

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA
COMPUTACIÓN



**Estabilidad exponencial de sistemas de ecuaciones
diferenciales en escalas temporales con aplicación a un
modelo económico**

Jorge Alfonso Pereira Cares

Profesor Guía:

Dr. Carlos Lizama

Trabajo de titulación para optar al
título profesional de Ingeniero Matemático

Santiago - Chile

2016

© Jorge Alfonso Pereira Cares.

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.



**Estabilidad exponencial de sistemas de ecuaciones
diferenciales en escalas temporales con aplicación a un
modelo económico**

JORGE ALFONSO PEREIRA CARES

El presente trabajo fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Carlos Lizama. Adicionalmente, el comité evaluador es formado por el Dr. y el Dr. .

.....

Profesor Guía: Dr. Carlos Lizama

.....

Profesor Informante:

.....

Profesor Informante:

.....

Director Departamento: Mg. Pedro Marín

Resumen

Este trabajo trata una teoría denominada teoría de escalas temporales. Una escala temporal \mathbb{T} no es más que un subconjunto cerrado no vacía de los números reales. Dentro de este marco definimos el operador $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ como $\sigma(t) = \text{Inf}\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, y con ello la función $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ como $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cualquiera y \mathbb{T} es una escala temporal arbitraria, vamos a denotar como f^Δ a la derivada bajo la teoría de escalas temporales de f , a esta derivada la llamaremos la delta derivada de f . La definición de la delta derivada nos permitirá definir ecuaciones diferenciales, las cuales al igual que en el cálculo convencional consistiran en ecuaciones donde se verán involucradas derivadas (delta derivadas en nuestro caso) y donde las incógnitas son funciones. Definimos el problema de valor inicial $y^\Delta = p(t)y$ con $y(t_0) = 1$ y llamaremos a esta solución la función exponencial asociada a la escala temporal dada, la cual será denotada por $e_p(\cdot, t_0)$. Vamos a considerar ahora sistemas de ecuaciones diferenciales en escalas temporales, estudiaremos sistemas del tipo

$$x^\Delta = Ax. \tag{0.0.1}$$

Nos enfocaremos en estudiar la estabilidad exponencial de este tipo de sistemas, definimos el conjunto de estabilidad $S(\mathbb{T}) = \mathbb{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) \cup \mathbb{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, donde

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t > 0 \right\}$$

y

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) := \{ \lambda \in \mathbb{R} | \forall T \in \mathbb{T} : \exists t \in \mathbb{T} \text{ con } t > T \text{ tal que } 1 + \mu(t)\lambda = 0 \}.$$

Mediante la definición de este conjunto presentamos una caracterización espectral para la estabilidad

exponencial del sistema (0.0.1), esta caracterización dice que si \mathbb{T} es una escala temporal acotada superiormente y $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$, $\sigma(A)$ el espectro de A , entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.

- i. Si (0.0.1) es exponencialmente estable, entonces $\sigma(A) \subset S(\mathbb{T})$.
- ii. Si $\sigma(A) \subset S(\mathbb{T})$, la escala temporal \mathbb{T} tiene una función μ acotada y para todo $\lambda \in \sigma(A)$ con λ defectivo (i.e, la multiplicidad geométrica y algebraica no coinciden) el sistema escalar $x^\Delta = \lambda x$ es uniformemente exponencialmente estable, entonces (0.0.1) es exponencialmente estable.
- iii. Si A es diagonalizable, entonces el sistema (0.0.1) es exponencialmente estable si y sólo si $\sigma(A) \subset S(\mathbb{T})$.

Aplicamos lo anterior a un modelo de ciclos económicos propuesto por el economista Paul Samuelson en 1939, este modelo propone que si Y es el ingreso nacional de un país o región y G es el gasto de gobierno, entonces se cumple la siguiente relación

$$Y_t - b(1 + \beta)Y_{t+1} + b\beta Y_{t-2} = G_t, \quad (0.0.2)$$

donde b y β son constantes. Cabe destacar que este modelo considera una economía cerrada, lo cual en la práctica no es muy real, sin embargo este modelo resulta ser la base para todos los estudios posteriores en el ambito de ciclos económicos.

Queremos generalizar este modelo a escalas temporales y analizar la estabilidad exponencial de la ecuación. Para cumplir este objetivo consideramos primero una forma general de un modelo multiplicador-acelerador, suponiendo una economía abierta y usando una escala temporal arbitraria. El modelo es el siguiente

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{c + \sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} \mu (m - \tau - d) - d}{1 + \mu c} Y^\Delta + \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} (m - \tau - d)}{1 + \mu c} Y = \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\gamma}}{1 + \mu c} A^{\sigma\sigma}, \quad (0.0.3)$$

donde las constantes que aparecen son explicadas con detalle en el contenido de este trabajo.

Para obtener el modelo de Samuelson generalizado a escalas temporales, consideramos en (0.0.3) $m = 0$, $\tau = 0$, $A_0 = 0$, $X_0 = 0$ y $\gamma = \beta$. Así obtenemos la ecuación

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{c - d \left(1 + \sigma^\Delta \frac{1}{\beta} \mu\right)}{1 + \mu c} Y^\Delta - \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\beta} d}{1 + \mu c} Y = \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\beta}}{1 + \mu c} G^{\sigma\sigma}. \quad (0.0.4)$$

Analizamos la estabilidad exponencial del modelo (0.0.4) transformándolo al sistema siguiente

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}^\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad (0.0.5)$$

donde $p = \frac{c-d(1+\sigma^{\frac{1}{\beta}}\mu)}{1+\mu c}$ y $q = -\frac{\sigma^{\frac{1}{\beta}}d}{1+\mu c}$.

Para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h > 0$ se concluye que la región de estabilidad exponencial esta dada por las desigualdades $q > 0$, $h^2q - 2hp + 4 > 0$ y $hq < p$.

Si la escala temporal es $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ entonces las desigualdades que determinan la región de estabilidad exponencial son $q > 0$ y $p > 0$.

También se obtuvieron las regiones de estabilidad exponencial para el caso $\mathbb{T}_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$. Resultados los cuales se encuentran en detalle dentro del trabajo.

Además dentro de este documento se estableció un modelo de economía abierta sin impuesto y se procedió a analizar su estabilidad exponencial.

En el capítulo 1 se presenta una introducción al trabajo realizado, mostrando las motivaciones que llevaron a la realización de la tesis, como también los objetivos de ésta.

En el capítulo 2 se comienza con los conceptos básicos de escalas temporales, se definen operadores fundamentales dentro de esta teoría como lo son el operador de avance y de retroceso. Se aborda cómo funciona la diferenciación y la intergración bajo esta teoría y se finaliza con una generalización de la regla de la cadena.

En el capítulo 3 se comienza con la definición del plano complejo de Hilger para luego pasar a una de las definiciones más importantes dentro de la teoría, como lo es la función exponencial, se muestran variados resultados al respecto, así como también ejemplos. Luego se habla de los problemas de valores iniciales, en donde se estudia la ecuación diferencial lineal no homogénea en escalas temporales, se generalizan teoremas conocidos en \mathbb{R} como lo es el teorema de variación de constantes.

Ya en el capítulo 4 nos adentramos en la teoría de estabilidad exponencial en escalas temporales. El objetivo del capítulo es estudiar la estabilidad exponencial de sistemas de ecuaciones lineales

invariantes en el tiempo. Se muestran resultados para establecer los llamados conjuntos de estabilidad exponencial y se muestran ejemplos de cómo obtenerlos para diferentes escalas. Por último se muestra una caracterización espectral, en donde se querrá mostrar resultados que nos permitan establecer condiciones bajo las cuales un sistema lineal invariante en el tiempo es exponencialmente estable usando el espectro de la matriz en cuestión.

En el capítulo 5 se muestra el modelo multiplicador-acelerador de Samuelson, y se hace una extensión de dicho modelo a escalas temporales. Se comienza con un modelo multiplicador acelerador general y con este derivamos la extensión del modelo de Samuelson deseada. Luego de tener el modelo se aplica la teoría expuesta en el capítulo anterior. Transformamos la ecuación en un sistema lineal invariante en el tiempo y obtenemos las condiciones necesarias para obtener estabilidad exponencial para distintos tipos de escalas, además se muestran las regiones de estabilidad.

Tabla de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivos generales	3
1.2.2. Objetivos específicos	3
2. Cálculo en escalas temporales	5
2.1. Conceptos básicos	5
2.2. Diferenciación	7
2.3. Ejemplos	16
2.4. Integración	18
2.5. Regla de la cadena	25
3. Ecuaciones lineales de primer orden	29
3.1. Large Plano complejo de Hilger	29
3.2. La función exponencial	35
3.3. Ejemplos	41

3.4. Problemas de valor inicial	44
4. Estabilidad exponencial de sistemas lineales invariantes en el tiempo: una caracterización espectral	49
4.1. Preliminares	49
4.2. El conjunto de estabilidad exponencial	50
4.2.1. Ejemplos	52
4.3. Caracterización espectral	53
5. Un modelo multiplicador-acelerador en escalas temporales	59
5.1. Preliminares	59
5.2. Forma expansiva del modelo multiplicador-acelerador general	60
5.3. Análisis de la estabilidad exponencial para el modelo básico de Samuelson	63
5.3.1. Primera escala temporal	64
5.3.2. Segunda escala temporal	68
5.3.3. Tercera escala temporal	69
5.4. Análisis de la estabilidad exponencial para el modelo de economía abierta sin impuestos	71
5.4.1. Primera escala temporal	71
5.4.2. Segunda escala temporal	72
6. Conclusiones	77
Bibliografía	79

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo vamos a adentrarnos en una teoría que cada vez tiene más importancia en matemática, hablamos de la teoría de escalas temporales. Comenzaremos exponiendo lo básico de esta teoría, aspectos fundamentales, hasta llegar a la formulación de ecuaciones diferenciales. Toda esto será respaldado por los estudios realizados por BOHNER & PETERSON en el libro [1]. Este libro es de los más completos en el ámbito y no puede faltar un ningún trabajo que tenga que ver con este tema. Posteriormente vamos a enfocarnos no tanto en la resolución de ecuaciones diferenciales, sino que en su comportamiento. Es aquí donde nos adentramos en un tema muy relevante en el estudio de cualquier tipo de ecuación diferencial, como lo es la estabilidad.

Estudiaremos un caso en particular y obtendremos resultados bastante interesantes respecto a este tema, todo con la ayuda del artículo de POTZSCHE, SIEGMUND & WIRTH [2]. Se hace referencia también dentro de este contexto a HILGER [3].

Posteriormente, nos pasamos de la teoría a una aplicación a un modelo de economía muy famoso en el área de los ciclos económicos, este modelo se llama el modelo multiplicador - acelerador de Samuelson y modela el ingreso monetario de un país. Este modelo esta descrito en SAMUELSON [4] y es el que usaremos en este trabajo, destacamos también el libro de GABISCH & LORENZ [5], el cual aborda de manera más detallada los modelos de ciclos económicos.

Vamos a generalizar el modelo anterior, el cual muestra una ecuación en diferencias, a una ecuación diferencial en escalas temporales, dicho modelo se encuentra en el artículo de BOHNER, GELLES &

HEIM [6]. Al tener ya descrito nuestro modelo vamos a aplicar la teoría de estabilidad que habíamos expuesto anteriormente.

Citamos el libro de ecuaciones en diferencias ELAYDI[7], el cual fue útil para poder hacer comparaciones con el caso de tener como escala a los números enteros.

1.1. Motivación

La teoría de escalas temporales es una teoría reciente en matemática, la cual fue expuesta por primera vez en el año 1988 en la tesis doctoral de Stefan Hilger como una forma de unificar el análisis continuo y discreto. La idea general es probar resultados sobre dominios que sean lo que llamaremos una escala temporal, que no es más que un subconjunto cerrado no vacío de \mathbb{R} , por ejemplo si tenemos una ecuación dinámica, consideramos como dominio de la función desconocida una escala temporal. Lo interesante es que teniendo un resultado en una escala temporal podemos ir del caso de una ecuación diferencial al caso de una ecuación en diferencias de una forma simple, sólo basta cambiar la escala de \mathbb{R} a \mathbb{Z} o viceversa. Sin embargo, lo más interesante es que no sólo tenemos estas dos escalas temporales, sino que tenemos infinitas más, lo que nos proporciona una herramienta tremendamente poderosa de generalización.

El cálculo en escalas temporales tiene bastantes aplicaciones, basta pensar que lo que usualmente se estudia son los casos continuos y discretos para describir diferentes fenómenos, y que sin embargo, si miramos en la vida real, pocos de éstos se comportan tan bien como para que un modelo continuo o discreto lo represente a cabalidad, y es que en la naturaleza y en las ciencias sociales no todo sigue ciclos tan uniformes.

Esa es la principal razón que motiva al estudio de escalas temporales, pues con esta teoría se pueden generar modelos mucho más precisos, sólo basta encontrar la escala temporal que represente la situación que estamos estudiando.

Por ejemplo una situación donde no podemos usar un conjunto continuo o discreto para modelarla

es la del caso de un circuito simple, donde suponemos que se descarga el capacitor periodicamente cada unidad de tiempo y asumimos que esta descarga demora δ unidades de tiempo.

Entonces para modelar esta situación tendríamos que usar la escala

$$\mathbb{T} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k+1-\delta] .$$

Así como éstos hay muchos fenómenos que nos podemos encontrar, los cuales pueden variar en sus complejidades y que gracias a la teoría de escalas temporales podemos entenderlos de mejor forma.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivos generales

- Comprender y masificar la teoría de escalas temporales y su importancia.
- Mostrar la aplicabilidad de la teoría de escalas temporales.

1.2.2. Objetivos específicos

- Entregar una generalización del cálculo que todos conocemos.
- Mostrar el concepto de función exponencial en escalas temporales.
- Explicar de qué forma es posible generalizar las ecuaciones dináminas en los números reales y enteros.
- Encontrar resultados sobre la estabilidad exponencial de ecuaciones diferenciales en escalas temporales.
- Mostrar cómo se puede generalizar el modelo económico de Samuelson en diferencias a uno en escalas temporales.
- Estimar condiciones de estabilidad exponencial para el modelo de Samuelson en escalas temporales.

- Encontrar regiones de estabilidad para dicho modelo.

Capítulo 2

Cálculo en escalas temporales

2.1. Conceptos básicos

Una escala temporal es un subconjunto cerrado no vacío de \mathbb{R} . Por ejemplo, los conjuntos \mathbb{R} , \mathbb{Z} , \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , $[0, 1] \cup [2, 3]$ y el conjunto de Cantor son escalas temporales.

Observación. Se asume que una escala temporal, la cual será denotada por \mathbb{T} en lo que sigue, tiene la topología inducida por \mathbb{R} con la topología usual.

Definición 2.1.1. Sea \mathbb{T} una escala temporal. Para $t \in \mathbb{T}$ definimos el operador de avance $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ como

$$\sigma(t) = \text{Inf}\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

mientras que definimos el operador de retroceso $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ como

$$\rho(t) = \text{Sup}\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

En la definición ponemos $\text{Inf}\emptyset = \text{Sup}\mathbb{T}$ (i.e., $\sigma(t) = t$ si \mathbb{T} tiene un máximo t) y $\text{Sup}\emptyset = \text{Inf}\mathbb{T}$ (i.e., $\rho(t) = t$ si \mathbb{T} tiene un mínimo t).

Los puntos de una escala temporal se pueden clasificar de la siguiente forma:

- i. t es discreto a la derecha si $t < \sigma(t)$;
- ii. t es denso a la derecha si $t = \sigma(t)$;
- iii. t es discreto a la izquierda si $\rho(t) < t$;
- iv. t es denso a la izquierda si $\rho(t) = t$;
- v. t es aislado si $\rho(t) < t < \sigma(t)$;
- vi. t es denso si $\rho(t) = t = \sigma(t)$.

Definición 2.1.2. Definimos la función $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ como

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Definición 2.1.3. Definimos el conjunto \mathbb{T}^k como sigue

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\text{Sup}\mathbb{T}), \text{Sup}\mathbb{T}] & \text{si } \text{Sup}\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si } \text{Sup}\mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - m & \text{si } m = \text{Sup}\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si } \text{Sup}\mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Finalmente si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, luego definimos la función $f^\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)),$$

i.e., $f^\sigma = f \circ \sigma$.

Ejemplo 2.1.4. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ tenemos que para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\sigma(t) = \text{Inf}\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \text{Inf}(t, \infty) = t,$$

similarmente $\rho(t) = t$. Por lo tanto para todo $t \in \mathbb{R}$, t es denso y $\mu(t) = 0$.

Ejemplo 2.1.5. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, tenemos que para cualquier $t \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(t) = \text{Inf}\{s \in \mathbb{Z}, s > t\} = \text{Inf}\{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1,$$

análogamente se tiene que $\rho(t) = t-1$. Luego cada punto en \mathbb{Z} es aislado y $\mu(t) = 1$.

Ejemplo 2.1.6. Sea $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Encontrar σ , ρ , μ y clasificar cada punto.

Si $n = 0$ entonces $t = 2^0 = 1$, luego $\sigma(t) = \sigma(1) = 2$. Si $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, ponemos $t = 2^n$ y tenemos que $\sigma(t) = \sigma(2^n) = 2^{n+1} = 2t$.

Notamos además que $\sigma(0) = \text{Inf}\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = 0$. Así en tenemos que $\sigma(t) = 2t, \forall t \in \mathbb{T}$.

De forma análoga, se obtiene que $\rho(t) = t/2$. La función μ es $\mu(t) = \sigma(t) - t = 2t - t = t$.

Clasifiquemos los puntos:

- $t = 0 \Rightarrow \sigma(t) = 0$ y $\rho(t) = 0$. Luego $t = 0$ es denso.
- Como $t < 2t, \forall t > 0 \Rightarrow t < \sigma(t)$. Por lo tanto t es discreto a la derecha $\forall t \in \mathbb{T}$.
- Como $t/2 < t \forall t \in \mathbb{T} \Rightarrow \rho(t) < t \forall t \in \mathbb{T}$. Así, para todo $t \in \mathbb{T}$ se tiene que t es discreto a la izquierda.

2.2. Diferenciación

Definición 2.2.1. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, y sea $t \in \mathbb{T}^k$, definimos $f^\Delta(t)$ como el número con la propiedad de que dado $\epsilon > 0$, existe una vecindad U de t (i.e., $U = (t-\delta, t+\delta)$ para algun $\delta > 0$) tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|.$$

Llamamos $f^\Delta(t)$ la delta derivada de f en t .

Podemos generalizar la definición anterior de la siguiente forma. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una función, decimos que f es delta diferenciable en \mathbb{T}^k siempre que $f^\Delta(t)$ exista para todo $t \in \mathbb{T}^k$. Una función $f^\Delta : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ será llamada la delta derivada de f en \mathbb{T}^k .

Ejemplo 2.2.2. Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como $f(t) = \alpha$ para todo t en \mathbb{T} con α constante, entonces $f^\Delta(t) = 0$.

En efecto, dado $\epsilon > 0$, por definición de delta derivada se tiene

$$|(\alpha - \alpha) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

equivalentemente

$$|f^\Delta(t)||\sigma(t) - s| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

luego

$$|f^\Delta(t)| \leq \epsilon$$

con lo cual se obtiene

$$f^\Delta(t) = 0$$

Ejemplo 2.2.3. Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $f(t) = t$ para todo t en \mathbb{T} , entonces $f^\Delta(t) = 1$.

