SOLUCIONES CASI AUTOMORFICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

Daniela Andrea Araya Bastias

Índice general

Introducción

Las funciones casi automorficas fueron introducidas por S. Bochner en la década del 50, sin embargo en la última década han tenido un gran desarrollo escribiéndose numerosos artículos y libros referente a estas funciones. Uno de los tantos artículos denominado “Existencia y unicidad de soluciones débiles casi automorficas para algunas ecuaciones diferenciales semilineales abstractas”, cuyo autor es G.M. N'Guérékata, publicado en el año 2004 [33], nos dio el pie inicial para el estudio de soluciones débiles casi automorficas al problema de segundo de orden

$$x''(t) = Ax(t) + f(t),$$

donde A es el generador de una familia seno y f es una función casi automorfica. Si deseamos obtener soluciones débiles casi automorficas para la ecuación anterior es necesaria la hipótesis adicional de que la familia seno sea exponencialmente estable lo cual no es posible, ver [52],Teorema 2.3. Es por esto que introducimos las familias α-resolventes y las derivadas fraccionarias con el objeto interpolar entre las ecuaciones de primer y segundo orden y así definir un nuevo concepto de solución débil para las ecuaciones del tipo

$$D_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{con } 1 \leq \alpha \leq 2.$$

En particular, lo anterior nos permitió comenzar el estudio de las soluciones débiles casi automorficas de ecuaciones diferenciales semilineales de la forma

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), 1 \leq \alpha \leq 2, \\ D_t^\alpha u(t) &= Au(t) + f(t, u(t), u'(t)), 1 \leq \alpha \leq 2, \end{aligned}$$

donde $f(t, x)$ y $f(t, x, x')$ son casi automorficas y satisfacen la condición del tipo Lipschitz. Finalmente estudiamos otro tipo de ecuaciones de la forma

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + t^n f(t), 1 \leq \alpha \leq 2, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

donde f es una función casi automorfica, ver [7]. Cabe destacar que para que las soluciones débiles de la ecuación de segundo orden lineal, sean casi automorficas, es esencial que la familia α-resolvente sea acotada por una función absolutamente integrable. En cambio, en las ecuaciones de primer y segundo orden semilineal es esencial que f tenga adicionalmente la condición de Lipschitz.

Por otra parte, existen algunos artículos que utilizan el concepto de función casi automorfica discreta, (ver [24],[47],[48]), pero ninguno de éstos, realiza un estudio del espacio de las funciones casi automorficas discretas y sus propiedades. Esto nos incentivó a realizar una síntesis, partiendo de la propia definición de función casi automorfica discreta, para luego estudiar soluciones casi automorficas discretas de ecuaciones en diferencias de la forma

$$\Delta u(n) = Tu(n) + F(n),$$

donde T es un operador acotado y F es una función casi automorfica discreta que puede ser de una o dos variables (caso semilineal). Para demostrar que las soluciones son casi automorficas discretas utilizamos dos propiedades, la primera es la convolución discreta entre una función casi automorfica discreta y una función sumable, la segunda es la condición del tipo Lipchitz sobre F para el caso semilineal. Cabe destacar que las funciones casi automorficas discretas también son un espacio de Banach y al igual que en el caso continuo este espacio contiene de manera propia al espacio de las funciones casi periódicas discretas. Un ejemplo de esto último fue introducido por S.Bochner en el año 1964 [11]. Uno de los aspectos importantes del estudio de las soluciones de las ecuaciones en diferencias es que si restringimos el espacio de Banach X a un espacio que no tenga subespacios isomórficos a c_0 y la solución de la ecuación es acotada, entonces ella es necesariamente casi automorfica lo cual aún no se tiene en el caso continuo.

Al término de este trabajo nos quedan muchos desafíos por resolver, por ejemplo:

1. Estudiar las soluciones débiles de la ecuación diferencial fraccionaria cuando $2 < \alpha \leq 3$.

2. Si se agregan hipótesis al espacio de Banach X y la solución débil es acotada, ¿la solución será casi automorfica?.

3. Estudiar el caso escalar $\lambda = 1$, de la ecuación en diferencia $\Delta u(n) = \lambda u(n) + F(n)$, donde F es de una o dos variables.

