On linear Volterra equations in Banach spaces*, J. Comp. Appl. Math., 11:189-205, (1985).

[29] G. Gripenberg, S-O Londen, O. Staffans. *Volterra Integral and Functional Equations.* Encyclopedia of Mathematics and Applications, 34, Cambridge University Press, Cambridge-New York, (1990).

[30] H. R. Henríquez, C. Lizama. *Compact almost periodic solutions to integral equations with infinite delay*, preprint.

[31] Y. Hino, S. Murakami. *Almost automorphic solutions for abstract functional differential equations,* J. Math. Anal. Appl. **286** (2003) 741-752

[32] H. Kellermann and M. Hieber. *Integrated semigroups*, J. Funct. Anal. 84 (1989), 160-180.

[33] M. Kim. *Abstract Volterra Equations*, Tesis Doctoral, Louisiana State University, Baton Rouge, (1995).

[34] J.J. Levin. *Nonlinearly perturbed Volterra equations.* Tôhoku Math. J. **32** (2), 317-335 (1980).

[35] J. Liang, J. Zhang, T.J. Xiao. *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions.* J. Math. Anal. Appl. **340** (2) (2008), 1493–1499.

[36] J. Liu, G.M. N'Guérékata, N. van Minh. *Almost automorphic solutions of second order evolution equations,* Appl. Anal. **84** (11) (2005), 1173-1184.

[37] C. Lizama. *Regularized solutions for abstract Volterra equations* Journal of Mathematical Analysis and Applications **243**, 278-292 (2000).

[38] C. Lizama. *Regularized solutions for abstract Volterra equations.* J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 278-292.

[39] C. Lizama. *On approximation and representation of k-regularized resolvent families.* Integral Equations Operator Theory **41** (2), (2001), 223-229.

[40] C. Lizama, J. Sánchez. *On perturbation of k-regularized resolvent families.* Taiwanese J. Math. **7** (2), (2003), 217-227.

[41] C. Lizama, V. Poblete. *On multiplicative perturbation of integral resolvent families.* J. Math. Anal. Appl., **327** (2) (2007), 1335-1359.

[42] R.K. Miller, J.A. Nohel, J.S.W. Wong. *Perturbations of Volterra integral equations.* J. Math. Anal. Appl. **25** , 676-691 (1969).

[43] G.M. Mophou, G. M. N'Guérékata. *On some classes of almost automorphic functions and applications to fractional differential equations*, Computers & Mathematics with Applications. **59**, Issue 3, (2010), 1310-1317.

[44] G. M. N'Guérékata. *Sur les solutions presque automorphes d'equations différentielles abstraites* Ann. SC. math. Québec, vol. V, no1, pp. 69-79 (1981).

[45] G. M. N'Guérékata *Quelques remarques sur les fonctions asymptotiquement presque automorphes*, Ann. Sci. Math. Quebec **7** (2) (1983) 185191.

[46] G. M. N'Guérékata. *Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces*, Kluwer Academic/Plenum Publishers New York (2001).

[47] G. M. N'Guérékata. *Topics in almost automorphic*, Springer, Inc. New York (2005).

[48] J.W. Nunziato. *On heat conduction in materials with memory.* Quart. Appl. Math. **29** , 187-204 (1971).

[49] H. Oka. *Linear Volterra equations and integrated solution families*, Semigroup Forum 53, (1996) 278-297.

[50] J. Prüss. *Lineare Volterra Gleichungen in Banach-Räumen*, Habilitationsschrift, Universität-GH Paderborn, (1984)

[51] J. Prüss. *Positivity and regularity of hyperbolic Volterra equations in Banach spaces*, Math. Ann. **279**, (1987) 317-344.

[52] J. Prüss. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Monograph Math., 87, Birkhäuser Verlag, (1993).

[53] D. Sforza. *Existence in the large for a semilinear integrodifferential equation with infinite delay.* J. Differential Equations **120** (2), 289-303 (1995).

[54] H. M. Srivastava and R. G. Buschman. *Theory and Applications of Convolution Integral Equations*, Kluwer Academic, DordrechtrBostonrLondon, (1992).

[55] W. A. Veech. *Almost automorphic functions*. Proc. Nat. Acad. Sc; U.S.A. **49**, (1963) 462-464.

[56] K. Yosida. *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag. Berlin, (1980).

[57] S.Y.Shaw, J.C. Chen. *Asymptotic behavior of* (a, k)*-regularized families at zero,* Taiwanese J. Math. **10** (2) (2006), 531-542.

[58] S. Zaidman. *Almost automorphic solutions of some abstract evolution equations II,* Instit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **111** (2) (1977), 260 - 272.