En efecto, si tomamos $\epsilon > 0$ se obtiene

$$|\sigma(t) - s - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

de donde

$$|(\sigma(t) - s)(1 - f^\Delta(t))| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

así

$$|1 - f^\Delta(t)| \leq \epsilon$$

con lo que se concluye que

$$f^\Delta(t) = 1.$$

Teorema 2.2.4. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $t \in \mathbb{T}^k$, luego se tiene lo siguiente

- i. Si f es diferenciable en t , luego f es continua en t .
- ii. Si f es continua en t y t es discreto a la derecha, luego f es diferenciable en t con

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

- iii. Si t es denso a la derecha, luego f es diferenciable en t si y sólo si el límite

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe. En este caso $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$.

- iv. Si f es diferenciable en t , entonces

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

Demostración. A continuación probaremos cada uno de los incisos expuestos previamente.

- i. Asumimos f diferenciable en t . Sea $\epsilon \in (0, 1)$. Definimos

$$\epsilon^* = \epsilon |1 + |f^\Delta(t)| + 2\mu(t)|^{-1},$$

luego $\epsilon^* \in (0, 1)$. Por Definición 2.2.1 existe una vecindad U de t tal que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]f^\Delta(t)| \leq \epsilon^* |\sigma(t) - s|, \forall s \in U,$$

por lo tanto tenemos que $s \in U \cap (t - \epsilon^*, t + \epsilon^*)$. Además

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| &= |\{f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]\} - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^\Delta(t)\} \\
&\quad + (t - s)f^\Delta(t)| \\
&\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| + |f(\sigma(t)) - f(t) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - t)| \\
&\quad + |f^\Delta(t)||t - s| \\
&\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s| + \epsilon^*\mu(t) + \epsilon^*|f^\Delta(t)| \\
&= \epsilon^*[\sigma(t) - s + \mu(t) + |f^\Delta(t)|] \\
&\leq \epsilon^*[\sigma(t) - t + |t - s| + \mu(t) + |f^\Delta(t)|] \\
&= \epsilon^*[2\mu(t) + |t - s| + |f^\Delta(t)|] \\
&\leq \epsilon^*[2\mu(t) + \epsilon^* + |f^\Delta(t)|] \\
&\leq \epsilon^*[1 + 2\mu(t) + |f^\Delta(t)|] \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que f es continua en t .

ii. Supongamos f continua en t y t discreto a la derecha. Por continuidad tenemos

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)},$$

luego dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de t tal que

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| \leq \epsilon,$$

para todo $s \in U$. Se sigue que

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}[\sigma(t) - s] \right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in U$. De lo último se concluye que $f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$.

iii. Asumimos f diferenciable en t con t denso a la derecha. Sea $\epsilon > 0$ dado, como f es diferenciable en t , existe una vecindad U de t tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in U$. Como $\sigma(t) = t$ se tiene que

$$|f(t) - f(s) - f^\Delta(t)(t - s)| \leq \epsilon |t - s|,$$

para $s \in U$. Así

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^\Delta(t) \right| \leq \epsilon,$$

para todo $s \in U$. Se concluye entonces que

$$f^\Delta(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

iv. Si $\sigma(t) = t$ entonces $\mu(t) = 0$, tenemos

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

Por otra parte, si $\sigma(t) > t$, se tiene por (ii)

$$\begin{aligned} f(\sigma(t)) &= f(t) + \mu(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \\ &= f(t) + \mu(t)f^\Delta(t). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.5. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Por Teorema 2.2.4 parte (iii) tenemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $t \in \mathbb{R}$ si

$$f'(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe. i.e., si y sólo si f es diferenciable (en el caso estándar) en t . En este caso tenemos

$$f^\Delta(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

Ejemplo 2.2.6. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ tenemos por Teorema 2.2.4 parte (ii) que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $t \in \mathbb{Z}$ con

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = \Delta f(t),$$

donde el operador Δ es el operador de diferenciación definido en la ecuación anterior.

Ejemplo 2.2.7. Sea $\mathbb{T} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \sigma(t)$. Encontrar $f^\Delta(t)$.

Notamos primero que $\sigma(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-1}$. Ponemos $t = \frac{1}{n}$ y obtenemos que $\sigma(t) = \frac{t}{1-t}$. Usamos entonces Teorema 2.2.4 parte (iv) y llegamos a

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f\left(\frac{t}{1-t}\right) - f(t)}{\frac{t}{1-t} - t} = \frac{\frac{t}{1-t} - t}{\frac{t}{1-t} - t} = \frac{1}{1-2t}.$$

El siguiente teorema nos entrega algunas propiedades de la delta derivada.

Teorema 2.2.8. Sean $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $t \in \mathbb{T}^k$. Entonces

- i. La suma $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en t con

$$(f + g)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t).$$

- ii. Para cualquier constante α , $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en t y se tiene

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t).$$

- iii. El producto $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en t y se tiene

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

- iv. Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$. Luego $\frac{f}{f}$ es diferenciable en t y se tiene

$$\left(\frac{f}{f}\right)^\Delta(t) = \frac{-f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

- v. Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$. Luego $\frac{f}{g}$ es diferenciable y

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Demostración. Se probarán todas las propiedades enunciadas anteriormente

- i. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis existen vecindades U_1 y U_2 tales que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon/2|\sigma(t) - s|, \forall s \in U_1.$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon/2|\sigma(t) - s|, \forall s \in U_2.$$

Sea $U = U_1 \cap U_2$. Tenemos para todo $s \in U$,

$$\begin{aligned}
& |(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - [f^\Delta(t) + g^\Delta(t)](\sigma(t) - s)| \\
&= |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\
&\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| + |g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\
&\leq \epsilon/2|\sigma(t) - s| + \epsilon/2|\sigma(t) - s| \\
&\leq \epsilon|\sigma(t) - s|,
\end{aligned}$$

de donde se concluye lo pedido.

ii. Como f es diferenciable, existe vecindad U tal que para todo $s \in U$

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\epsilon}{|\alpha|} |\sigma(t) - s|, \alpha \neq 0.$$

Además

$$\begin{aligned}
& |(\alpha f)(\sigma(t)) - (\alpha f)(s) - \alpha f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\
&= |\alpha f(\sigma(t)) - \alpha f(s) - \alpha f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\
&= |\alpha| \frac{\epsilon}{|\alpha|} |\sigma(t) - s| \\
&= \epsilon |\sigma(t) - s|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente $\alpha f^\Delta(t) = (\alpha f)^\Delta(t)$.

iii. Sea $\epsilon \in (0, 1)$ y definimos

$$\epsilon^* := \epsilon [1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^\Delta(t)|]^{-1}$$

entonces $\epsilon^* \in (0, 1)$. Existen además vecindades U_1, U_2 y U_3 tales que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon^* |\sigma(t) - s|, \forall s \in U_1,$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon^* |\sigma(t) - s|, \forall s \in U_2,$$

y además por Teorema 2.2.4,

$$|f(t) - f(s)| \leq \epsilon^*, \forall s \in U_3.$$

Sea $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, y sea $s \in U$, entonces

$$\begin{aligned}
& |(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - [f^\Delta(t)(g(\sigma(t)) + f(t)g^\Delta(t))](\sigma(t) - s)| \\
&= |[f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]g(\sigma(t)) + [g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)]f(t) \\
&+ [g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)][f(s) - f(t)] + (\sigma(t) - s)g^\Delta(t)[f(s) - f(t)] \\
&\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s||g(\sigma(t))| + \epsilon^*|\sigma(t) - s||f(t)| \\
&+ \epsilon^*\epsilon^*||\sigma(t) - s| + \epsilon^*|\sigma(t) - s||g^\Delta(t)| \\
&= \epsilon^*|\sigma(t) - s|[|g(\sigma(t))| + |f(t)| + \epsilon^* + |g^\Delta(t)|] \\
&\leq |\sigma(t) - s|[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^\Delta(t)|] \\
&= |\sigma(t) - s|.
\end{aligned}$$

Concluimos que $(fg)^\Delta = f^\Delta g^\sigma + fg^\Delta$.

iv. Notamos que $f(t)\frac{1}{f(t)} = 1$, de donde $\left(f(t)\frac{1}{f(t)}\right)^\Delta = 0$. Por Teorema 2.2.8 parte (iii) tenemos

$$f^\Delta(t)\frac{1}{f(t)} + (f\sigma(t))\left(\frac{1}{f(t)}\right)^\Delta = 0.$$

Se concluye así que $\left(\frac{1}{f(t)}\right)^\Delta = \frac{-f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$.

v. Usando Teorema 2.2.8 partes (iii) y (iv) se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)^\Delta \\
&= f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^\Delta + f^\Delta(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= \frac{-f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^\Delta(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= \frac{-f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.9. Sea α una constante real y $m \in \mathbb{N}$ dados

i. Para f definida por $f(t) = (t - \alpha)^m$ tenemos

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-1-v}.$$

ii. Para g definida por $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ tenemos

$$g^\Delta(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t) - \alpha)^{m-v}(t - \alpha)^{v+1}},$$

siempre que $(\sigma(t) - \alpha)(t - \alpha) \neq 0$.

Demostración. Probaremos la primera fórmula por inducción. Si $m = 1$, luego $f(t) = t - \alpha$, de donde $f^\Delta(t) = 1$. Ahora asumimos que la identidad

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-1-v}$$

es cierta para $f(t) = (t - \alpha)^m$. Definamos ahora $F(t) := (t - \alpha)^{m+1} = (t - \alpha)f(t)$. Usamos la regla de derivación del producto para obtener

$$\begin{aligned} F(t)^\Delta &= f(\sigma(t)) + (t - \alpha)f^\Delta(t) \\ &= (\sigma(t) - \alpha)^m + (t - \alpha) \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-1-v} \\ &= (\sigma(t) - \alpha)^m + \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-v} \\ &= \sum_{v=0}^m (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-v}, \end{aligned}$$

probando lo pedido.

Ahora para $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^\alpha} = \frac{1}{f(t)}$, aplicamos Teorema 2.2.8 parte (iv) y se obtiene

$$\begin{aligned} g^\Delta(t) &= \frac{-f^\Delta(t)}{f(t)f^\sigma(t)} = \frac{-\sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v (t - \alpha)^{m-1-v}}{(t - \alpha)^m (\sigma(t) - \alpha)^m} \\ &= - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(t - \alpha)^{v+1} (\sigma(t) - \alpha)^{m-v}}, \end{aligned}$$

donde $(t - \alpha)(\sigma(t) - \alpha) \neq 0$. Esto prueba la propiedad y el teorema. □

Definamos ahora derivadas de orden superior para funciones en escalas temporales.

Definición 2.2.10. Para una función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ hablaremos de la segunda derivada $f^{\Delta\Delta}$ siempre que f^Δ sea diferenciable en $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^2$ con derivada $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : (\mathbb{T}^k)^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Similarmente definimos la derivada de orden superior $f^{\Delta^n} : (\mathbb{T}^k)^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Finalmente para $t \in \mathbb{T}$, denotamos $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ y $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$, además de $\sigma^n(t)$ y $\rho^n(t)$ para $n \in \mathbb{N}$ de igual forma. Por conveniencia ponemos

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t, f^{\Delta^0} = f, \mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}.$$

Ejemplo 2.2.11. Encontrar la segunda derivada de $f(t) = t^2$.

Por Teorema 2.2.9 se tiene

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^1 (\sigma(t))^v t^{-v+1} = t + \sigma(t),$$

luego, por Teorema 2.2.8

$$f^{\Delta\Delta} = 1 + (\sigma(t))^\Delta,$$

se sigue por el Teorema 2.2.4 que

$$\sigma(\sigma(t)) = \sigma(t) + \mu(t)(\sigma(t))^\Delta,$$

finalmente se tiene

$$f^{\Delta\Delta} = 1 + \frac{\sigma^2 - \sigma}{\mu}.$$

2.3. Ejemplos

Ejemplo 2.3.1. Sea $h > 0$, consideramos la siguiente escala $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$. Vamos a calcular la primera y segunda delta derivada para una función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ cualquiera. Además obtendremos una fórmula que nos permitirá calcular las delta derivadas de orden superior.

Tenemos

$$\sigma(t) = \text{Inf}\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \text{Inf}\{h(k+1), h(k+2), h(k+3), \dots\} = hk + h = t + h.$$

De forma similar se desprende que $\rho(t) = t - h$. Tenemos así que todo punto en \mathbb{T} es aislado. Además

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h.$$

Así, en este ejemplo, μ es constante.

Ahora, dada $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, se tiene que la derivada de f es

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \frac{\Delta f}{h}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)} = \frac{f^\Delta(t+h) - f^\Delta(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

Para calcular las derivadas de orden superior, primero notamos que

$$\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t)) = \sigma(t+h) = t+2h$$

$$\sigma^3(t) = \sigma(t+2h) = t+3h$$

De donde $\sigma^n(t) = t+nh$ y $\rho^n(t) = t-nh$. Introducimos el operador Δ_h definido por

$$\Delta_h = \frac{1}{h}(\sigma - I)$$

donde I es el operador identidad.

Usando el teorema del binomio concluimos que

$$\Delta_h^n = \frac{1}{h^n}(\sigma - I)^n = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma^k (-I)^{n-k}.$$

Aplicando el operador obtenido a la función f , encontramos que

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(t+hk).$$

Esta escala temporal es de particular interés. En algunos casos podemos obtener resultados continuos i.e., para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ haciendo tender h a 0 desde el correspondiente resultado discreto ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$).

Ejemplo 2.3.2. (σ es en general no diferenciable) Se presenta un ejemplo de una escala temporal \mathbb{T} cuya función de avance $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es continua pero no diferenciable en un punto denso a la derecha.

Sea $\mathbb{T} = \{t_n = (1/2)^{2^n} : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$. Así $\sigma(t_n) = t_{n-1}$. Si hacemos $s = t_n$ entonces $\sigma(s) = (\frac{1}{2})^{2^{n-1}} = \left[(\frac{1}{2})^{2^n} \right]^{1/2} = \sqrt{s}$. Notar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_n) = 0 = \sigma(0)$ y como $\lim_{s \rightarrow 0} \sigma(s) = \sigma(0)$ tenemos continuidad de σ en 0.

Por último, se obtiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(\sigma(0)) - \sigma(s)}{\sigma(0) - s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sqrt{s}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Luego el límite no existe y se concluye entonces que σ no es diferenciable en 0.

2.4. Integración

Para describir la clase de funciones integrables introducimos los siguientes conceptos.

Definición 2.4.1. Una función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **regular** si sus límites a la derecha existen para todo punto denso a la derecha de \mathbb{T} y sus límites a la izquierda existen para todos los puntos densos a la izquierda de \mathbb{T}

Definición 2.4.2. Una función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **rd-continua** si es continua en todo punto denso a la derecha de \mathbb{T} y sus límites laterales a la izquierda existen en todo punto denso a la izquierda de \mathbb{T} . El conjunto de funciones rd-continuas $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ será denotado por

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

El conjunto de funciones $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables y cuya derivada sea rd-continua será denotado por

$$C'_{rd} = C'_{rd}(\mathbb{T}) = C'_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Teorema 2.4.3. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada

- i. Si f es continua, entonces f es rd-continua.
- ii. Si f es rd-continua, entonces f es regular.

- iii. El operador σ es rd-continua.
- iv. Si f es regular o rd-continua, entonces f^σ también lo es.
- v. Asuma f continua. Si $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es regular o rd continua, entonces $f \circ g$ tiene la misma propiedad.

Definición 2.4.4. Una función continua $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ será **pre-diferenciable** con región de diferenciabilidad D si $D \subset \mathbb{T}^k$, $\mathbb{T}^k \setminus D$ es numerable y no contiene ningún elemento discreto a la derecha de \mathbb{T} , además de ser f diferenciable en D .

Teorema 2.4.5. Toda función regular en un intervalo es acotada.

Demostración. Suponemos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in [a, b]$ con $|f(t_n)| > n$. Como $t_n \in [a, b]$, existe una subsucesión convergente $t_{n_k} \in \mathbb{N}$, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t_0$ para algún $t_0 \in [a, b]$.

Notar que $t_0 \in \mathbb{T}$ pues \mathbb{T} es cerrado. Notamos además que \mathbb{T}_0 no puede ser aislado pues estamos hablando de un límite al infinito y existe o una sucesión que tiende a t_0 por arriba o una sucesión que tiende a t_0 por abajo. En cualquiera de ambos casos tenemos que $f(t)$ cuanto $t \rightarrow t_0$ es finito por la regularidad de f , lo cual es una contradicción. \square

Teorema 2.4.6. (Teorema del valor medio) Sean f y g funciones reales definidas en \mathbb{T} , ambas pre-diferenciables en D . Supongamos que

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t), \forall t \in D,$$

entonces $|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r), \forall r, s \in \mathbb{T}, r \leq s$.

Demostración. Ver BOHNER & PETERSON [1, Teorema 1.67]. \square

Corolario 2.4.7. Sean f, g pre-diferenciables en D . Se tienen las siguientes propiedades

- i. Si U es un intervalo con extremos r y $s \in \mathbb{T}$, entonces

$$|f(s) - f(r)| = \sup_{t \in U^k \cap D} |f^\Delta(t)| |s - r|.$$

- ii. Si $f^\Delta(t) = 0, \forall t \in D$. Entonces f es constante.
- iii. Si $f^\Delta(t) = g^\Delta(t), \forall t \in D$, entonces $f(t) = g(t) + C$ donde C es una constante real.

Demostración. Suponemos f pre-diferenciable en D . Sean $r, s \in \mathbb{T}$ con $r \leq s$. Definimos

$$g(t) := \sup_{\gamma \in [r, s]^k \cap D} |f^\Delta(\gamma)|(t - r), t \in \mathbb{T}.$$

Entonces $g^\Delta(t) = \sup_{\gamma \in [r, s]^k \cap D} |f^\Delta(\gamma)| \geq |f^\Delta(t)|, \forall t \in [r, s]^k \cap D$.

Por Teorema 2.4.6, para todo $t \in [r, s]$ se tiene

$$g(t) - g(r) \geq |f(t) - f(\gamma)|.$$

Así

$$|f(s) - f(\gamma)| \leq g(s) - g(r) = g(s) = \sup_{\gamma \in [r, s]^k \cap D} |f^\Delta(t)|(s - r).$$

Esto completa la prueba. La parte **ii** se sigue de **i** y la parte **iii** de **ii**.

□

Teorema 2.4.8. (existencia de pre-antiderivada) Si f es regular entonces existe una función F pre-diferenciable de D tal que

$$F^\Delta(t) = f(t),$$

para todo $t \in D$.

Demostración. Ver BOHNER & PETERSON [1, Teorema 8.13]

□

Definición 2.4.9. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función regular. Cualquier función F que verifique $F^\Delta(t) = f(t)$ se llamará pre-antiderivada de f . Definimos la integral indefinida de una función regular como

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

donde C es una constante arbitraria y F es la pre-antiderivada de f . Definimos la integral de Cauchy como

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$$

para todo $r, s \in \mathbb{T}$.

Una función $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *antiderivada* de $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$F^\Delta(t) = f(t),$$

para todo $t \in \mathbb{T}^k$

Teorema 2.4.10. (*existencia de antiderivada*) Toda función f rd-continua tiene una antiderivada.

En particular, si $t_0 \in \mathbb{T}$ entonces F definida como

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta\tau$$

es una antiderivada de f .

Demostración. Sea f rd-continua, entonces f es regular. Sea F una función (que existe por Teorema 2.4.8) que satisface

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

para todo $t \in D$. Entonces F es pre-diferenciable en D . Debemos probar que $F^\Delta(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^k \setminus D$. Sea $t \in \mathbb{T}^k \setminus D$. Como $\mathbb{T}^k \setminus D$ no puede contener ningún punto discreto a la derecha, t debe ser denso a la izquierda. Como f es rd-continua es continua en t , así dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de t tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$$

para todo $s \in U$.