4. Si tenemos una función casi automorfica discreta, ¿ la podremos extender a una función casi automorfica continua?

5. Estudiar las soluciones casi automorficas discretas de ecuaciones en diferencias conocidas como las de: Volterra, Ricatti, Bernoulli, Euler, etc.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dividido en tres secciones, la primera sección la dedicaremos al estudio del espacio de las funciones casi automorficas. Veremos que forman un espacio de Banach y analizaremos sus principales propiedades y teoremas fundamentales. En la segunda sección introduciremos la noción de derivada fraccionaria en el sentido de Riemman-Liuville, donde su transformada de Laplace será de vital importancia, pues nos permitirá determinar la forma de la solución de la ecuación diferencial fraccionaria $D_t^\alpha u(t) = -\rho^\alpha u(t)$. Por último, en la tercera sección, introduciremos la definición de generador de una familia α-resolvente, estudiaremos las nociones básicas de las familias α-resolvente con su generador, analizaremos los casos extremos cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$. También estudiaremos las propiedades que tiene el generador de la familia α-resolvente con elementos de su dominio y la familia α-resolvente. Por último introduciremos el Teorema 1.3.4, que nos permitirá tener un criterio para encontrar familias α-resolventes.

1.1. Funciones casi automorficas

A continuación veremos algunos de las nociones fundamentales de las funciones casi automorficas. Para esto denotamos por $\mathbb{K}$, el conjunto $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio de Banach (real o complejo). Una función $f : \mathbb{K} \to X$ continua es casi automorfica si para toda sucesión $(x'_n) \subset \mathbb{K}$, existe una subsucesión $(x_n) \subset (x'_n)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x + x_n) =: \overline{f}(x) \tag{1.1}$$

esté bien definida para cada $x \in \mathbb{K}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}(x - x_n) = f(x)$$

para cada $x \in \mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, llamamos la función f, función casi automorfica discreta.

Existe una clase de funciones llamadas *funciones casi periódicas* las cuales tienen una estrecha relación con las funciones casi automorficas. Antes de estudiar esta relación, veamos primero su definición.

Definición 1.1.2. *Una función $f : \mathbb{R} \to X$ continua es casi periódica si para cada $\varepsilon > 0$ existe $l > 0$ tal que en cada intervalo real de largo l, existe s con la propiedad de que*

$$\|f(s + t) - f(t)\| < \varepsilon; \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Siguiendo esta misma línea podemos definir el concepto de función casi periódica discreta y su definición es la siguiente.

Definición 1.1.3. *Una función $u : \mathbb{Z} \to X$, es casi periódica discreta si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo l tal que cualquier conjunto de enteros consecutivos de tamaño l contiene al menos un entero p, con la propiedad de que*

$$\|u(k+p) - u(k)\| < \varepsilon, \ \textit{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Si la convergencia del límite (1.1) de la Definición 1.1.1 es uniforme, obtenemos que la función es casi periódica o casi periódica discreta, según sea el caso, esto se tiene por el criterio de Bochner (ver [31])

Debido a lo anterior, las funciones casi automorficas (discretas) contiene al conjunto de las funciones casi periódicas (discretas), pero contención la recíproca no se tiene. Para clarificar lo anterior, en los siguientes ejemplos se muestra una función casi automorfica que no es casi periódica y una función casi automorfica discreta que no es casi periódica discreta:

$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

y

$$g(n) = sign(\cos 2\pi n\theta), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La función f fue introducida hace algunos años atrás por N'Guerekata (ver [31]), en cambio la función g fue introducida por S. Bochner en la década de los 60's en el artículo [11, Teorema 1].

Veamos algunas observaciones que se desprenden de forma natural de la definición de las funciones casi automorficas (discretas).

Observación 1.1.4. *(i) Si f es una función casi automorfica en $\mathbb{R}$ entonces $f\mid_{\mathbb{Z}}$ es una función discreta casi automorfica.*

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la función $\overline{f}$ en la Definición 1.1.1 es una función medible, pero no necesariamente es una función continua.

Las propiedades fundamentales que tienen las funciones casi automorficas (discretas), están resumidas en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.5. *Sean f,f_1 y f_2 funciones casi automorficas de $\mathbb{K}$ a X, entonces se tiene*

(i) $f_1 + f_2$ *es casi automorfica.*

(ii) cf *es casi automorfica para todo escalar c.*

(iii) *Para cada l fijo en $\mathbb{K}$, la función $f_l : \mathbb{K} \to X$ definida por $f_l(x) := f(x+l)$ es casi automorfica.*

(iv) *La función $\hat{f} : \mathbb{K} \to X$ definida por $\hat{f}(x) := f(-x)$ es casi automorfica.*

(v) *El $\sup_{t\in\mathbb{K}} \|f(t)\| < \infty$, es decir, f es una función acotada.*

(vi) *El rango de f, $R_f = \{f(t)/t \in \mathbb{K}\}$ es relativamente compacto en X.*

(vii) *El $\sup\limits_{k\in\mathbb{K}} \|\overline{f}(k)\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{K}} \|f(k)\|$, donde*

$$\lim_{n\to\infty} f(k+k_n) = \overline{f}(k) \ \text{y} \ \lim_{n\to\infty} \overline{f}(k-k_n) = f(k).$$

Demostración. *(i)* Sean $f_1, f_2 : \mathbb{K} \to X$ funciones casi automorficas. Sea (x'_n) una sucesión en $\mathbb{K}$. Luego existe una subsucesión $(x''_n) \subset (x'_n)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x+x''_n) =: \overline{f}_1(x)$$

está bien definido para cada $x \in \mathbb{K}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_1(x-x''_n) = f_1(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{K}.$$

Para esta subsucesión (x''_n) existe un subsuseción $(x_n) \subset (x''_n)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_2(x+x_n) =: \overline{f}_2(x)$$

está bien definido para cada $x \in \mathbb{K}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_2(x - x_n) = f_2(x) \text{para cada} x \in \mathbb{K}.$$

Así obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} (f_1 + f_2)(x + x_n) =: \overline{f}_1(x) + \overline{f}_2(x)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{f}_1 + \overline{f}_2)(x - x_n) = f_1(x) + f_2(x).$$

está bien definido para cada x en $\mathbb{K}$. Por tanto $f_1 + f_2$ es una función casi automorfica.

Para las demostraciones de los items (ii), (iii) y (iv) se procede de manera análoga a lo realizado anteriormente.

(v) Supongamos que $\sup_{t\in\mathbb{K}} \|f(t)\| = \infty$, luego existe una sucesión $(x'_n) \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x'_n)\| = \infty.$$

Como f es una función casi automorfica existe una subsucesión $(x_n) \subset (x'_n)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{f}(0).$$

Como la norma es una función continua, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x_n)\| = \|\overline{f}(0)\| < \infty,$$

lo que contradice el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \|f(x'_n)\| = \infty$, pues toda subsucesión de $\|f(x'_n)\|$ diverge a ∞.

(vi) Sea $(f(x'_n))$ una sucesión en R_f. Como f es casi automorfica existe una subsucesión $(x_n) \subset (x'_n)$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{f}(0),$$

es decir, el rango de f es relativamente compacto.

(vii) Sea (k'_n) una sucesión en $\mathbb{K}$, luego existe una subsucesión $(k_n) \subset (k'_n)$ tal que,

$$\|\overline{f}(k)\| = \| \lim_{n\to\infty} f(k-k_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(k-k_n)\| \leq \sup_{j\in\mathbb{K}} \|f(j)\|,$$

lo que implica

$$\sup_{k\in\mathbb{K}} \|\overline{f}(k)\| \leq \sup_{k\in\mathbb{K}} \|f(k)\|.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|f(k)\| = \| \lim_{n\to\infty} \overline{f}(k+k_n)\| \leq \sup_{j\in\mathbb{K}} \|\overline{f}(j)\|,$$

luego

$$\sup_{k\in\mathbb{K}} \|f(k)\| \leq \sup_{k\in\mathbb{K}} \|\overline{f}(k)\|.$$

Así obtenemos

$$\sup_{k\in\mathbb{K}} \|f(k)\| = \sup_{k\in\mathbb{K}} \|\overline{f}(k)\|.$$

□

El siguiente teorema es una "generalización"de la parte *(ii)* del Teorema 1.1.5 si tomamos el escalar c como una función constante.