Definimos para todo $\gamma \in \mathbb{T}$, $h(\gamma) := F(\gamma) - f(t)(\gamma - t_0)$. Entonces h es pre-diferenciable en D y tenemos

$$h^\Delta(\gamma) = F^\Delta(\gamma) - f(t) = f(\gamma) - f(t)$$

para $\gamma \in D$.

De ésta última ecuación $|h^\Delta(\gamma)| = |f(\gamma) - f(t)| \leq \epsilon$ para todo $s \in D \cap U$. Por lo tanto $\sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(\gamma)| \leq \epsilon$

Entonces, por Corolario 2.4.7

$$\begin{aligned}
|F(t) - F(\gamma) - f(t)(t - \gamma)| &= |h(t) + f(t)(t - t_0) - [h(\gamma) + f(t)(\gamma - t_0) - f(t)(t - \gamma)] \\
&= |h(t) - h(\gamma)| \\
&= \sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(s)| \\
&= \epsilon |t - \gamma|
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que F es diferenciable en t con $F^\Delta(t) = f(t)$. □

Teorema 2.4.11. *Sea $f \in C_{rd}$ y $t \in \mathbb{T}^k$. La siguiente identidad se cumple*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\gamma) \Delta \gamma = \mu(t) f(t)$$

Demostración. Por Teorema 2.4.10 existe la antiderivada F de f y la siguiente identidad vale

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\gamma) \Delta \gamma = F(\sigma(t)) - F(t) = \mu(t) F^\Delta(t) = \mu(t) f(t).$$

□

Teorema 2.4.12. *Si $f^\Delta \geq 0$, entonces f es no decreciente.*

Demostración. Sea $f^\Delta \geq 0$ en $[a, b]$ y sea $s, t \in \mathbb{T}$ con $a < s < t < b$. Se cumple

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\gamma) \Delta \gamma \geq f(s).$$

□

Teorema 2.4.13. *Si $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C_{rd}$ entonces*

- i. $\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t.$
- ii. $\int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t.$
- iii. $\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_a^b f(t) \Delta t.$
- iv. $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t.$
- v. $\int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t.$

vi. $\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

vii. $\int_a^b f(t)\Delta t = 0.$

viii. Si $|f(t)| \leq g(t)$ en $[a, b]$ luego

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$$

ix. Si $f(t) \geq 0$ para todo $a \leq t \leq b$, entonces $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

Demostración. Ver BOHNER & PETERSON [1, Teorema 1.77] □

Teorema 2.4.14. Sean $a, b \in \mathbb{T}$ y $f \in C_{rd}$. Las siguientes propiedades valen

i. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

donde la integral de la derecha es la integral de Riemann usual en cálculo.

ii. Si $[a, b]$ consiste sólo en puntos aislados, luego

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t)f(t) & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\sum_{t \in [b, a)} \mu(t)f(t) & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

iii. Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ donde $h > 0$, luego

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=a/h}^{b/h-1} f(kh)h & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\sum_{k=b/h}^{a/h-1} f(kh)h & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

iv. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, entonces

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\sum_{k=b}^{a-1} f(kh)h & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

Demostración. Probaremos (i) y (ii), las partes (iii) y (iv) son casos especiales de (ii).

- i. La parte (i) se obtiene usando el teorema fundamental del cálculo y recordando que la delta derivada para una función en \mathbb{R} coincide con la derivada usual
- ii. Notamos que el intervalo $[a, b]$ contiene un número finito de puntos, ya que $[a, b]$ tiene sólo puntos aislados. Asumimos $a < b$ y sea $[a, b] = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ donde $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Por Teorema 1.21 parte (iii) se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\Delta t &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i) f(t_i) \\ &= \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) \end{aligned}$$

donde la penúltima identidad se sigue del Teorema 2.4.11 El caso $a > b$ se obtiene de forma análoga y el caso $a = b$ proviene del Teorema 2.4.13 parte (vii).

□

Definición 2.4.15. Si $a \in \mathbb{T}$, $\text{Sup}\mathbb{T} = \infty$ y f rd-continua en $[a, \infty)$ definimos la integral impropia de f como sigue

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)\Delta t.$$

Si dicho límite existe, decimos que la integral converge, en caso contrario la integral diverge.

Ejemplo 2.4.16. Notamos que la derivada de $1/t$ es $-1/t\sigma(t)$, lo cual se puede ver por Teorema 2.2.9 parte (ii). Luego $\int \frac{1}{t\sigma(t)} = -\frac{1}{t}$ implica $\int_a^b \frac{1}{t\sigma(t)} = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$. Haciendo $b \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\int_a^\infty \frac{1}{t\sigma(t)} \Delta t = \frac{1}{a}.$$

2.5. Regla de la cadena

Presentamos ahora resultados equivalentes a la regla de la cadena en escalas temporales.

Teorema 2.5.1. (regla de la cadena) Asuma que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es delta diferenciable en \mathbb{T}^k y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Entonces existe c en el intervalo real $[t, \sigma(t)]$ tal que

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c))g^\Delta(t) \quad (2.5.1)$$

Demostración. Fijemos $t \in \mathbb{T}^k$. Primero consideramos el caso donde t es discreto a la derecha. En este caso

$$(f \circ g)^\Delta = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{\mu(t)}.$$

Si $g(\sigma(t)) = g(t)$, luego tenemos $(f \circ g)^\Delta(t) = 0$ y $g^\Delta(t) = 0$ y la ecuación (2.5.1) se cumple para cualquier c en $[t, \sigma(t)]$. Asumamos ahora que $g(\sigma(t)) \neq g(t)$, entonces

$$\begin{aligned} (f \circ g)^\Delta &= \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{g(\sigma(t)) - g(t)} \cdot \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} \\ &= f'(\epsilon)g^\Delta(t), \end{aligned}$$

por el teorema del valor medio (la versión estándar), donde ϵ se encuentra entre $g(t)$ y $g(\sigma(t))$. Como $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, existe $c \in [t, \sigma(t)]$ tal que $g(c) = \epsilon$ (este último resultado se conoce como teorema del valor intermedio) lo cual nos da el resultado deseado. Consideramos ahora el caso t denso a la derecha. En este caso

$$\begin{aligned} (f \circ g)^\Delta &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{t - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} f'(\epsilon_s) \cdot \frac{g(t) - g(s)}{t - s}, \end{aligned}$$

por el teorema del valor medio en cálculo, donde $\epsilon_s \in [g(s), g(t)]$. Dado que g es continua, se obtiene que $\lim_{s \rightarrow t} \epsilon_s = g(t)$, lo que nos da el resultado deseado. \square

Presentamos ahora una regla de la cadena que calcula $(f \circ g)^\Delta$ donde $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Teorema 2.5.2. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y suponga $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ delta diferenciable. Entonces $(f \circ g) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable con*

$$(f \circ g)^\Delta = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^\Delta(t))dh \right\} g^\Delta(t)$$

Demostración. Ver BOHNER & PETERSON [1, Teorema 1.90] □

Ejemplo 2.5.3. *Definimos $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$g(t) = t^2 \quad y \quad f(x) = e^x,$$

Calculamos sus derivadas como sigue:

$$g^\Delta(t) = \frac{1}{\mu}[f(\sigma(t)) - f(t)] = (t+1)^2 - t^2 = 2t+1.$$

$$f'(x) = e^x.$$

Por Teorema 2.5.2 se tiene

$$\begin{aligned} (f \circ g)^\Delta(t) &= \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^\Delta(t))dh \right\} g^\Delta(t) \\ &= (2t+1) \int_0^1 \exp(t^2 + h(2t+1))dh \\ &= (2t+1) \int_0^1 \exp(t^2)\exp(h(2t+1))dh \\ &= (2t+1)\exp(t^2) \frac{1}{2t+1} [\exp(2t+1) - 1] \\ &= \exp(t^2)[\exp(2t+1) - 1]. \end{aligned}$$

Por otro lado es fácil ver que

$$\begin{aligned} \Delta f(g(t)) &= f(g(t+1)) - f(g(t)) \\ &= \exp((t+1)^2) - \exp(t^2) \\ &= \exp(t^2 + 2t + 1) - \exp(t^2) \\ &= \exp(t^2)[\exp(2t+1) - 1] \end{aligned}$$

Teorema 2.5.4. *Asuma que $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y sea $\bar{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ una escala temporal. Sea $w : \bar{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada. Si $v^\Delta(t)$ y $w^\Delta(v(t))$ existe para $t \in \mathbb{T}^k$, entonces $(w \circ v)^\Delta = (w^\Delta \circ v)v^\Delta$.*

Demostración. Ver BOHNER & PETERSON [1, Teorema 1.93] □

Teorema 2.5.5. *(derivada inversa) Asuma $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente y sea $\bar{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ una escala temporal. Entonces*

$$\frac{1}{v^\Delta} = (v^{-1})^\Delta \circ v$$

en todo punto donde v^Δ es diferente de cero.

Demostración. Consecuencia directa del teorema anterior. □

Teorema 2.5.6. *(sustitución) Asuma $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente y sea $\bar{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ una escala temporal. Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función rd-continua y v es diferenciable con derivada rd-continua, entonces para $a, b \in \mathbb{T}$ se tiene :*

$$\int_a^b f(t)v^\Delta(t)\Delta t = \int_{v(a)}^{v(b)} (f \circ v^{-1})(s)\bar{\Delta}s$$

Demostración. Dado que fv^Δ es rd-continua, por Teorema 2.4.10 se tiene que posee antiderivada F , i.e., $F^\Delta = fv^\Delta$ y luego

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)v^\Delta(t)\Delta t &= \int_a^b F^\Delta(t)\Delta t \\ &= F(b) - F(a) \\ &= (F \circ v^{-1})(v(b)) - (F \circ v^{-1})(v(a)) \\ &= \int_{v(a)}^{v(b)} (F^\Delta \circ v^{-1})(s)(v^{-1})^\Delta(s)\bar{\Delta}(s) \\ &= \int_{v(a)}^{v(b)} (fv^\Delta \circ v^{-1})(s)(v^{-1})^\Delta(s)\bar{\Delta}(s) \\ &= \int_{v(a)}^{v(b)} (f \circ v^{-1})(s)[(v^\Delta \circ v^{-1})(v^{-1})^\Delta](s)\bar{\Delta}s \\ &= \int_{v(a)}^{v(b)} (f \circ v^{-1})(s)\bar{\Delta}s, \end{aligned}$$

probando el teorema. □

Ejemplo 2.5.7. Usemos el teorema anterior para evaluar la integral

$$\int_0^t \left(\sqrt{r^2 + 1} + r \right) 3^{r^2} \Delta r,$$

para $t \in \mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{1/2} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Tomamos $v(t) = t^2$ para $t \in \mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{1/2}$. Entonces $v : \mathbb{N}_0^{1/2} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y $v(\mathbb{N}_0^{1/2}) = \mathbb{N}_0$ es una escala temporal. Para \mathbb{T} tenemos $\sigma(t) = \inf\{s \in T : s > t\}$. Hacemos $t = \sqrt{n}$ y queda

$$\begin{aligned} \sigma(\sqrt{n}) &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > \sqrt{n}\} \\ &= \sqrt{n+1}, \end{aligned}$$

de donde $\sigma(t) = \sqrt{t^2 + 1}$.

Luego,

$$\begin{aligned} v^\Delta(t) &= \frac{1}{\mu(t)} (v(\sigma(t)) - v(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} - t} (t^2 + 1 - t^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} - t} \\ &= \sqrt{t^2 + 1} + t. \end{aligned}$$

Así, si $f(t) = 3^{t^2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\sqrt{r^2 + 1} + r \right) 3^{r^2} \Delta r &= \int_0^t f(r) v^\Delta(r) \Delta r \\ &= \int_0^{t^2} f(\sqrt{s}) \bar{\Delta} s \\ &= \int_0^{t^2} 3^s \bar{\Delta} s \\ &= \left[\frac{1}{2} 3^s \right]_{s=0}^{s=t^2} \\ &= \frac{1}{2} (3^{t^2} - 1). \end{aligned}$$

El penúltimo paso viene del hecho de que para $t \in \bar{\mathbb{T}} = \mathbb{N}_0$ tenemos que $\sigma(t) = t + 1$, entonces si $\mu(s) = 3^s$,

$$\mu^\Delta(s) = \frac{\mu(\sigma(t)) - \mu(s)}{\mu(s)} = 3^{s+1} - 3^s = 2 \cdot 3^s.$$

Capítulo 3

Ecuaciones lineales de primer orden

3.1. Large Plano complejo de Hilger

Definición 3.1.1. *Suponga $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Entonces la ecuación*

$$y^\Delta = f(t, y, y^\sigma) \tag{3.1.1}$$

*es llamada una **ecuación dinámica de primer orden**, también aveces una **ecuación diferencial**.*

Si

$$f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y + f_2(t) \text{ o } f(t, y, y^\sigma) = f_1(t)y^\sigma + f_2(t)$$

*para funciones f_1 y f_2 , entonces (3.1.1) es llamada una **ecuación lineal**.*

Una función $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de (3.1.1) si

$$y^\Delta = f(t, y(t), y(\sigma(t))) \text{ se satisface para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

La solución general de (3.1.1) es definida como el conjunto de todas las soluciones de (3.1.1). Dado $t \in \mathbb{T}$, y $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema

$$y^\Delta = f(t, y, y^\sigma), \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.1.2)$$

es llamado problema de valor inicial o PVI y una solución y de (3.1.1) con $y(t_0) = y_0$ es la solución de este PVI.

Estudiaremos las ecuaciones dinámicas de primer orden y problemas de valor inicial para ellos. De hecho, vamos a construir la solución del problema de valor inicial

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1 \quad (3.1.3)$$

y llamaremos a esta solución la **función exponencial** asociada con la escala temporal dada.

Definición 3.1.2. Para $h > 0$ definimos los números complejos de Hilger, de la recta real de Hilger, la recta alternativa de Hilger y el círculo imaginario de Hilger como

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_h &= \{z \in \mathbb{C} : z \neq -1/h\} \\ \mathbb{R}_h &= \{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \wedge z > -1/h\} \\ \mathbb{A}_h &= \{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \wedge z < -1/h\} \\ \mathbb{I}_h &= \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\} \end{aligned}$$

respectivamente. Para $h = 0$, definimos $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 = i\mathbb{R}$ y $\mathbb{A}_0 = \emptyset$.

Definición 3.1.3. Sea $h > 0$ y $z \in \mathbb{C}_h$. Definimos la parte real de Hilger de z como

$$Re_h(z) = \frac{|zh + 1| - 1}{h}$$

y la parte imaginaria de Hilger de z como

$$Im_h(z) = \frac{Arg(zh + 1)}{h},$$

donde $Arg(z)$ denota el argumento principal de z (i. e., $-\pi < Arg(z) < \pi$).

Notar que $Re_h(z)$ y $Im_h(z)$ satisfacen

$$-\frac{1}{h} < Re_h(z) < \infty \text{ y } -\frac{\pi}{h} < Im_h(z) < \frac{\pi}{h}.$$

Definición 3.1.4. Sea $-\frac{\pi}{h} < w < \frac{\pi}{h}$. Definimos el número puramente imaginario de Hilger $\overset{\circ}{i} w$ como

$$\overset{\circ}{i} w = \frac{e^{iwh} - 1}{h}.$$

Para $z \in \mathbb{C}_h$, tenemos $\overset{\circ}{i} \text{Im}(z) \in \mathbb{I}_z$.

Teorema 3.1.5. Si $-\pi/h < w < \pi/h$ entonces

$$|\overset{\circ}{i} w|^2 = \frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \frac{wh}{2}$$

Demostración. Usamos la Definición 3.1.4 y obtenemos

$$\begin{aligned} |\overset{\circ}{i} w|^2 &= (\overset{\circ}{i} w) \overline{(\overset{\circ}{i} w)} \\ &= \left(\frac{e^{iwh} - 1}{h} \right) \left(\frac{e^{-iwh} - 1}{h} \right) \\ &= \frac{2 - e^{iwh} - e^{-iwh}}{h^2} \\ &= \frac{2 - (\cos wh + i \text{sen} wh) - (\cos wh - i \text{sen} wh)}{h^2} \\ &= \frac{2 - 2 \cos wh}{h^2} \\ &= \frac{2}{h^2} (1 - \cos wh) \\ &= \frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \frac{wh}{2} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.6. Si definimos el operador suma en círculo \oplus en \mathbb{C}_h como

$$z \oplus w = z + w + zwh$$

entonces (\mathbb{C}_h, \oplus) es un grupo abeliano.

Demostración. Veamos primero que (\mathbb{C}_h, \oplus) es cerrado. Notamos que si $z, w \in \mathbb{C}_h$, entonces $z \oplus w$ es complejo, hay que ver que $z \oplus w \neq -1/h$. En efecto,

$$\begin{aligned} 1 + h(z \oplus w) &= 1 + h(z + w + zwh) \\ &= 1 + hz + hw + hzwh \\ &= (1 + hz)(1 + hw) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Dado que $z \oplus 0 = 0 \oplus z = z$, 0 es elemento neutro. Calculamos ahora el elemento inverso de z bajo \oplus , notamos que $z \oplus w = 0$ implica que $z + w + zwh = 0$, de donde resulta que

$$w = \frac{-z}{1 + zh}.$$

Veamos la asociatividad, para $z, w, v \in C_h$

$$\begin{aligned} z \oplus (w \oplus v) &= z \oplus (w + v + wvh) \\ &= z + w + v + wvh + z(w + v + wvh)h \\ &= z + w + v + wvh + zwh + zvh + zwvhh \\ &= z + w + zwh + v + zvh + wvh + zwhvh \\ &= (z + w + zwh) \oplus v. \end{aligned}$$

Para la conmutatividad, tomamos $z, w \in C_h$

$$\begin{aligned} z \oplus w &= z + w + zwh \\ &= w + z + wzh \\ &= w \oplus z. \end{aligned}$$

Concluimos así que efectivamente (C_h, \oplus) es un grupo abeliano. □

Teorema 3.1.7. *Para $z \in C_h$, tenemos que*

$$z = Re_h z \oplus Im_h z.$$

Demostración. Sea $z \in C_h$, entonces

$$\begin{aligned} Re_h z \oplus Im_h z &= \frac{|zh + 1| - 1}{h} \oplus i \frac{Arg(zh + 1)}{h} \\ &= \frac{|zh + 1| - 1}{h} \oplus \frac{exp(iArg(zh + 1)) - 1}{h} \\ &= \frac{|zh + 1| - 1}{h} + \frac{exp(iArg(zh + 1)) - 1}{h} + \frac{|zh + 1| - 1}{h} \frac{exp(iArg(zh + 1)) - 1}{h} h \\ &= \frac{1}{h} \{ |zh + 1| exp(iArg(zh + 1)) - 1 \} \\ &= \frac{(zh + 1) - 1}{h} \\ &= z. \end{aligned}$$

Probando lo pedido. □

Observación Si $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}_h$, definimos el círculo punto \odot como

$$n \odot z = z \oplus z \oplus z \oplus z \oplus \cdots \oplus z.$$

Se puede probar que

$$n \oplus z = \frac{(zh + 1)^n - 1}{h}.$$

Denotamos el inverso aditivo bajo \oplus como

$$\ominus z = \frac{-z}{1 + zh},$$

Definición 3.1.8. Definimos el operador de sustracción \ominus de \mathbb{C}_h como

$$z \ominus w = z \oplus (\ominus w).$$

Definición 3.1.9. Si $z \in \mathbb{C}_h$, entonces el cuadrado generalizado de z se define como

$$z^{\textcircled{2}} = (-z)(\ominus z) = \frac{z^2}{1 + zh}.$$

Algunas propiedades del cuadrado generalizado se exponen a continuación.

Teorema 3.1.10. Para $z \in \mathbb{C}_h$

- i. $(\ominus z)^{\textcircled{2}} = z^{\textcircled{2}}$
- ii. $1 + zh = \frac{z^2}{z^{\textcircled{2}}}$
- iii. $z + (\ominus z) = z^{\textcircled{2}} \cdot h$
- iv. $z \oplus z^{\textcircled{2}} = z + z^2$
- v. $z^{\textcircled{2}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup \mathbb{A}_h \cup \mathbb{I}_h$
- vi. Para $-\pi/h < w \leq \pi/h$,

$$-(i w)^{\textcircled{2}} = \frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \left(\frac{wh}{2} \right).$$

Demostración. Probaremos (i) y (v), el resto se deja al lector. Probemos (i),

$$\begin{aligned}
(\ominus z)^{\textcircled{2}} &= \frac{(\ominus z)^{\textcircled{2}}}{1 + (\ominus z)h} \\
&= \frac{\frac{z^2}{(1+zh)^2}}{1 + \frac{-zh}{1+zh}} \\
&= \frac{z^2}{(1+zh)^2} \cdot \frac{1+zh}{1+zh-zh} \\
&= \frac{z^2}{1+zh} \\
&= z^{\textcircled{2}}.
\end{aligned}$$

Para ver (v),

$$\begin{aligned}
z^{\textcircled{2}} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{(u+iv)^2}{(1+uh)+ivh} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \frac{(u^2+2uvi-v^2)(1+uh-ivh)}{(1+uh)^2+v^2h^2} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow (u^2+2uvi-v^2)(1+uh-ivh) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow 2uv(1+uh) - vh(u^2-v^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow u^2vh + 2uv + v^2h = 0 \\
&\Leftrightarrow v = 0 \vee u^2h + 2u + v^2h = 0 \\
&\Leftrightarrow v = 0 \vee \left(u + \frac{1}{h}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{h^2} \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_h \cup \mathbb{A}_h \vee z \in \mathbb{I}_h.
\end{aligned}$$

□

Definición 3.1.11. Para $h > 0$, definimos la transformación cilíndrica $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ como

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} \text{Log}(1+zh),$$

donde $\mathbb{Z}_h = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/h < \text{Im}(z) \leq \pi/h\}$ y $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Definimos $\xi_0(0) = z \forall z \in \mathbb{C}$.

Definimos además la adición en \mathbb{Z}_h como

$$z + w := z + w \left(\text{mod} \frac{2\pi i}{h} \right). \quad (3.1.4)$$

La inversa de ξ_h es $\xi_h^{-1}(z) = \frac{1}{h}(e^{zh} - 1)$.

Teorema 3.1.12. *La transformación cilíndrica ξ_h es un homomorfismo de grupo de (\mathbb{C}_h, \oplus) a $(\mathbb{Z}_h, +)$ donde la adición $+$ en \mathbb{Z}_h es la definida en (3.1.4).*

Demostración. Sea $h > 0$ y $z, w \in \mathbb{C}_h$ y consideramos

$$\begin{aligned}
 \xi_h(z \oplus w) &= \frac{1}{h} \log(1 + (z \oplus w)h) \\
 &= \frac{1}{h} \log(1 + zh + wh + zwh^2) \\
 &= \frac{1}{h} \log[(1 + zh)(1 + wh)] \\
 &= \frac{1}{h} \log(1 + zh) + \frac{1}{h} \text{Log}(1 + wh) \\
 &= \xi_h(z) + \xi_h(w).
 \end{aligned}$$

□

3.2. La función exponencial

Usaremos la transformación cilíndrica para definir una función generalizada de la función exponencial para una escala temporal \mathbb{T} arbitraria. Primero haremos algunas definiciones preliminares.

Definición 3.2.1. *Diremos que una función $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es regresiva si $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^k$. El conjunto de funciones rd-continuas regresivas $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ lo denotamos como*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Observación \mathfrak{R} es un grupo abeliano bajo \oplus definido por

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t).$$

Este grupo se llama grupo regresivo.

Para este grupo

$$(\ominus p)(t) = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \in \mathfrak{R},$$

además $(p \ominus q)(t) = (p \oplus (\ominus q))(t)$.

Definición 3.2.2. Si $p \in \mathfrak{R}$, definimos la función exponencial como

$$e_p(t, s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\gamma)}(p(\gamma))\Delta\gamma\right) \quad (3.2.1)$$

para $s, t \in \mathbb{T}$.

Lema 3.2.3. Si $p \in \mathfrak{R}$, entonces se sigue la siguiente propiedad de semigrupo

$$e_p(t, r)e_p(r, s) = e_p(t, s)$$

para todo $r, s \in \mathbb{T}$.

Definición 3.2.4. Si $p \in \mathfrak{R}$, entonces la ecuación lineal dinámica de primer orden

$$y^\Delta = p(t)y \quad (3.2.2)$$

se llama regresiva.

Teorema 3.2.5. Suponga (3.2.2) regresiva y fije $t_0 \in \mathbb{T}$, entonces $e_p(\cdot, t_0)$ es una solución para el PVI

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1 \quad (3.2.3)$$

en \mathbb{T} .

Demostración. Fijemos $t_0 \in \mathbb{T}$ y asumamos (3.2.2) regresiva. Primero notamos que $e_p(t_0, t_0) = 1$.

Falta probar que $e_p(t, t_0)$ satisface $y^\Delta = p(t)y$.

Fijamos $t \in \mathbb{T}^k$. Hay dos casos.

Caso 1. $\sigma(t) > t$

$$\begin{aligned} e_p^\Delta(t, t_0) &= \frac{\exp(\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(t)}(p(r))\Delta r) - \exp(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(t)}(p(r))\Delta r)}{\mu(t)} \\ &= \frac{\exp(\int_t^{\sigma(t)} \xi_{\mu(t)}(p(r))\Delta r) - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0) \\ &= \xi_{\mu(t)}^{-1}(\xi_{\mu(t)}(p(t))e_p(t, t_0)) \\ &= p(t)e_p(t, t_0). \end{aligned}$$

Caso 2. $\sigma(t) = t$. Ponemos $y(t) = e_p(t, t_0)$, así usando el Lema 3.2.3

$$\begin{aligned}
|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| &= |e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t-s)| \\
&= |e_p(t, t_0)| |1 - e_p(s, t) - p(t)(t-s)| \\
&= |e_p(t, t_0)| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r - e_p(s, t) + \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq |e_p(t, t_0)| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r - e_p(s, t) \right| + |e_p(t, t_0)| \left| \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r - p(t)(t-s) \right| \\
&\leq |e_p(t, t_0)| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r - e_p(s, t) \right| + |e_p(t, t_0)| \left| \int_s^t [\xi_{\mu(t)}(p(r)) - \xi_0(p(r))] \Delta r \right|.
\end{aligned}$$

Se puede probar que si $\sigma(t) = t$ y $p \in C_{rd}$ se tiene que $\lim_{r \rightarrow t} \xi_{\mu(t)}(p(r)) = \xi_0(p(r))$, de donde tenemos que existe vecindad U_1 tal que para todo $r \in U_1$,

$$|\xi_{\mu(t)}(p(r)) - \xi_0(p(r))| < \frac{\epsilon}{3|e_p(t, t_0)|}.$$

Sea $s \in U_1$, luego

$$|e_p(t, t_0)| \left| \int_s^t [\xi_{\mu(t)}(p(r)) - \xi_0(p(r))] \Delta r \right| \leq \frac{\epsilon}{3} |t-s|,$$

además por la regla de L'Hopital

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-z-e^{-z}}{z} = 0,$$

entonces existe vecindad U_2 tal que si $s \in U_2$ con $s \neq t$

$$\left| \frac{1 - \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r - e_p(s, t)}{\int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r} \right| < \epsilon^*$$

donde

$$\epsilon^* = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{1 + 3|p(t)e_p(t, t_0)|} \right\}.$$

Sea entonces $s \in U_1 \cap U_2$

$$\begin{aligned}
& |e_p(t, t_0)| \left| 1 - \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r - e_p(s, t) \right| \\
& \leq |e_p(t, t_0)| \epsilon^* \left| \int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(r)) \Delta r \right| \\
& \leq |e_p(t, t_0)| \epsilon^* \left\{ \left| \int_s^t [\xi_{\mu(t)}(p(r)) - \xi_0(p(r))] \Delta r \right| + |p(t)| |t - s| \right\} \\
& \leq |e_p(t, t_0)| \left| \int_s^t [\xi_{\mu(t)}(p(r)) - \xi_0(p(r))] \Delta r \right| + |e_p(t, t_0)| \epsilon^* |p(t)| |t - s| \\
& \leq \frac{\epsilon}{3} |t - s| + |e_p(t, t_0)| |p(t)| |t - s| \frac{\epsilon}{1 + 3|p(t)e_p(t, t_0)|} \\
& \leq \frac{\epsilon}{3} |t - s| + |e_p(t, t_0)| |p(t)| |t - s| \frac{\epsilon}{3|p(t)e_p(t, t_0)|} \\
& \leq \frac{\epsilon}{3} |t - s| + \frac{\epsilon}{3} |t - s| \\
& = \frac{2\epsilon}{3} |t - s|.
\end{aligned}$$

Probando lo pedido. □

Teorema 3.2.6. Si (3.2.2) es regresiva, entonces la única solución de (3.2.3) está dada por $e_p(\cdot, t_0)$.

Demostración. Asumimos y solución de (3.2.3) y observamos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y}{e_p(\cdot, t_0)} \right)^\Delta(t) &= \frac{y^\Delta(t)e_p(t, t_0) - y(t)e_p^\Delta(t, t_0)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\
&= \frac{p(t)y(t)e_p(t, t_0) - y(t)e_p(t, t_0)p(t)}{e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se concluye con esto que $\left(\frac{y}{e_p(\cdot, t_0)} \right)$ es constante, lo que implica que

$$\left(\frac{y}{e_p(\cdot, t_0)} \right) = \frac{y(t_0)}{e_p(t_0, t_0)} = 1,$$

de donde se sigue que $y = e_p(\cdot, t_0)$. □

A continuación se muestran algunas propiedades importantes de la función exponencial y demostraremos algunas de ellas.

Teorema 3.2.7. Si $p, q \in \mathfrak{R}$ entonces

- i. $e_0(t, s) = e_p(t, t) = 1$
- ii. $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$
- iii. $\frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus}(t, s)$
- iv. $e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus}(s, t)$
- v. $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$
- vi. $e_p(t, s)e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$
- vii. $\frac{e_p(t, s)}{e_q(t, s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$
- viii. $\left(\frac{1}{e_p(\cdot, s)}\right)^{\Delta} = \frac{-p(t)}{e_p^{\sigma}(\cdot, s)}$

Demostración. Probemos (ii), (iii), (vi) y (viii).

Para ver (ii),

$$\begin{aligned}
 e_p(\sigma(t), s) &= e_p^{\sigma}(t, s) = e_p(t, s) + \mu(t)e_p^{\Delta}(t, s) \\
 &= e_p(t, s) + \mu(t)p(t)e_p(t, s) \\
 &= (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s).
 \end{aligned}$$

Para (iii) consideramos $y^{\Delta} = (\ominus p)(t)y$, $y(s) = 1$. Se prueba que $y(t) = \frac{1}{e_p(t, s)}$ satisface dicha ecuación y así se concluye que $\frac{1}{e_p(t, s)} = e_{\ominus}(t, s)$.

Para (vi) se considera el PVI $y^{\Delta} = (p \oplus q)(t)y$, $y(s) = 1$ y se prueba que $y(t) = e_p(t, s)e_q(t, s)$ satisface la ecuación.

Parte (viii),

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{e_p(\cdot, s)}\right)^{\Delta} &= (e_{\ominus p}(\cdot, s))^{\Delta} \\
 &= (\ominus p)e_{\ominus p}(\cdot, s) \\
 &= \frac{-p}{1 + \mu p} \cdot \frac{1}{e_p(\cdot, s)} \\
 &= \frac{-p}{e_p^{\sigma}(\cdot, s)}
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.8. Si $p, q \in \mathfrak{R}$, entonces

$$e_{p \ominus q}^\Delta(\cdot, t_0) = (p - q) \frac{e_p(\cdot, t_0)}{e_p^\sigma(\cdot, t_0)}.$$

Demostración. Usamos Teorema 3.2.7 parte (ii) y (vii) y tenemos

$$\begin{aligned} e_{p \ominus q}^\Delta(t, t_0) &= (p \ominus q)(t) e_{p \ominus q}(t, t_0) \\ &= (p \oplus (\ominus q))(t) e_{p \ominus q}(t, t_0) \\ &= p \oplus \left(\frac{-p}{1 + \mu p} \right) e_{p \ominus q}(t, t_0) \\ &= p - \frac{q}{1 + \mu q} + \frac{\mu p \cdot -q}{1 + \mu q} e_{p \ominus q}(t, t_0) \\ &= \frac{p - q}{1 + \mu q} \frac{e_p(t, t_0)}{e_q(t, t_0)} \\ &= \frac{(p - q) e_p(t, t_0)}{e_q(\sigma(t), t_0)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.9. Si $p \in \mathfrak{R}$ y $a, b, c \in \mathbb{T}$, entonces

$$[e_p(c, \cdot)]^\Delta = -p[e_p(c, \cdot)]^\Delta$$

y

$$\int_a^b p(t) e_p(c, \sigma(t)) \Delta t = e_p(c, a) - e_p(c, b).$$

Demostración. Usamos las propiedades del Teorema 3.2.7 y obtenemos

$$\begin{aligned} p(t) e_p(c, \sigma(t)) &= p(t) e_{\ominus p}(\sigma(t), c) \\ &= p(t) [1 + \mu(t)(\ominus p)(t)] e_{\ominus p}(t, c) \\ &= p(t) \left[1 - \frac{\mu(t)p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \right] e_{\ominus p}(t, c) \\ &= p(t) \frac{1}{1 + \mu(t)p(t)} e_{\ominus p}(t, c) \\ &= -(\ominus p)(t) e_{\ominus p}(t, c) \\ &= -e_{\ominus p}^\Delta(t, c) \\ &= -[e_p(c, t)]^\Delta. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\int_a^b p(t)e_p(c, \sigma(t))\Delta t &= - \int_a^b [e_p(c, \cdot)]^\Delta \Delta t \\ &= e_p(c, a) - e_p(c, b).\end{aligned}$$

□

3.3. Ejemplos

Ejemplo 3.3.1. Sea $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ para $h > 0$. Sea $\alpha \in \mathfrak{R}$ constante, i.e., $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1/h\}$, entonces

$$e_\alpha(t, 0) = (1 + \alpha h)^{t/h}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Esto se prueba poniendo el PVI $y(0) = (1 + \alpha h)^0 = 1$,

$$\begin{aligned}y^\Delta(t) &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{(1 + \alpha h)^{\frac{t+h}{h}} - (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\ &= \frac{(1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}} [1 + \alpha h - 1]}{h} \\ &= \alpha (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}} \\ &= \alpha y(t).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.2. Sean H_n los número armónicos definidos por

$$H_0 = 0 \text{ y } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\mathbb{T} = \{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ para $\alpha \geq 0$ constante. Afirmamos que

$$e_\alpha(H_n, 0) = \binom{n + \alpha}{n}.$$

Para probar esto suponemos $y(0) = y(H_0) = \binom{\alpha}{0} = 1$.

Primero notamos que $\sigma(H_n) = H_{n+1}$ y $\mu(H_n) = \sigma(H_n) - H_n = H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$. Por lo tanto

$$y^\Delta(H_n) = \frac{y(H_{n+1}) - y(H_n)}{\mu(H_n)} = (n+1)\Delta y(H_n).$$

Usamos esta última igualdad y desarrollamos

$$\begin{aligned}
 y^\Delta(H_n) &= (n+1)\Delta y(H_n) \\
 &= (n+1) \left\{ \binom{n+1+\alpha}{n+1} - \binom{n+\alpha}{n} \right\} \\
 &= (n+1) \binom{n+\alpha}{n+1} \\
 &= (n+1) \frac{(n+\alpha) \cdots \alpha}{(n+1)!} \\
 &= \frac{(n+\alpha) \cdots \alpha}{n!} \\
 &= \alpha y(H).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.3. Sea $N(t)$ el número de plantas de un tipo particular en el tiempo t en un área dada. Debido a experimentos sabemos que N crece exponencialmente de acuerdo a $N' = N$ durante un periodo de meses abril-septiembre. A comienzos de octubre, todas las plantas mueren repentinamente, pero las semillas permanecen en el suelo y comienzan a crecer denuevo al comienzo de abril con N ahora siendo el doble.

Modelamos esta situación usando la escala temporal

$$\mathbb{T} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1],$$

donde $t = 0$ es 1 de abril del año actual, $t = 1$ es 1 de octubre del año actual, $t = 2$ es 1 de abril del año siguiente, $t = 3$ es 1 de octubre del año siguiente, y así sucesivamente.

Tenemos

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2k \leq t < 2k+1 \\ 1 & \text{si } t = 2k+1 \end{cases}$$

en $[2k, 2k+1)$, donde $N' = N$, i.e., $N^\Delta = N$. Sabemos que $N(2k+2) = 2N(2k+1)$, i.e.,

$\Delta N(2k+1) = N(2k+1)$. Esto último dado que

$$\begin{aligned}
 N^\Delta(2k+1) &= N(\sigma(2k+1)) - N(2k+1) \\
 &= N(1+2k+1) - N(2k+1) \\
 &= N(2k+2) - N(2k+1) \\
 &= 2N(2k+1) - N(2k+1) \\
 &= N(2k+1).
 \end{aligned}$$

Como resultado entonces, N es solución de

$$N^\Delta = N.$$

Entonces, si $N(0) = 1$ es dado, N es exactamente $e_1(\cdot, 0)$ en \mathbb{T} . Podemos calcular N de la siguiente forma. Si $k \in \mathbb{N}_0$ y $t \in [2k, 2k+1]$ entonces N satisface $N' = N$, entonces

$$N(t) = \alpha_k e^t$$

para algún $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Como $N(0) = 1$ entonces $1 = N(0) = \alpha_0 e^0 = \alpha_0$ y $N(t) = \alpha_0 e^t = e^t$ para $0 \leq t < 1$.

Como $N(1) = e$ y $N(2) = 2N(1) = 2e$, tenemos $2e = N(2) = \alpha_1 e^2$ y $N(t) = \alpha_1 e^t = \frac{2}{e} e^t = 2e^{t-1}$ para $2 \leq t < 3$.

Dado que $N(3) = 2e^2$ y $N(4) = 2N(3) = 4e^2$, se tiene que $4e^2 = N(4) = \alpha_2 e^4$ y $N(t) = \alpha_2 e^t = \frac{4}{e^2} e^t = 4e^{t-2}$ para $4 \leq t < 5$.

Probaremos por inducción que

$$N(t) = \left(\frac{2}{e}\right)^k e^t$$

para $t \in [2k, 2k+1]$.

En efecto, para $k = 0$ el resultado ya ha sido probado. Asumimos la ecuación cierta para $k = m \in \mathbb{N}_0$, es decir, $N(t) = \left(\frac{2}{e}\right)^m e^t$, con $t \in [2m, 2m+1]$.