Teorema 1.1.6. *Sea $u : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{K} \to X$ funciones casi automorficas, entonces $uf : \mathbb{K} \to X$ definida por $(uf)(k) = u(k)f(k)$ es también casi automorfica.*

Demostración. Sea (k'_n) una sucesión en $\mathbb{K}$, sabemos que existe una subsucesión (k''_n) de (k'_n) tal que $\lim_{n\to\infty} u(k+k''_n) = \overline{u}(k)$, está bien definida para cada $k \in \mathbb{K}$ y $\lim_{n\to\infty} \overline{u}(k-k''_n) = u(k)$, para cada $k \in \mathbb{K}$. Como f es casi automorfica existe una subsucesión $(k_n) \subset (k''_n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(k+k_n) = \overline{f}(k)$

está bien definido para cada $k \in \mathbb{K}$ y $\lim_{n\to\infty} \overline{f}(k-k_n) = f(k)$ para cada $k \in \mathbb{K}$. Luego

$$\begin{aligned} \|u(k+k_n)f(k+k_n) - \overline{u}(k)\overline{f}(k)\| &\leq \|u(k+k_n)(f(k+k_n) - \overline{f}(k))\| \\ &+ \|(u(k+k_n) - \overline{u}(k))\overline{f}(k)\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande.

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} u(k+k_n)f(k+k_n) = \overline{u}(k)\overline{f}(k), \text{ para todo } k \in \mathbb{K}.$$

De manera similar utilizando la identidad

$$\overline{u}(k-k_n)\overline{f}(k-k_n) - u(k)f(k) = \overline{u}(k-k_n)(\overline{f}(k-k_n) - f(k)) + (\overline{u}(k-k_n) - u(k))f(k),$$

se demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{u}(k-k_n)\overline{f}(k-k_n) = u(k)f(k), \text{ para todo } k \in \mathbb{K}.$$

Así la función uf es casi automorfica como queríamos demostrar. □

Denotamos al espacio de las funciones casi automorficas por $AA(X)$ y el espacio de las funciones automorficas discretas por $AA_d(X)$. El Teorema 1.1.5 nos dice que $AA(X)$ y $AA_d(X)$ son espacios vectoriales, es más son espacios vectoriales normados dotados con la norma definida en el item (v). La pregunta natural que surge es si $AA(X)$ y $AA_d(X)$ son espacios de Banach. La respuesta la da el siguiente teorema.

Teorema 1.1.7. *Sea (f_n) una sucesión de funciones casi automorficas tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ converge uniformemente para cada t en $\mathbb{K}$. Entonces f es casi automorfica.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{K}$, como f_1 es una función casi automorfica existe una subsucesión $(x_n^1) \subset (x_n')$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x + x_n^1) =: \overline{f}_1(x)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_1(x - x_n^1) = f_1(x),$$

para todo x en $\mathbb{K}$. Como f_2 es también una función casi automorfica existe una subsucesión $(x_n^2) \subset (x_n^1)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_2(x + x_n^2) =: \overline{f}_2(x)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_2(x - x_n^2) = f_2(x),$$

para todo x en $\mathbb{K}$. Y así sucesivamente por el método de la diagonalización podemos obtener una subsucesión $(x_n) \subset (x_n')$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(x + x_n) =: \overline{f}_i(x) \tag{1.2}$$

para todo x en $\mathbb{K}$ y para todo $i = 1, 2, 3...$

Notemos que la sucesión $(\overline{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, pues

$$\begin{aligned}\|\overline{f}_i(x) - \overline{f}_j(x)\| &\leq \|\overline{f}_i(x) - f_i(x + x_n)\| + \|f_i(x + x_n) - f_j(x + x_n)\| \\ &+ \|f_j(x + x_n) - \overline{f}_j(x)\|.\end{aligned}$$