Así, $N(2m+1) = \left(\frac{2}{e}\right)^m e^{2m+1} = 2^m e^{m+1}$ y $N(2m+2) = 2N(2m+1) = (2e)^{m+1}$, luego $(2e)^{m+1} = N(2m+2) = \alpha_{m+1} e^{2m+2}$ y $N(t) = \alpha_{m+1} e^t = \frac{(2e)^{m+1}}{e^{2m+1}} e^t = \left(\frac{2}{e}\right)^{m+1} e^t$. para $2m+2 \leq t < 2m+3$.

Probado el resultado esperado.

3.4. Problemas de valor inicial

En esta sección estudiaremos la ecuación lineal no homogénea de primer orden

$$y^\Delta = p(t)y + f(t) \quad (3.4.1)$$

y la correspondiente ecuación homogénea

$$y^\Delta = p(t)y$$

en una escala temporal \mathbb{T} .

Definición 3.4.1. Para $p \in \mathfrak{R}$ definimos el operador $L_1 : C'_{rd} \rightarrow C_{rd}$ como

$$L_1 y(t) = y^\Delta(t) - p(t)y(t)$$

para $t \in \mathbb{T}^k$.

Así entonces podemos escribir un PVI no homogéneo como

$$L_1 y(t) = f(t)$$

para $t \in \mathbb{T}^k$.

El operador adjunto $L_1^* : C^1_{rd} \rightarrow C_{rd}$ está definido por

$$L_1^*(x(t)) = x^\Delta(t) + p(t)x^\sigma(t)$$

para $t \in \mathbb{T}^k$.

Teorema 3.4.2. (*identidad de Lagrange*) Si $x, y \in C'_{rd}$, entonces

$$x^\sigma L_1 y + y L_1^* x = (xy)^\Delta$$

en \mathbb{T}^k .

Demostración.

$$\begin{aligned} (xy)^\Delta &= x^\sigma y^\Delta + x^\Delta y \\ &= x^\sigma (y^\Delta - py) + y(x^\Delta + px^\sigma) \\ &= x^\sigma L_1 y + y L_1^* x. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.4.3. Si x e y son soluciones de $L_1 y = 0$ y $L_1^* x = 0$, respectivamente, entonces

$$x(t)y(t) = c$$

para $t \in \mathbb{T}$, donde c es una constante. Se sigue por este corolario que si y satisface $L_1 y = 0$, entonces $x = 1/y$ satisface la ecuación adjunta $L_1^* x = 0$.

Teorema 3.4.4. Sea $p \in \mathfrak{R}$. Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. La única solución del PVI

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma, \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.4.2}$$

es $x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0$.

Demostración. Notamos primero que $L_1 e_p(t_0, t) = 0$ implica que $\frac{1}{e_p(t_0, t)} = e_{\ominus p}(t_0, t)$ satisface $L_1^* x = 0$. \square

Volcamos nuestra atención al problema no homogéneo

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.4.3}$$

Asumamos x solución de (3.4.3), multiplicamos a ambos lados por el **factor integrante** $e_p(t_0, t)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} [e_p(\cdot, t_0)x]^\Delta(t) &= e_p(t, t_0)x^\Delta(t) + p(t)e_p(t, t_0)x^\sigma(t) \\ &= e_p(t, t_0)[x^\Delta(t) + p(t)x^\sigma(t)] \\ &= e_p(t, t_0)f(t), \end{aligned}$$

integrando

$$e_p(t, t_0)x(t) - e_p(t_0, t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^t e_p(\tau, t_0)f(\tau)\Delta\tau. \tag{3.4.4}$$

Esta integración es posible si f es rd-continua. Lo cual nos lleva a la siguiente definición

Definición 3.4.5. La ecuación (3.4.1) se llama regresiva si p es regresiva y si f es rd-continua.

Teorema 3.4.6. (variación de constantes) Suponga $p \in \mathfrak{R}$, sea $t_0 \in \mathbb{T}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. La única solución del PVI

$$x^\Delta = -p(t)x^\sigma + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.4.5)$$

está dada por

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau. \quad (3.4.6)$$

Demostración. Es fácil ver que (3.4.6) satisface el PVI (3.4.5). Ahora, si x es solución de éste, entonces como vimos, la fórmula (3.4.4) se cumple, así

$$e_p(t, t_0)x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e_p(\tau, t_0)f(\tau)\Delta\tau.$$

Resolvemos para x ,

$$\begin{aligned} x(t) &= e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, t_0)}f(\tau)\Delta\tau \\ &= e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, \tau)e_p(\tau, t_0)}f(\tau)\Delta\tau \\ &= e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau. \end{aligned}$$

Probando lo pedido. □

Observación Una forma alternativa para la solución de nuestro PVI es

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0) \left[x_0 + \int_{t_0}^t e_{\ominus p}(t_0, \tau)f(\tau)\Delta\tau \right].$$

Ahora expondremos una fórmula de variación de constantes para $L_1y = f$.

Teorema 3.4.7. (variación de constantes) Suponga $y^\Delta = p(t)y + f(t)$ regresiva. Sea $t_0 \in \mathbb{T}$ y $y_0 \in \mathbb{R}$. La única solución del PVI

$$y^\Delta = p(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.4.7)$$

está dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau. \quad (3.4.8)$$

Demostración. Reescribimos $y^\Delta = p(t)y + f(t)$ como

$$y^\Delta = p(t)[y^\sigma - \mu(t)y^\Delta] + f(t)$$

i.e.,

$$(1 + \mu(t)p(t))y^\Delta = p(t)y^\sigma + f(t),$$

de donde

$$y^\Delta = -(\ominus p)(t)y^\sigma + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)p(t)}.$$

Ahora, por Teorema 3.4.6 la solución para y es

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \tau) \frac{f(\tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} \Delta\tau.$$

Basta notar que

$$\frac{e_p(t, \tau)}{1 + \mu(\tau)p(\tau)} = \frac{e_p(t, \tau)}{e_p(\sigma(\tau), \tau)} = e_p(t, \sigma(\tau)).$$

□

Ejemplo 3.4.8. Para $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, resolver

$$y^\Delta = 2y + 3^t, \quad y(0) = 0. \tag{3.4.9}$$

Solución Sabemos que si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1/h\}$ y $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, entonces $e_\alpha(t, 0) = (1 + \alpha h)^{t/h}$. En este caso tenemos $\alpha = 2$ y $h = 1$. Luego $e_2(t, 0) = 3^t$. Así, como $p = 2$,

$$\begin{aligned} e_p(t, s) &= e_2(t, s) = \exp\left(\int_s^t \frac{1}{\mu(\tau)} \text{Log}(1 + \mu(\tau)p(\tau)) \Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_s^t \log 3 \Delta\tau\right) \\ &= \exp(\log(3)(t - s)) \\ &= 3^{t-s}. \end{aligned}$$

Entonces $e_2(t, \tau) = 3^{t-\tau}$, luego

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{e_2(t, \tau)f(\tau)}{1 + \mu p} \Delta\tau &= \int_0^t \frac{3^{t-\tau} \cdot 3^\tau}{3} \Delta\tau \\ &= \int_0^t 3^{t-1} \Delta\tau \\ &= 3^{t-1} \Big|_0^t \\ &= t3^{t-1}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que la solución del PVI es $y(t) = t3^{t-1}$.

Capítulo 4

Estabilidad exponencial de sistemas lineales invariantes en el tiempo: una caracterización espectral

4.1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es analizar la estabilidad exponencial de sistemas de ecuaciones lineales invariantes en el tiempo en escalas temporales. Comenzaremos el trabajo considerando un sistema lineal variante en el tiempo. Sea $A : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d}$ rd-continua, consideremos el sistema lineal de ecuaciones dinámicas d-dimensional

$$x^\Delta = A(t)x. \tag{4.1.1}$$

Sea $\varphi_A : \{(t, r) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^k : t \geq r\} \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d}$ la matriz de transición correspondiente a (4.1.1), esto es, $\varphi_A(t, r)\xi$ resuelve el problema inicial (4.1.1) con condición inicial $x(r) = \xi$ para $\xi \in \mathbb{K}^d$ y $t, r \in \mathbb{T}$ con $t \geq r$.

Definición 4.1.1. (*estabilidad exponencial*) Sea \mathbb{T} una escala temporal no acotada superiormente. Llamamos el sistema (4.1.1)

- i. **exponencialmente estable** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que para cada $t_0 \in \mathbb{T}$ existe $K = K(t_0) \geq 1$ con

$$\|\varphi_A(t, t_0)\| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0 \quad (4.1.2)$$

- ii. **uniformemente exponencialmente estable** si K puede ser escogido independiente de t_0 en la definición de estabilidad exponencial.

4.2. El conjunto de estabilidad exponencial

En esta sección vamos a definir un subconjunto del plano complejo que es relevante para la caracterización espectral de la estabilidad exponencial para sistemas lineales invariantes en el tiempo, consideramos el sistema

$$x^\Delta = Ax, \quad (4.2.1)$$

donde $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$. Comenzaremos con el análisis de sistemas escalares.

Proposición 4.2.1. Sea \mathbb{T} una escala temporal no acotada superiormente y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. El sistema escalar

$$x^\Delta = \lambda x, x \in \mathbb{C} \quad (4.2.2)$$

es exponencialmente estable si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface para un $t_0 \in \mathbb{T}$ arbitrario

- i. $\gamma(\lambda) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log|1+s\lambda|}{s} \Delta t < 0$,
- ii. $\forall T \in \mathbb{T} : \exists t \in \mathbb{T}$ con $t > T$ tal que $1 + \mu(t)\lambda = 0$,

donde usamos la convención $\log 0 = -\infty$ en (i).

Demostración. Asumimos primero que (4.2.2) es exponencialmente estable y que $1 + \mu(t)\lambda \neq 0$ para todo $t > t_0$ y algún $t_0 \in \mathbb{T}$. Luego HILGER [3, Teorema 7.4 (iii)] implica que

$$|e_\lambda(T, t_0)| = \exp \left(\int_{t_0}^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log|1+s\lambda|}{s} \Delta t \right)$$

para $T \geq t_0$. De la definición de estabilidad exponencial resulta que

$$\int_{t_0}^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t \leq -\alpha(T - t_0) + \log K$$

para $T \geq t_0$. Tenemos entonces que

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t \leq -\alpha < 0,$$

y así se prueba lo pedido.

Para probar la dirección opuesta fijamos $r \in \mathbb{T}$. Si $1 + \mu(t)\lambda = 0$ para algún $t \geq r$, $t \in \mathbb{T}$, luego claramente por definición $\mu(t) > 0$ y

$$[x(t + \mu(t)) - x(t)]/\mu(t) = \lambda x(t)$$

o equivalentemente $x(t + \mu(t)) = 0$ y (4.2.2) es exponencialmente estable si para cada $r \in \mathbb{T}$ existe $r < t \in \mathbb{T}$ con esta propiedad. Asumimos ahora que este no es el caso, es decir $1 + \mu(T)\lambda \neq 0$ para todo $T \geq r$ y algún $r \in \mathbb{T}$ lo suficientemente grande, entonces

$$|e_\lambda(T, r)| = \exp \left(\int_r^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t \right)$$

para $T \geq r$ y con

$$\alpha := -\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - r} \int_r^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t > 0$$

obtenemos que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una constante $K = K(r) \geq 1$ tal que

$$|e_\lambda(t, r)| \leq K e^{-(\alpha - \epsilon)(t - r)}$$

para $t \geq r$.

En particular, si escogemos $\epsilon < \alpha$ obtenemos la estabilidad exponencial de (4.2.2). \square

Definición 4.2.2. (*Conjunto de estabilidad exponencial*) Dada una escala temporal \mathbb{T} no acotada por arriba, definimos para un $t_0 \in \mathbb{T}$ arbitrario

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t > 0 \}$$

y

$$\mathbb{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) := \{ \lambda \in \mathbb{R} | \forall T \in \mathbb{T} : \exists t \in \mathbb{T} \text{ con } t > T \text{ tal que } 1 + \mu(t)\lambda = 0 \}.$$

El conjunto de estabilidad exponencial para una escala temporal \mathbb{T} se define como

$$S(\mathbb{T}) = \mathbb{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) \cup \mathbb{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}).$$

Mediante algunos cálculos sencillos es posible probar la siguiente proposición, la cual entrega una forma más fácil de calcular el conjunto de estabilidad exponencial.

Proposición 4.2.3. *Sea \mathbb{T} una escala temporal no acotada superiormente y sea $\lambda \in \mathbb{C}$.*

- i. *Si $a := \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1+s\lambda|}{s}$ existe, entonces $\gamma(\lambda) = a$.*
- ii. *Si existen $t_0 \in \mathbb{T}$, $p > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $t_0 + kp \in \mathbb{T}$ y*

$$a_p := \frac{1}{p} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0+kp}^{t_0+(k+1)p} \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1+s\lambda|}{s} \Delta t$$

existe, entonces $\gamma(\lambda) = a_p$.

Veamos ahora algunos ejemplos:

4.2.1. Ejemplos

Ejemplo 4.2.4. *Consideremos la escala $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$. Es fácil ver que $S_{\mathbb{R}}(h\mathbb{Z}) = \{-1/h\}$. Además, usando Proposición 4.2.3 parte (i)*

$$\gamma(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow h} \frac{\log |1+s\lambda|}{s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |1+s\lambda|}{s} = \frac{\log |1+s\lambda|}{s},$$

estableciendo la condición $\gamma(\lambda) < 0$ llegamos a $|1+\lambda h| < 1$ o lo que es lo mismo $|\lambda + 1/h| < 1/h$, de donde se concluye que

$$S_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) = B_{1/h}(-1/h).$$

Se ha probado entonces que

$$S(h\mathbb{Z}) = B_{1/h}(-1/h). \tag{4.2.3}$$

Ejemplo 4.2.5. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ se obtiene que $S_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \emptyset$ y además aplicando Proposición 4.2.3 parte (i) tenemos*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log |1+s\lambda|}{s} = \operatorname{Re}(\lambda),$$

es decir

$$S(\mathbb{R}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}. \tag{4.2.4}$$

Ejemplo 4.2.6. Consideremos ahora la escala $\mathbb{T}_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$. Primero observamos que

$$\sigma(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha) \\ k + 1 & \text{si } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{k + \alpha\} \end{cases}$$

luego

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha) \\ 1 - \alpha & \text{si } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{k + \alpha\}. \end{cases}$$

Observamos ahora que

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t &= \int_k^{k+\alpha} \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t + \int_{k+\alpha}^{k+1} \lim_{s \rightarrow \mu(t)} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t \\ &= \int_k^{k+\alpha} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t + \int_{k+\alpha}^{k+1} \lim_{s \rightarrow 1-\alpha} \frac{\log |1 + s\lambda|}{s} \Delta t \\ &= \alpha \operatorname{Re}(\lambda) + \log |1 + (1 - \alpha)\lambda|. \end{aligned}$$

En consecuencia, usando la Proposición 4.2.3 parte (ii) con $t_0 = 0$, $p = 1$ tenemos

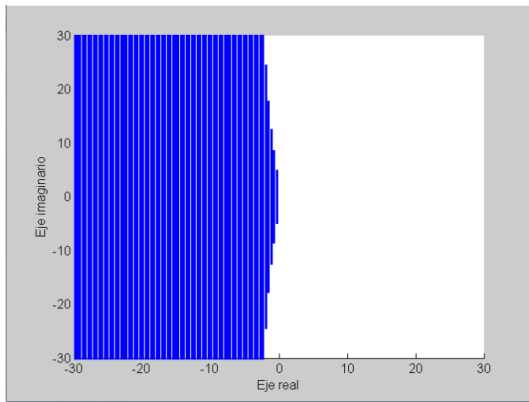
$$S_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_\alpha) = S(\mathbb{T}_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha \operatorname{Re}(\lambda) + \log |1 + (1 - \alpha)\lambda| < 0\}. \quad (4.2.5)$$

Notar que $S_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}_\alpha) = \{(\alpha - 1)^{-1}\} \subset S_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_\alpha)$.

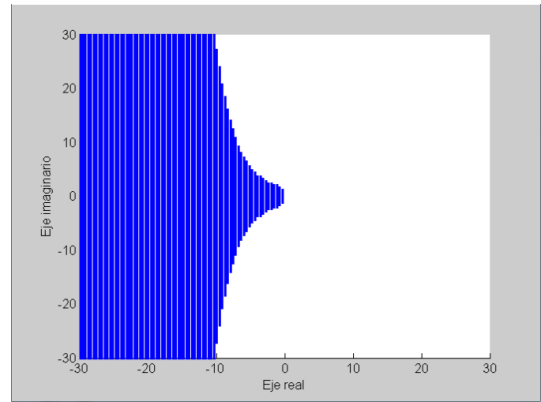
A continuación se presentan las regiones de estabilidad descritas por esta escala para distintos valores de α .

4.3. Caracterización espectral

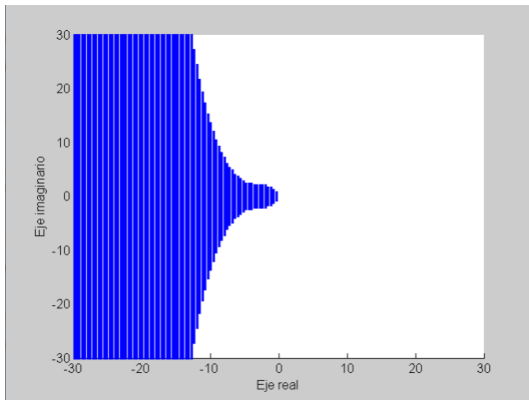
El objetivo de esta sección es obtener una caracterización espectral para el análisis de la estabilidad de sistemas lineales no dependientes del tiempo. Comenzaremos el trabajo exponiendo un resultado para matrices de Jordan



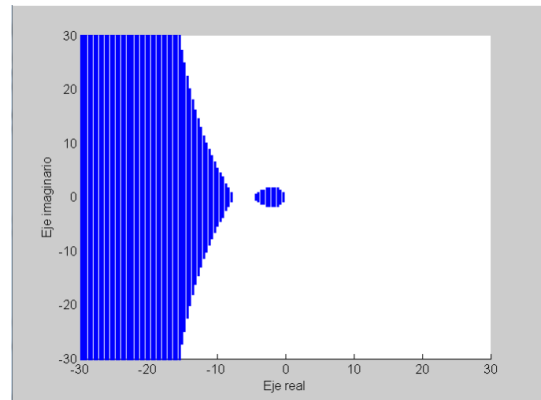
Región de estabilidad para $\alpha = 0,8$



Región de estabilidad para $\alpha = 0,3$



Región de estabilidad para $\alpha = 0,25$



Región de estabilidad para $\alpha = 0,21$

Figura 4.1: Regiones de estabilidad descrito en el Ejemplo (4.2.6) para diferentes valores de α

Teorema 4.3.1. *Suponga $A \in \mathfrak{R}(\mathbb{T}^k, \mathbb{K}^{d \times d})$ es tal que (4.1.1) es Jordan reductible, i.e. existen matrices invertibles (constantes) $S \in \mathbb{C}^{d \times d}$ tal que*

$$S^{-1}A(t)S = \begin{pmatrix} J_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & J_n(t) \end{pmatrix} =: J(t) \quad (4.3.1)$$

para $t \in \mathbb{T}^k$. Donde cada $J_i(t) \in \mathbb{C}^{d_i \times d_i}$ es un bloque de Jordan. Entonces la matriz de transición de $x^\Delta = A(t)x$ está dada por

$$\varphi_A(t, r) = S \begin{pmatrix} \varphi_{J_1}(t, r) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_{J_n}(t, r) \end{pmatrix} S^{-1} \quad (4.3.2)$$

para $t, r \in \mathbb{T}^k$. Si A no es regresiva entonces la representación (4.3.2) se cumple para $t \geq r \in \mathbb{T}$.

Demostración. Definimos la función $\Psi(t) := S\varphi_J(t, r)S^{-1}$, entonces la identidad

$$\Psi^\Delta(t) = S J(t) \varphi_J(t, r) S^{-1} = S S^{-1} A(t) \varphi_J(t, r) S^{-1} = A(t) \Psi$$

se cumple para $t \in \mathbb{T}^k$ y dado que $\Psi(r) = I_d$ obtenemos la afirmación. \square

Proposición 4.3.2. *Sea \mathbb{T} una escala temporal no acotada superiormente y con función μ acotada. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ considere el bloque de Jordan $J_\lambda \in \mathbb{C}^{d \times d}$ dado por*

$$J_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Si el sistema escalar

$$x^\Delta = \lambda x \quad (4.3.3)$$

es uniformemente exponencialmente estable entonces el sistema

$$x^\Delta = J_\lambda x \quad (4.3.4)$$

es exponencialmente estable.

Demostración. Usaremos sin pérdida de generalidad la norma $\|x\| := \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$ para $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$. Asumimos que x es solución de (4.3.3) con condición inicial $x(r) = \xi \in \mathbb{K}^d$, entonces $\|x(t)\| \leq K e^{-\alpha(t-r)} \|\xi\|$ para $\alpha > 0$, $K \geq 1$ y para todo $r \in \mathbb{T}$.

Fijamos $r \in \mathbb{T}$ y $-\alpha < \beta < 0$. Escogemos ahora la sucesión $-\alpha < \beta_d < \beta_{d-1} < \dots < \beta_2 < \beta_1 = \beta$. Probaremos por inducción sobre $j = d, \dots, 1$ que existen constantes K_j tales que el j -ésimo componente de la solución de (4.3.4) es exponencialmente acotada por

$$|x_j(t)| \leq K_j e^{\beta_j(t-r)} \|\xi\|.$$

Para $j = d$ la afirmación sigue del hecho de que la d -ésima entrada de $x(t)$ es solución de (4.3.3) y por ende

$$|x_d(t)| \leq K e^{-\alpha(t-r)} |\xi_d| = K e^{\beta_d(t-r)} |\xi_d| \leq K e^{\beta_d(t-r)} \|\xi\|.$$

Entonces asumimos que la afirmación es cierta para cierto índice $d \geq (j+1) \geq 2$. Por construcción el j -ésimo componente de la solución satisface la ecuación

$$x_j^\Delta = \lambda x_j(t) + x_{j+1}(t)$$

para $t \in \mathbb{T}$. Ahora, por la fórmula de variación de constantes (Teorema 3.4.7) tenemos que

$$x_j(t) = e_\lambda(t, r) \xi_j + \int_r^t e_\lambda(t, s + \mu(s)) x_{j+1}(s) \Delta s.$$

Usando el acotamiento exponencial de $e_\lambda(t, r)$ y denotando como H a la cota de μ obtenemos

$$\begin{aligned} |x_j(t)| &\leq |e_\lambda(t, r) \xi_j| + \int_r^t |e_\lambda(t, s + \mu(s)) x_{j+1}(s) \Delta s| \\ &\leq K e^{-\alpha(t-r)} |\xi_j| + \int_r^t K e^{-\alpha(t-s)} e^{\alpha \mu(s)} K_{j+1} e^{\beta_{j+1}(s-r)} \Delta s \|\xi\| \\ &\leq K e^{\beta_{j+1}(t-r)} |\xi_j| + \int_r^t K e^{\beta_{j+1}(t-s)} e^{\alpha H} K_{j+1} e^{\beta_{j+1}(s-r)} \Delta s \|\xi\| \\ &= K e^{\beta_{j+1}(t-r)} |\xi_j| + K K_{j+1} e^{\alpha H} (t-r) e^{\beta_{j+1}(t-s)} \|\xi\| \\ &\leq K e^{\beta_{j+1}(t-r)} \|\xi\| + K K_{j+1} e^{\alpha H} (t-r) e^{\beta_{j+1}(t-s)} \|\xi\|. \end{aligned}$$

Usando que $\beta_{j+1} < \beta_j$ y factorizando por el término $e^{\beta_j(t-r)} \|\xi\|$ obtenemos que

$$|x_j(t)| \leq K_j e^{\beta_j(t-r)} \|\xi\|,$$

para $t \geq r$, escogiendo un K_j adecuado. Esto último prueba lo que queríamos. \square

Antes de exponer el teorema principal de la sección, vamos a introducir la siguiente proposición:

Proposición 4.3.3. *Si λ_0 es un autovalor y v un autovector de la matriz A del sistema (4.2.1), entonces $x(t) = e_{\lambda_0}(t, t_0)v$ es una solución de (4.2.1) en \mathbb{T} .*

Demostración. Si $x(t) = e_{\lambda_0}(t, t_0)v$ entonces

$$\begin{aligned} x^\Delta(t) &= \lambda_0 e_{\lambda_0}(t, t_0)v \\ &= e_{\lambda_0}(t, t_0)\lambda_0 v \\ &= e_{\lambda_0}(t, t_0)Av \\ &= Ae_{\lambda_0}(t, t_0)v \\ &= Ax(t). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.4. *(caracterización espectral) Sea \mathbb{T} una escala temporal acotada superiormente. Sea $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$, $\sigma(A)$ el espectro de A y considere el sistema (4.2.1). Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

- i. *Si (4.2.1) es exponencialmente estable, entonces $\sigma(A) \subset S(\mathbb{T})$.*
- ii. *Si $\sigma(A) \subset S(\mathbb{T})$, la escala temporal \mathbb{T} tiene una función μ acotada y para todo $\lambda \in \sigma(A)$ con λ defectivo (i.e, la multiplicidad geométrica y algebraica no coinciden) el sistema escalar (4.2.2) es uniformemente exponencialmente estable, entonces (4.2.1) es exponencialmente estable.*
- iii. *Si A es diagonalizable, entonces el sistema (4.2.1) es exponencialmente estable si y sólo si $\sigma(A) \subset S(\mathbb{T})$.*

Demostración. Si \mathbb{T} es una escala temporal acotada superiormente, entonces

- i. Sea $\lambda \in \sigma(A)$ y escoja un autovector asociado v . Entonces tenemos para $t \geq r \in \mathbb{T}$ por la Proposición 4.3.3 que

$$\|e_\lambda(t, r)\| \|v\| = \|\varphi_A(t, r)v\| \leq K_r e^{-\alpha(t-r)} \|v\|$$

para $t \geq r$ y K_r, α constantes positivas. Esto muestra que $|e_\lambda(t, r)| \leq K_r e^{-\alpha(t-r)}$ y la Proposición 4.2.1 implica que $\lambda \in S(\mathbb{T})$. Como $\lambda \in \sigma(A)$ es arbitrario, ésto completa la prueba.

- ii. Sea $S \in \mathbb{C}^{d \times d}$ tal que $J := S^{-1}AS$ está en su forma canónica de Jordan con bloques de Jordan $J_i, i = 1, \dots, n \leq d$. Si para algún i el bloque de Jordan i es de dimensión 1 entonces la suposición sobre el espectro de A y la Proposición 4.2.1 implica la estabilidad exponencial de

$$x^\Delta = J_i x. \tag{4.3.5}$$

Ahora, si la dimensión de $J_i > 1$ y si el autovalor asociado es defectivo, entonces la estabilidad exponencial de (4.3.5) es consecuencia de la Proposición 4.3.2. En conclusión tenemos estabilidad exponencial para todos los bloques de Jordan y la prueba resulta del Teorema 4.3.1.

- iii. Esto resulta inmediato de las partes (i) y (ii).

□

Capítulo 5

Un modelo multiplicador-acelerador en escalas temporales

5.1. Preliminares

En 1939, Samuelson combinó el modelo multiplicador con el principio de aceleración. El principio de aceleración establece que la inversión de un país o región está dada por cambios en el consumo. Si I es la inversión y C el consumo, entonces este principio relaciona estas variables de la siguiente manera

$$I_t = \beta \Delta C_t = \beta(C_t - C_{t-1}), \quad (5.1.1)$$

en esta ecuación β denota el coeficiente de aceleración con $\beta > 0$.

Por otro lado, el modelo multiplicador establece la siguiente relación

$$C_t = bY_{t-1}, \quad (5.1.2)$$

donde Y es el ingreso nacional y b es el llamado multiplicador, que corresponde al cambio que se presenta en el ingreso cuando ha cambiado en una unidad el consumo autónomo con $0 < b \leq 1$.

Además se cumple la condición de equilibrio

$$Y_t = C_t + I_t + G_t, \quad (5.1.3)$$

donde G es el gasto de gobierno. Usando (5.1.1) y (5.1.2) Samuelson derivó de (5.1.3) la siguiente ecuación de segundo orden en diferencias

$$Y_t - b(1 + \beta)Y_{t+1} + b\beta Y_{t-2} = G_t. \quad (5.1.4)$$

La solución de (5.1.4) entrega el comportamiento en el tiempo del ingreso nacional de un país o región.

Este es el modelo básico propuesto por Samuelson que origina toda la teoría de ciclos económicos que existe en la actualidad, un ciclo económico corresponde a las oscilaciones de la economía en las que una fase de expansión va seguida de otra de contracción, seguida a su vez de expansión y así sucesivamente.

Será nuestro objetivo encontrar un modelo que generalice el propuesto por Samuelson en escalas temporales para así unificar y extender los casos reales y discretos de este modelo.

5.2. Forma expansiva del modelo multiplicador-acelerador general

Una forma de hacer el modelo anterior más realista es considerar una economía abierta. Una economía abierta significa que hay transacciones entre los países, i.e., tenemos dos nuevas variantes, las importaciones y exportaciones. Asumimos que las exportaciones X crecen exponencialmente con tasa de crecimiento x y valor inicial X_0 , las importaciones del periodo actual M_t son directamente proporcionales al ingreso nacional con un periodo de rezago, el gasto de gobierno G consiste en una componente \bar{G} y en una componente de crecimiento exponencial $A_0 e_g(\cdot, t_0)$ con tasa de crecimiento g y valor inicial de inversión autónoma A_0 ¹. Por último consideramos una tasa de impuesto τ .

Definición 5.2.1. Si $Y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $C : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $A : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y $M : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones delta diferenciables en \mathbb{T}^k definimos el modelo multiplicador-acelerador general en escalas temporales

¹La inversión autónoma es aquella que no depende una tasa de interés ni del nivel del ingreso.

con los siguientes axiomas

$$Y = C + I + A - M + \tau Y, \quad (5.2.1)$$

$$I^\sigma = \gamma C^\Delta, \quad (5.2.2)$$

$$C^\sigma = b(1 - \tau)Y + (\mu - 1)Y^\Delta, \quad (5.2.3)$$

$$M^\sigma = mY. \quad (5.2.4)$$

Donde $A := G + X$, con $G = \bar{G} + A_0 e_g(\cdot, t_0)$ y $X = X_0 e_x(\cdot, t_0)$.

Proposición 5.2.2. *En el modelo multiplicador-acelerador general tenemos*

$$I^\Delta = (1 - \tau)Y^\Delta - \frac{1}{\gamma}I^\sigma - A^\Delta + M^\Delta \quad (5.2.5)$$

y

$$Y^\Delta = I^\sigma + A^\sigma - (1 + m - b(1 - \tau))Y + \tau Y^\sigma. \quad (5.2.6)$$

Demostración. Por las ecuaciones (5.2.1) y (5.2.2) tenemos que

$$I^\Delta = Y^\Delta - C^\Delta - A^\Delta + M^\Delta - \tau Y^\Delta = (1 - \tau)Y^\Delta - \frac{1}{\gamma}I^\sigma - A^\Delta + M^\Delta,$$

adicionalmente usando las ecuaciones (5.2.3) y (5.2.4) se obtiene que

$$\begin{aligned} & I^\sigma + A^\sigma - (1 + m - b(1 - \tau))Y + \tau Y^\sigma - Y^\Delta \\ &= I^\sigma + A^\sigma - Y - mY + b(1 - \tau)Y + \tau Y^\sigma - (b(1 - \tau)Y - C^\sigma + \mu Y^\Delta) \\ &= I^\sigma + A^\sigma + C^\sigma - M^\sigma + \tau Y^\sigma - (Y + \mu Y^\Delta) \\ &= (C + I + A - M + \tau Y)^\sigma - Y^\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2.3. *Supongamos que σ^Δ existe y sea*

$$c := \sigma^\Delta \left(\frac{1}{\gamma} - 1 - \sigma^\Delta \mu \frac{1}{\gamma} \tau \right) \in \mathfrak{R} \quad d := b(1 - \tau) - 1.$$

Entonces Y satisface

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{c + \sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} \mu (m - \tau - d) - d}{1 + \mu c} Y^\Delta + \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} (m - \tau - d)}{1 + \mu c} Y = \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\gamma}}{1 + \mu c} A^{\sigma\sigma}. \quad (5.2.7)$$

Demostración. Usando la Proposición 5.2.2 se deriva que

$$\begin{aligned}
Y^{\Delta\Delta} &= I^{\sigma\Delta} + A^{\sigma\Delta} - (1 + m - b(1 - \tau))Y^{\Delta} + \tau Y^{\sigma\Delta} \\
&= \sigma^{\Delta} I^{\Delta\sigma} + A^{\sigma\Delta} + (d - m)Y^{\Delta} + \sigma^{\Delta} \tau Y^{\Delta\sigma} \\
&= \sigma^{\Delta} \left[(1 - \tau)Y^{\Delta\sigma} - \frac{1}{\gamma} I^{\sigma\sigma} - A^{\Delta\sigma} + M^{\Delta\sigma} \right] + A^{\sigma\Delta} + (d - m)Y^{\Delta} + \sigma^{\Delta} \tau Y^{\Delta\sigma} \\
&= \sigma^{\Delta} (1 - \tau)Y^{\Delta\sigma} - \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} (Y^{\Delta\sigma} - A^{\sigma\sigma} + (1 + m - b(1 - \tau))Y^{\sigma} - \tau Y^{\sigma\sigma}) - \sigma^{\Delta} A^{\Delta\sigma} + \sigma^{\Delta} M^{\Delta\sigma} \\
&\quad + A^{\sigma\Delta} + (d - m)Y^{\Delta} + \sigma^{\Delta} \tau Y^{\Delta\sigma} \\
&= \sigma^{\Delta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) (Y^{\Delta} + \mu Y^{\Delta\Delta}) + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} A^{\sigma\sigma} + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} (d - m)(Y + \mu Y^{\Delta}) \\
&\quad + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} \tau (Y + \mu Y^{\Delta} + \mu \sigma^{\Delta} (Y^{\Delta} + \mu Y^{\Delta\Delta})) + M^{\sigma\Delta} + (d - m)Y^{\Delta} \\
&= \sigma^{\Delta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) (Y^{\Delta} + \mu Y^{\Delta\Delta}) + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} A^{\sigma\sigma} + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} (d - m)(Y + \mu Y^{\Delta}) \\
&\quad + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} \tau (Y + \mu Y^{\Delta} + \mu \sigma^{\Delta} (Y^{\Delta} + \mu Y^{\Delta\Delta})) + d Y^{\Delta} \\
&= -\mu c Y^{\Delta\Delta} + \left[-c + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} \mu (d - m + \tau) + d \right] Y^{\Delta} + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} (d - m + \tau) Y + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\gamma} A^{\sigma\sigma},
\end{aligned}$$

esto completa la prueba. □

Observación Si $Y = \bar{Y}$ es constante, entonces una solución particular de (5.3.6) es

$$\bar{Y} = \frac{A^{\sigma\sigma}}{m - \tau - d},$$

que corresponde al valor de equilibrio del ingreso nacional ². Podemos resolver la parte homogénea de la ecuación (5.3.6) siempre que esta ecuación sea regresiva. Si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica, entonces la solución general de 5.3.6 es de la forma

$$Y = a_1 e_{\lambda_1}(\cdot, t_0) + a_2 e_{\lambda_2}(\cdot, t_0) + \frac{A^{\sigma\sigma}}{m - \tau - d}$$

²El valor de equilibrio del ingreso nacional corresponde al punto el cual la demanda agregada (gasto total planeado) y la cantidad producida se igualan.

5.3. Análisis de la estabilidad exponencial para el modelo básico de Samuelson

Consideremos en la Definición 5.2.1 $m = 0$, $\tau = 0$, $A_0 = 0$, $X_0 = 0$ y $\gamma = \beta$, entonces la ecuación que describe el modelo de Samuelson en escalas temporales es

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{c - d \left(1 + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta} \mu\right)}{1 + \mu c} Y^{\Delta} - \frac{\sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta} d}{1 + \mu c} Y = \frac{\sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta}}{1 + \mu c} G^{\sigma\sigma}, \quad (5.3.1)$$

donde $c := \sigma^{\Delta} \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$ y $d := b - 1$. Siempre y cuando σ^{Δ} exista.

Este es un resultado que sale directo del Teorema 5.2.3.

A modo de simplicidad vamos a considerar $G = 0$, i.e.,

$$Y^{\Delta\Delta} + pY^{\Delta} + qY = 0 \quad (5.3.2)$$

donde $p = \frac{c - d(1 + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta} \mu)}{1 + \mu c}$ y $q = -\frac{\sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta} d}{1 + \mu c}$.

Procedemos ahora a transformar la ecuación (5.3.2) en un sistema 2×2 . Sea $Y_1 = Y$ y $Y_2 = Y^{\Delta}$, entonces

$$\begin{aligned} Y_1^{\Delta} &= Y^{\Delta} = Y_2 \\ Y_2^{\Delta} &= Y^{\Delta\Delta} = -pY^{\Delta} - qY = -pY_2 - qY_1. \end{aligned}$$

Así entonces tenemos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}^{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad (5.3.3)$$

el cual debido a su construcción es equivalente a (5.3.2). En lo que sigue analizaremos la estabilidad exponencial de (5.3.3) para tres escalas temporales distintas.

5.3.1. Primera escala temporal

Consideramos la escala $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h > 0$. Calculamos primero los coeficientes p y q en (5.3.3), notamos antes que en este caso $\mu = h$, $\sigma^\Delta = 1$, $c = \frac{1}{\beta} - 1$ y $d = b - 1$. Entonces

$$p = \frac{c - d \left(1 + \sigma^\Delta \frac{1}{\beta} \mu\right)}{1 + \mu c} = \frac{1/\beta - 1 - (b-1)(1 + h/\beta)}{1 + (1/\beta - 1)h} = \frac{1 - b\beta + h(1-b)}{\beta + h(1-\beta)} \quad (5.3.4)$$

y

$$q = -\frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\beta} d}{1 + \mu c} = -\frac{1/\beta(b-1)}{1 + (1/\beta - 1)h} = \frac{1-b}{\beta + h(1-\beta)}. \quad (5.3.5)$$

Tenemos entonces totalmente determinada la matriz del sistema (5.3.3), los valores propios de esta matriz son

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Vamos a suponer que $p^2 - 4q \neq 0$ a modo de asegurar que la matriz del sistema (5.3.3) sea diagonalizable. Bajo esta premisa estamos en condiciones de usar el Teorema 4.3.4 parte (iii). Usando entonces además el Ejemplo 4.2.4 notamos que debemos encontrar condiciones bajo las cuales se cumple que $\lambda_{1,2} \in B_1(-1)$ o lo que es lo mismo

$$|\lambda_{1,2} + 1/h| < 1/h. \quad (5.3.6)$$

Caso 1 Si $p^2 - 4q > 0$ entonces aplicando la condición (5.3.6) para λ_1 tenemos que $\left| \frac{1}{h} + \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right| <$

$\frac{1}{h}$ implica que $-\frac{2}{h} < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < 0$ de donde se desprende que

$$hp - 4 < h\sqrt{p^2 - 4q} < hp, \quad (5.3.7)$$

mientras que para λ_2 tenemos que $\left| 1 + \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right| < 1$ implica que

$$hp - 4 < -h\sqrt{p^2 - 4q} < hp. \quad (5.3.8)$$

Elevando al cuadrado la segunda desigualdad de (5.3.7) tenemos que

$$q > 0, \quad (5.3.9)$$

similarmente elevando al cuadrado la primera desigualdad de (5.3.8) tenemos que

$$h^2q - 2hp + 4 > 0. \quad (5.3.10)$$

Por último observamos que de la segunda desigualdad de (5.3.7) y la primera de (5.3.8) tenemos que $p > 0$ y $p < \frac{4}{h}$, es decir

$$0 < p < \frac{4}{h}, \quad (5.3.11)$$

además, como $p^2 - 4q > 0$ entonces, $q < \frac{p^2}{4} < \frac{p}{h}$, por lo tanto tenemos la expresión

$$hq < p. \quad (5.3.12)$$

En conclusión, la región de estabilidad esta determinada por las desigualdades (5.3.9), (5.3.10) y (5.3.12).

Caso 2 Si $p^2 - 4q < 0$ entonces $p^2 < 4q$ de donde claramente tenemos que $q > 0$, obtenemos así nuevamente (5.3.9).

Para verificar (5.3.12) aplicamos el Teorema 4.3.4 parte (iii) nuevamente, tenemos que $\left| \frac{1}{h} + \frac{-p \pm i\sqrt{4q-p^2}}{2} \right| < \frac{1}{h}$ de donde $|2 - ph + ih\sqrt{4q-p^2}| < 2$, esto implica que $\sqrt{(2-ph)^2 + h^2(4q-p^2)} < 2$, elevando al cuadrado y agrupando términos obtenemos que $1 - ph + qh^2 < 1$, de donde se concluye que $hq < p$. Para ver la desigualdad (5.3.10) notamos que (5.3.11) y (5.3.12) implican que $q < 4/h^2$ y que debido a $p^2 < 4q$ tenemos que $-2\sqrt{q} < p < 2\sqrt{q}$, de donde $-4h\sqrt{q} < 2hp < 4h\sqrt{q}$. Teniendo eso en cuenta basta considerar la función $f(x) = 4 + h^2x - 4h\sqrt{x}$, la cual es fácil darse cuenta que es positiva para $x \in (0, 4/h^2)$, por lo tanto $f(q) = 4 + h^2q - 4h\sqrt{q} > 0$, de ésto se concluye que $4 + h^2q > 4h\sqrt{q} > 2hp$, obteniendo la expresión deseada.

Explicitemos un poco el caso $h = 1$, es decir, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. En este caso tenemos que $p = 2 - b\beta - b$ y $q = 1 - b$, por lo tanto la ecuación (5.3.2) queda

$$\Delta\Delta Y_t + (2 - b\beta - b)\Delta Y_t + (1 - b)Y_t = 0. \quad (5.3.13)$$

Si se sustituye $\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t$ y $\Delta\Delta Y_t = Y_{t+2} - 2Y_{t+1} + Y_t$ en (5.3.13) entonces esta ecuación se transforma en

$$Y_{t+2} - b(1 + \beta)Y_{t+1} + b\beta Y_t = 0,$$

la cual coincide con la parte homogénea de la ecuación (5.1.4).

Reemplazando los valores de p y q en (5.3.9) (5.3.10) y (5.3.12) observamos las siguientes condiciones: $b < 1$, $b + 2b\beta + 1 > 0$ y $b\beta < 1$. Notamos que dado que $b, \beta > 0$ tenemos que la condición $b + 2b\beta + 1 > 0$ siempre es cierta, por consiguiente la región de estabilidad para $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ de la ecuación (5.3.13) es

$$S(\mathbb{Z}) = \{(\beta, b) \in \mathbb{R}^2 : b < 1, b\beta < 1\}. \quad (5.3.14)$$

Cabe destacar que si $h \in (0, 1]$ entonces (5.3.10) siempre se cumple, para ver esto observamos lo siguiente

$$\begin{aligned} h^2q - 2hp + 4 &= h^2 \left(\frac{1-b}{\beta + h(1-\beta)} \right) - 2h \left(\frac{1-b\beta + h(1-b)}{\beta + h(1-\beta)} \right) + 4 \\ &= \frac{h^2b + 4\beta(1-h) + 2hb\beta + 2h - h^2}{h + \beta(1-h)}, \end{aligned}$$

donde es claro que si $0 < h \leq 1$ tanto el numerador como el denominador de la expresión anterior es positivo, además bajo la misma restricción sobre h al ser $\beta + h(1-\beta)$ positivo entonces

$$hq < p$$

implica que

$$h \left(\frac{1-b}{\beta + h(1-\beta)} \right) < \left(\frac{1-b\beta + h(1-b)}{\beta + h(1-\beta)} \right),$$

de donde se obtiene que

$$h(1-b) < 1 - b\beta + h(1-b),$$

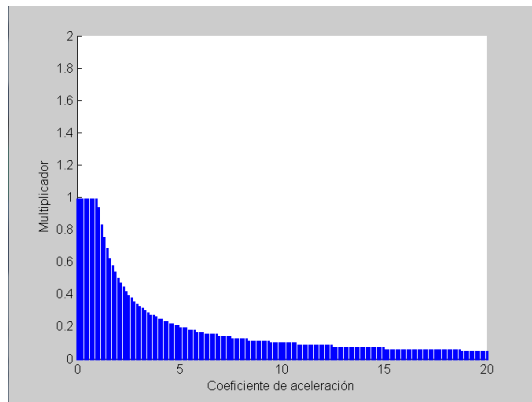
y por lo tanto

$$b\beta < 1, \quad (5.3.15)$$

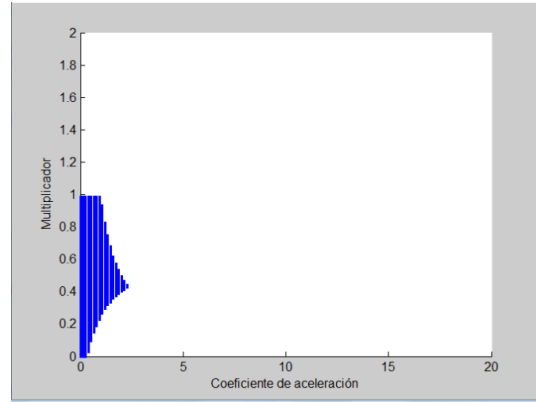
concluyendo así que (5.3.12) siempre entrega (5.3.15) independiente del valor de h , siempre y cuando $0 < h \leq 1$. Por último, (5.3.9) también nos entregará la condición $b < 1$ por la misma razón.

Con esto podemos concluir que si $h \in (0, 1]$ entonces la región de estabilidad será (5.3.14). En la figura 4.1 se muestran los gráficos de las regiones de estabilidad para distintos valores de h .

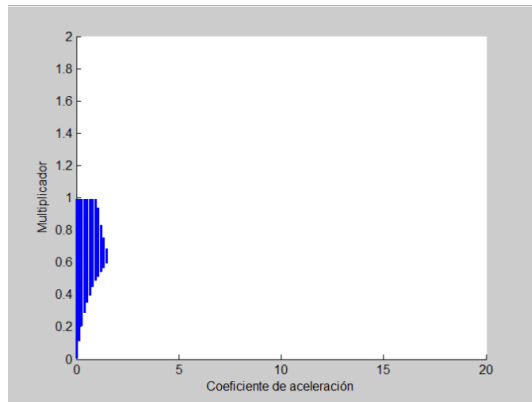
Como se ha mencionado anteriormente es posible obtener resultados continuos haciendo h tender a 0 en los resultados obtenidos para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h > 0$, bajo esta premisa entonces notamos que $p \rightarrow \frac{1}{\beta} - b$ y $q \rightarrow \frac{1}{\beta}(1-b)$ cuando $h \rightarrow 0$ y además mirando (5.3.9), (5.3.10) y (5.3.12) vemos que $q > 0$ y $p > 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Veremos si esto se condice con el caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.



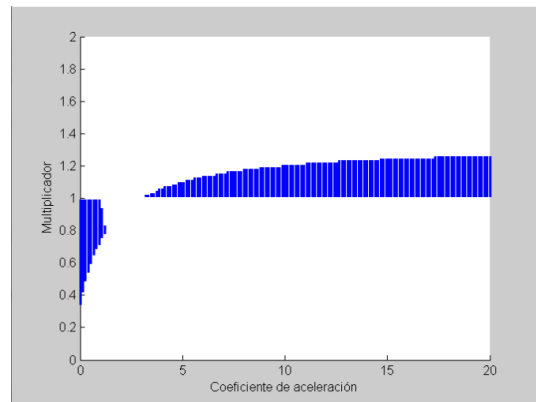
Región de estabilidad para $h \in (0, 1]$



Región de estabilidad para $h = 1,5$



Región de estabilidad para $h = 2$



Región de estabilidad para $h = 3$

Figura 5.1: Regiones de estabilidad del modelo (5.3.2) para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con diferentes valores de $h > 0$

5.3.2. Segunda escala temporal

Consideremos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, en este caso $\mu = 0$, $\sigma^\Delta = 1$, $c = \frac{1}{\beta} - 1$ y $d = b - 1$. Entonces

$$p = \frac{c - d \left(1 + \sigma^\Delta \frac{1}{\beta} \mu\right)}{1 + \mu c} = \frac{1}{\beta} - 1 - (b - 1) = \frac{1}{\beta} - b \quad (5.3.16)$$

y

$$q = -\frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\beta} d}{1 + \mu c} = -\frac{1}{\beta} (b - 1) = \frac{1}{\beta} (1 - b), \quad (5.3.17)$$

la ecuación (5.3.2) tiene la forma

$$Y'' + \left(\frac{1}{\beta} - b\right) Y' + \frac{1}{\beta} (1 - b) Y = 0. \quad (5.3.18)$$

Para analizar la estabilidad de (5.3.18) usamos nuevamente el Teorema 4.3.4 parte (iii) y en este caso el Ejemplo 4.2.5. Así la estabilidad exponencial viene de las expresiones que nos entrega la condición

$$Re(\lambda_{1,2}) < 0. \quad (5.3.19)$$

Caso 1 Valores propios reales, es decir $p^2 - 4q > 0$. En este caso si aplicamos la condición (5.3.19) para λ_1 tenemos que $\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < 0$, de donde $\sqrt{p^2 - 4q} < p$, elevamos al cuadrado y obtenemos

$$q > 0. \quad (5.3.20)$$

Ahora para λ_2 tenemos que $-p - \sqrt{p^2 - 4q} < 0$ de donde se consigue que

$$p > 0. \quad (5.3.21)$$

Caso 2 Valores propios complejos conjugados, es decir $p^2 - 4q < 0$. En este caso de la aplicación de (5.3.19) resulta claramente que $p > 0$, además del hecho de que $p^2 - 4q < 0$ necesariamente debe ocurrir que $q > 0$.

Concluimos entonces que la estabilidad exponencial de (5.3.18) resulta de las condiciones (5.3.20) y (5.3.21), es decir, $\frac{1}{\beta} - b > 0$ y $\frac{1}{\beta} (1 - b) > 0$, lo que equivale a $b\beta < 1$ y $b < 1$. La región por lo tanto es

$$S(\mathbb{R}) = \{(\beta, b) \in \mathbb{R}^2 : b < 1, \beta < 1\}. \quad (5.3.22)$$

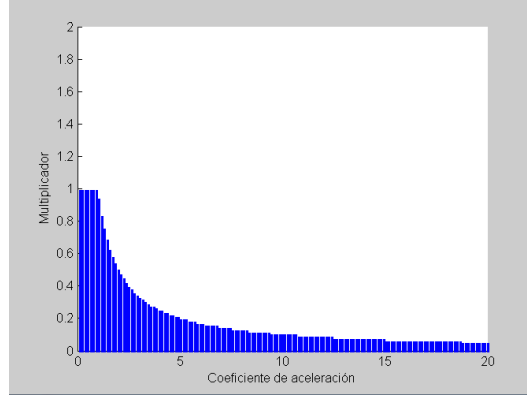


Figura 5.2: Región de estabilidad del modelo (5.3.2) para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$

Notamos que efectivamente el análisis para el caso continuo coincide con el caso $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h \rightarrow 0$ y que es más, obtenemos la misma región de estabilidad que conseguimos para el caso anterior con $h \in (0, 1]$.

5.3.3. Tercera escala temporal

Consideramos ahora $\mathbb{T}_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$. Si $t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha)$ entonces $\sigma^\Delta = 1$ y $\mu = 0$, estamos entonces en el mismo caso que en la subsección anterior. Ahora, si $t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{k + \alpha\}$ entonces $\sigma^\Delta = 1$ y $\mu = 1 - \alpha$, luego

$$p = \frac{c - d \left(1 + \sigma^\Delta \frac{1}{\beta} \mu\right)}{1 + \mu c} = \frac{2 - \alpha - b(\beta + 1 + \alpha)}{1 - \alpha + \alpha\beta} \quad (5.3.23)$$

y

$$q = -\frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\beta} d}{1 + \mu c} = \frac{1 - b}{1 - \alpha + \alpha\beta}. \quad (5.3.24)$$

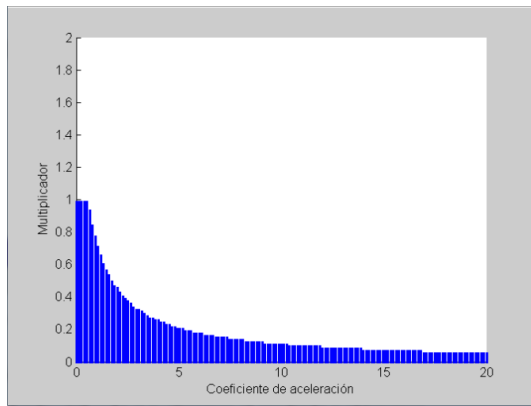
En consecuencia la ecuación diferencial para esta escala es

$$Y^{\Delta\Delta} + \left(\frac{1}{\beta} - b\right) Y^\Delta + \frac{1}{\beta}(1 - b)Y = 0 \quad \text{si } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha) \quad (5.3.25)$$

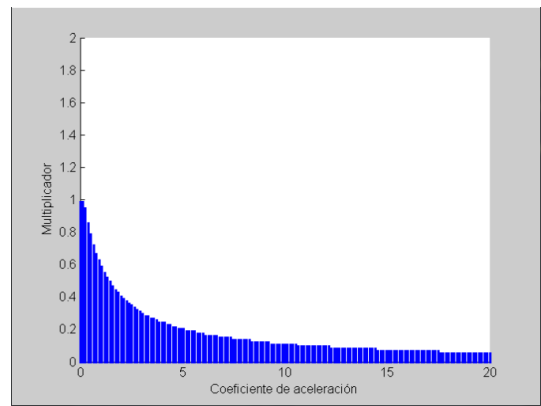
o

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{2 - \alpha - b(\beta + 1 + \alpha)}{1 - \alpha + \alpha\beta} Y^\Delta + \frac{1 - b}{1 - \alpha + \alpha\beta} Y = 0 \quad \text{si } t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{k + \alpha\}. \quad (5.3.26)$$

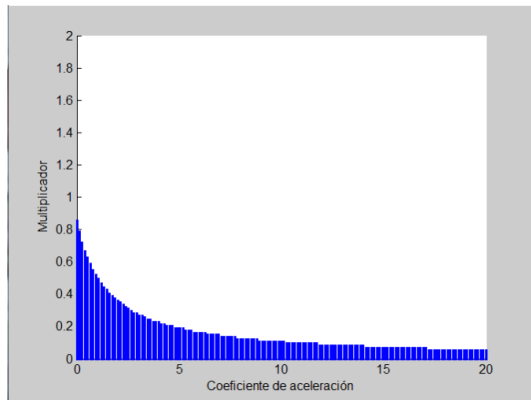
En la figura 4.3 se muestra las regiones de estabilidad para distintos valores de α para la ecuación



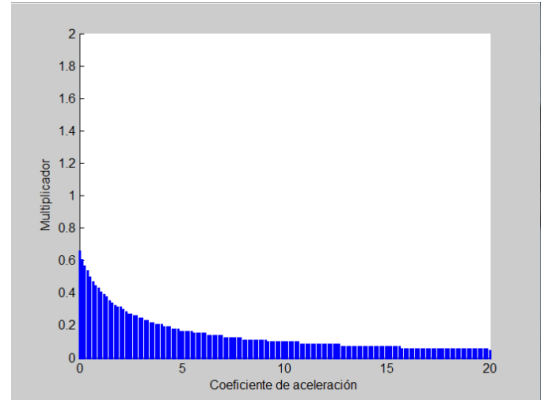
Región de estabilidad para $\alpha = 0,2$



Región de estabilidad para $\alpha = 0,4$



Región de estabilidad para $\alpha = 0,6$



Región de estabilidad para $\alpha = 0,8$

Figura 5.3: Regiones de estabilidad de la ecuación (5.3.26) para diferentes valores de α

(5.3.26), cabe notar que la región de estabilidad para el modelo (5.3.2) con $\mathbb{T}_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$ corresponde a la unión de las regiones de (5.3.25) y (5.3.26).

5.4. Análisis de la estabilidad exponencial para el modelo de economía abierta sin impuestos

Consideramos ahora una economía abierta sin impuestos. Ponemos en la Definición 5.2.1 $\tau = 0$, $\gamma = \frac{\beta}{b}$ y $\bar{G} = 0$. Una aplicación directa del Teorema 5.2.3 implica que

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{c + \sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} \mu(m-d) - d}{1 + \mu c} Y^\Delta + \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} (m-d)}{1 + \mu c} Y = \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\gamma}}{1 + \mu c} A^{\sigma\sigma} \quad (5.4.1)$$

donde $c := \sigma^\Delta \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)$ y $d := b - 1$. Siempre que σ^Δ exista.

Tal como en la sección anterior, vamos a considerar sólo la parte homogénea de (6), es decir

$$Y^{\Delta\Delta} + pY^\Delta + qY = 0, \quad (5.4.2)$$

con $p = \frac{c + \sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} \mu(m-d) - d}{1 + \mu c}$ y $q = \frac{\sigma^\Delta \frac{1}{\gamma} (m-d)}{1 + \mu c}$, la cual es equivalente a (5.3.3).

5.4.1. Primera escala temporal

Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h > 0$ entonces los coeficientes p y q de (5.3.3) son

$$p = \frac{1/\gamma - 1 + \frac{h}{\gamma}(m-b+1) - b + 1}{1 + h/\gamma - h} = \frac{1 + hm - hb + h - \gamma b}{\gamma + h - h\gamma} = \frac{b(1 + hm - hb + h - \beta)}{\beta + hb - h\beta} \quad (5.4.3)$$

$$q = \frac{1/\gamma(m-d)}{1 + h/\gamma - h} = \frac{m-b+1}{\gamma + h - h\gamma} = \frac{b(m-b+1)}{\beta + hb - h\beta}. \quad (5.4.4)$$

Si $h = 1$ entonces la ecuación (5.4.2) tiene la siguiente forma

$$\Delta\Delta Y_t + \frac{\frac{1}{\gamma}(2+m-b) - b}{\frac{1}{\gamma}} \Delta Y_t + (1-b+m)Y_t = 0, \quad (5.4.5)$$

que es equivalente a

$$Y_{t+2} + (m - (b + \beta)) + \beta Y_t. \quad (5.4.6)$$

Obtengamos ahora la región de estabilidad de (5.4.2). De la condición (5.3.9) tenemos que $m-b+1 > 0$ y de (5.3.12) tenemos que $\beta < 1$. Analicemos qué ocurre con la condición (5.3.10)

$$\begin{aligned} h^2q - 2hp + 4 &= h^2 \left(\frac{bm - b^2 + b}{\beta(1-h) + hb} \right) - 2h \left(\frac{b + bhm - hb^2 + bh - b\beta}{\beta(1-h) + hb} \right) + 4 \\ &= \frac{h^2b + 2h\gamma b + h(2-h) - h^2m + 4\gamma(1-h)}{\beta(1-h) + hb}. \end{aligned}$$

Vemos que si $h \leq 1$, $\gamma > 0$ y m es pequeño entonces la expresión anterior es siempre positiva. Concluimos así que si $h \leq 1$ la región es estabilidad de (5.4.2) es

$$S(h\mathbb{Z}) = \{(\beta, b) \in \mathbb{R}^2 : b < 1 + m, \beta < 1\} \quad (5.4.7)$$

siempre que $\gamma > 0$ y m pequeño. En la Figura 4.4 se muestran las regiones de estabilidad del modelo (5.4.2) para distintos valores de h y $m = 0,5$.

5.4.2. Segunda escala temporal

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ entonces entonces los coeficientes p y q de (5.3.3) son

$$p = \frac{1}{\gamma} - b = \frac{b}{\beta} - b \quad (5.4.8)$$

$$q = \frac{1}{\gamma}(m - b + 1) = \frac{\beta}{b}(m - b + 1) \quad (5.4.9)$$

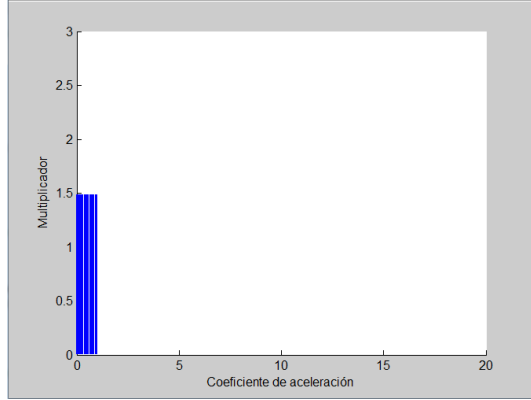
y la ecuacion (5.3.2) queda

$$Y'' + \left(\frac{b}{\beta} - b \right) Y' + \frac{\beta}{b}(m - b + 1)Y = 0. \quad (5.4.10)$$

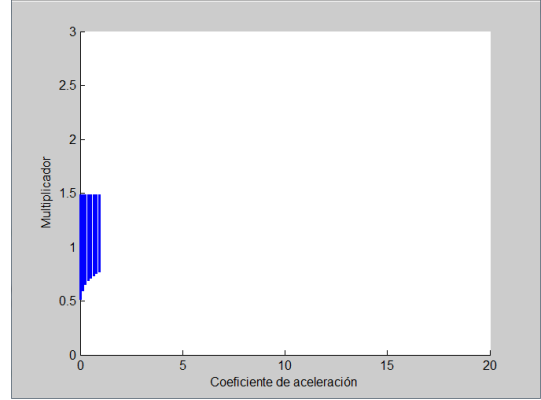
Usando las condiciones (5.3.20) y (5.3.21) notamos que $\frac{\beta}{b}(m - b + 1) > 0$ implica que $b < m + 1$ y que $\frac{b}{\beta} - b > 0$ implica que $\beta < 1$. Es decir, la región de estabilidad es

$$S(\mathbb{T}) = \{(\beta, b) \in \mathbb{R}^2 : b < 1 + m, \beta < 1\} \quad (5.4.11)$$

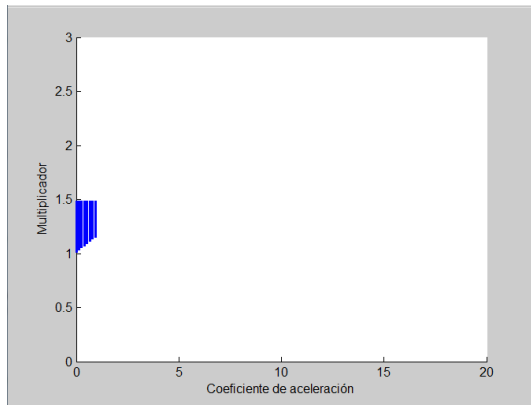
que al igual que en el modelo anterior de Samuelson coincide con la región obtenida para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h \leq 1$. Para justificar esto basta notar que para un γ cualquiera en $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h > 0$ tenemos que la condición (5.3.9) entrega que $m - b + 1 > 0$, lo cual es lo mismo que entrega la condición (5.3.20) para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, mientras que la condición (5.3.12) para la primera escala entrega que $\gamma b < 1$, que también coincide con lo que entrega la condición (5.3.21) para la segunda escala. Es decir, si



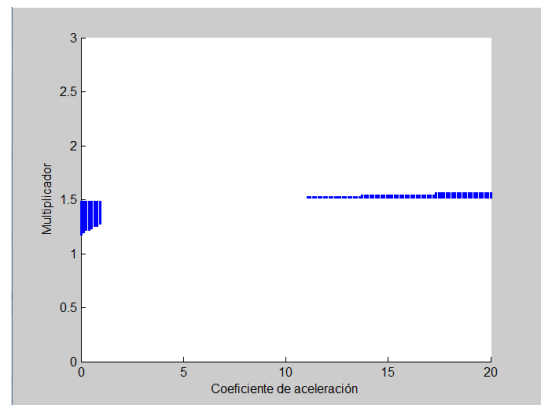
Región de estabilidad para $h \in (0, 1]$



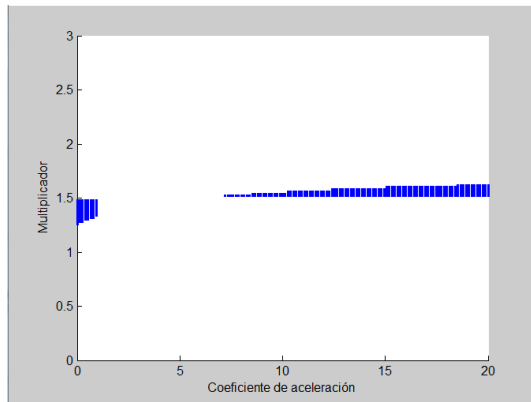
Región de estabilidad para $h = 2$



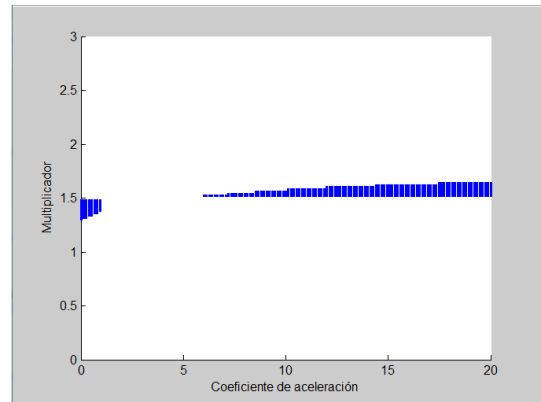
Región de estabilidad para $h = 4$



Región de estabilidad para $h = 6$



Región de estabilidad para $h = 8$



Región de estabilidad para $h = 10$

Figura 5.4: Regiones de estabilidad de la ecuación (5.4.2) para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ y diferentes valores de $h > 0$ con $m = 0,5$ y $\gamma = \beta/b$

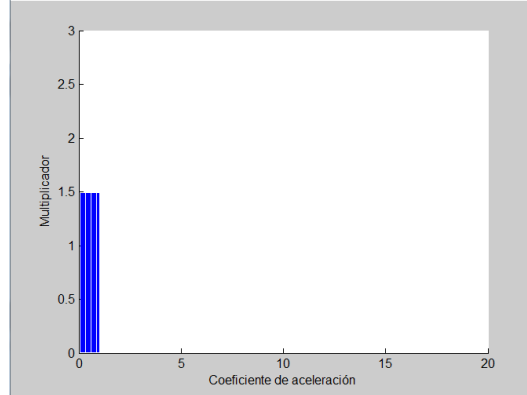


Figura 5.5: Región de estabilidad de la ecuación (5.4.2) para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ con $m = 0,5$ y $\gamma = \beta/b$

la condición (5.3.10) se cumple siempre entonces las regiones de estabilidad para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$ y $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ serán las mismas, y como vimos, ésto ocurrirá siempre que $h \leq 1$, γ sea positivo y m sea pequeño. Como en este caso efectivamente tenemos que m es pequeño y $\gamma = \frac{\beta}{b}$ es positivo se justifica la coincidencia entre ambas regiones.

A modo de comentario notemos que en el modelo anterior de Samuelson tenemos que $m = 0$ y $\gamma = \beta$ es positivo, de ahí que ocurre el mismo fenómeno que acabamos de describir.

Tomemos un caso donde γ no sea siempre positivo, como por ejemplo $\gamma = \beta - b$. En la figura 4.7 se muestra lo que ocurre en este caso. Además en la Figura 4.6 se muestra la región de estabilidad para \mathbb{R} , la cual coincide con la región obtenida en la Figura 4.7 con $h = 0,0001$, lo que es natural pues sabemos que los resultados obtenidos para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ con $h \rightarrow 0$ deben ser los mismos a lo que se obtiene para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

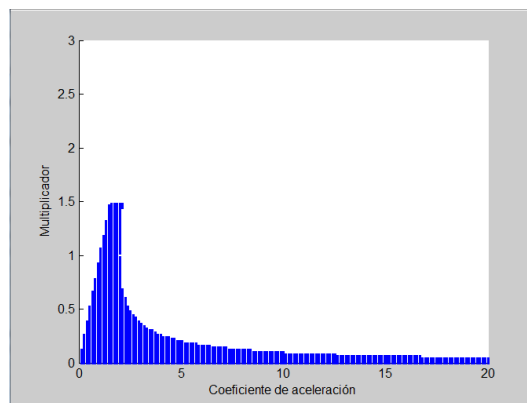
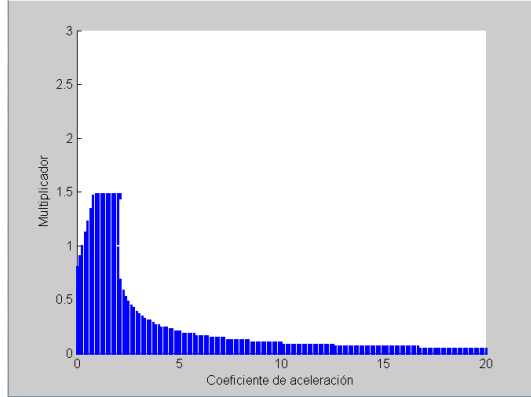
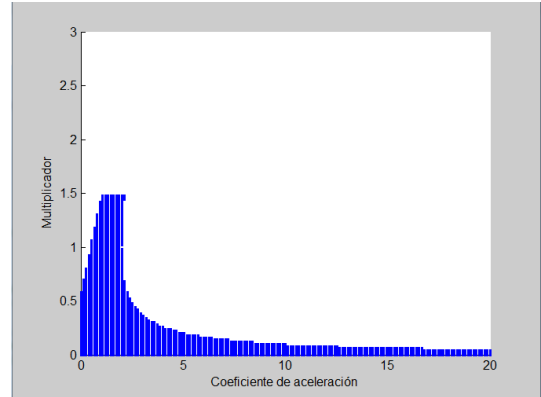


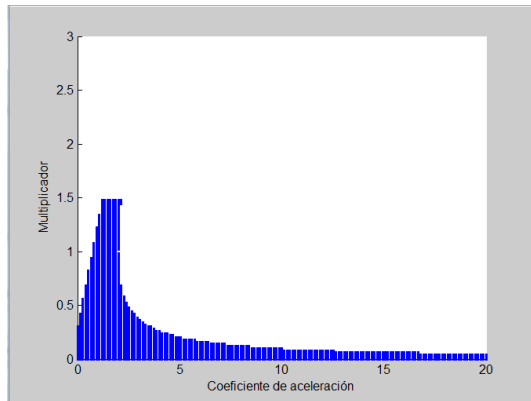
Figura 5.6: Región de estabilidad de la ecuación (5.4.2) para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ con $m = 0,5$ y $\gamma = \beta - b$



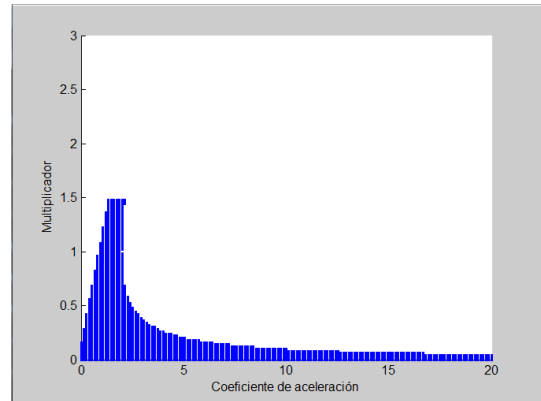
Región de estabilidad para $h = 1$



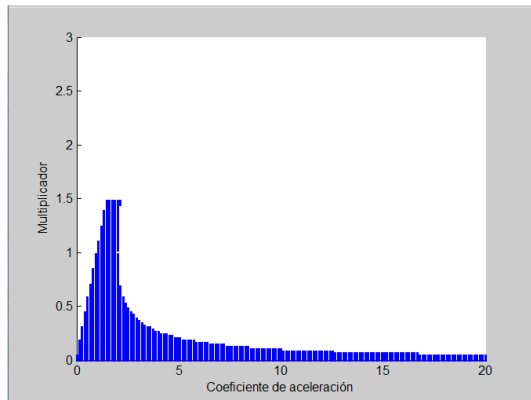
Región de estabilidad para $h = 0,8$



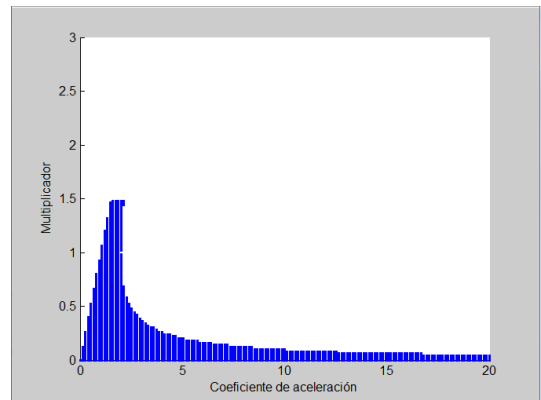
Región de estabilidad para $h = 0,5$



Región de estabilidad para $h = 0,3$



Región de estabilidad para $h = 0,1$



Región de estabilidad para $h = 0,0001$

Figura 5.7: Regiones de estabilidad de la ecuación (5.4.2) para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ y diferentes valores de $h > 0$ con $m = 0,5$ y $\gamma = \beta - b$.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de este hemos presentado una poderosa herramienta de generalización en la modelación matemática. Se ha generalizado una herramienta primordial en matemática como son las ecuaciones diferenciales, ya no somos capaces sólo de modelar situaciones continuas (en \mathbb{R}) o discretas (en \mathbb{Z}) sino que también en una gran gama de conjuntos, como las escalas temporales.

Hemos visto que a la hora de analizar la teoría de ecuaciones diferenciales en escalas temporales obtenemos resultados esperados, pues se condicen con lo que se conoce en la teoría del cálculo convencional, existen diferencias claro está, pero es posible hacer analogías entre los resultados clásicos y los presentados en este trabajo. Esto último resalta la solidez de lo presentado en esta tesis.

Se ha establecido cómo hemos generalizado un modelo tan básico, como lo es el modelo multiplicador - acelerador de Samuelson, tanto matemáticamente hablando como en la teoría económica que representa, pero que sin embargo es muy importante para los macroeconomistas, pues sienta precedente en la construcción de la teoría de ciclos económicos.

Recordemos que el modelo de Samuelson en escalas temporales es el siguiente

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{c - d \left(1 + \sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta} \mu\right)}{1 + \mu c} Y^{\Delta} - \frac{\sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta} d}{1 + \mu c} Y = \frac{\sigma^{\Delta} \frac{1}{\beta}}{1 + \mu c} G^{\sigma\sigma}.$$

Con respecto a la parte homogénea de esta ecuación podemos concluir que para $\mathbb{T} = hZ$ con $h > 0$ tenemos una mayor región de estabilidad si consideramos $h \in (0, 1]$, fuera de ese rango las regiones

comienzas a achicarse.

Un caso similar ocurre al establecer como dominio la escala $\mathbb{T}_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} [k, k + \alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$, donde apreciamos que si aumentáramos el valor de α la región de estabilidad exponencial se iba haciendo más pequeña, es decir, al hacer particiones de \mathbb{R} más pequeñas íbamos obteniendo un modelo más estable.

Cabe mencionar que tal como se expuso en el trabajo, las consideraciones hechas para obtener este modelo son poco realistas. Al generalizar el modelo con respecto a aspectos de la economía, como por ejemplo considerar que estamos en una economía abierta, obtenemos la siguiente ecuación

$$Y^{\Delta\Delta} + \frac{c + \sigma^{\Delta\frac{1}{\gamma}}\mu(m-d) - d}{1 + \mu c} Y^{\Delta} + \frac{\sigma^{\Delta\frac{1}{\gamma}}(m-d)}{1 + \mu c} Y = \frac{\sigma^{\Delta\frac{1}{\gamma}}}{1 + \mu c} A^{\sigma\sigma}.$$

Nuevamente analizando la estabilidad exponencial de la parte homogénea del modelo, notamos que en general para $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$ las regiones de estabilidad son menores que para el modelo de Samuelson, por ende sacrificamos la estabilidad de la ecuación a cambio de lo realista que el modelo pueda ser.

Lo propio ocurre para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, sin embargo todo depende del factor γ , pues al cambiarlo obtenemos cosas totalmente diferentes.

Bibliografia

- [1] MARTIN BOHNER, ALLAN PETERSON. *Dynamic equations on time scales*. Boston.
- [2] CHRISTIAN POTZSCHE, STEFAN SIEGMUND, FABIAN WIRTH. *A spectral Characterization of exponential stability for linear time invariant systems on time scales*. Discrete and continuous dynamical systems. **9**(5), 1223-1241 (2003).
- [3] STEFAN HILGER. *Analysis on measure chains. A unified approach to continuous and discrete calculus*. Results in mathematics, 18 (1990), pp 18-56.
- [4] PAUL SAMUELSON. *Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration*. Review of Economic Statistics, 21, pp 75-84.
- [5] GUNTER GABISCH, HANS-WALTER LORENZ. *Business Cycle Theory*. Berlin.
- [6] MULTIPLIER ACCELERATOR MODELS ON TIME SCALES International journal of statistics and economics. 4(10) (2010).
- [7] SABER ELAYDI. *An introduction of difference equations*. New York.