Utilizando la convergencia uniforme de (f_n) y el límite (1.2), obtenemos que $(\overline{f}_i(x))$ es una sucesión de Cauchy. Recordemos que X es un espacio de Banach, luego $(\overline{f}_i(x))$ es una sucesión que converge puntualmente en X. Sea $\overline{f}(x)$ el límite de $(\overline{f}_i(x))$, luego para cada $i = 1, 2, 3, ...$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|f(x + x_n) - \overline{f}(x)\| &\leq \|f(x + x_n) - f_i(x + x_n)\| + \|f_i(x + x_n) - \overline{f}_i(x)\| \\ &+ \|\overline{f}_i(x) - \overline{f}(x)\|.\end{aligned}$$

Nuevamente utilizando la convergencia uniforme de (f_n) el límite (1.2) y la convergencia puntual de la sucesión $(\overline{f}_i(x))$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x+x_n) = \overline{f}(x)$$

para todo x en $\mathbb{K}$. De manera análoga obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}(x-x_n) = f(x).$$

□

Con el teorema anterior concluimos que los espacios $AA(X)$ y $AA_d(X)$ son espacios vectoriales cerrados. Notemos que $AA(X) \subset BC(\mathbb{R}, X)$ (espacio de las funciones continuas acotadas), concluimos que $AA(X)$ es un espacio de Banach. Por otra parte $AA_d(X) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}, X)$, luego $AA_d(X)$ es un espacio de Banach.

Al trabajar con las funciones casi automorficas (discretas), la pregunta natural que surge es ¿Bajo qué condiciones la composición de funciones es casi automorfica (discreta)?. Veamos el siguiente teorema, que da respuesta a nuestra interrogante.

Teorema 1.1.8. *Sean X, Y espacios de Banach y $u : \mathbb{K} \to X$ una función casi automorfica. Si $\phi : X \to Y$ es una función continua, entonces la función compuesta $\phi \circ u : \mathbb{K} \to Y$ es casi automorfica.*

Demostración. Sea (k'_n) una sucesión en $\mathbb{K}$. Como u es una función casi automorfica existe una subsucesión (k_n) de (k'_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} u(k+k_n) = v(k)$$

está bien definida para cada $k \in \mathbb{K}$ y

$$\lim_{n\to\infty} v(k-k_n) = u(k)$$

para cada $k \in \mathbb{K}$. Como la función ϕ es continua tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \phi(u(k+k_n)) = \phi(\lim_{n\to\infty} u(k+k_n)) = \phi(v(k)).$$

De manera similar obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v(k-k_n)) = \phi(\lim_{n\to\infty} v(k-k_n)) = \phi(u(k)),$$

por lo tanto $\phi \circ u$ es una función casi automorfica (discreta). □

De forma natural tenemos el siguiente corolario, el cual será trascendental para el desarrollo de los capítulos posteriores.

Corolario 1.1.9. *Si A es un operador lineal acotado en X y $u : \mathbb{K} \to X$ es una función casi automorfica, entonces $Au(k)$ con $k \in \mathbb{K}$ es también casi automorfica (discreta).*

A continuación estudiaremos otra clase de funciones casi automorficas, las cuales están definidas en dos variables. Estas funciones serán utilizadas para ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias definidas en espacios de Banach en el caso de las ecuaciones en diferencias utilizaremos funciones casi automorficas discretas en dos variables.

Definición 1.1.10. *Una función $f : \mathbb{K} \times X \to X$ es casi automorfica en $s \in \mathbb{K}$, para cada $x \in X$, si para toda sucesión (s'_n) en $\mathbb{K}$ existe una subsucesión $(s_n) \subset (s'_n)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f(s+s_n, x) =: \overline{f}(s, x)$$

está bien definido para cada $s \in \mathbb{K}$, $x \in X$, y

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}(s-s_n, x) = f(s, x)$$

para cada $s \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.

Así como en el caso de las funciones casi automorficas (discretas) en una variable tenemos propiedades semejantes que están resumidas en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.11. *Si* $f_1, f_2 : \mathbb{K} \times X \to X$ *son funciones casi automorficas en* $s \in \mathbb{K}$, *para cada* x *en* X, *las siguientes aseveraciones son verdaderas*

(i) $f_1 + f_2$ *es casi automorfica en* $s \in \mathbb{K}$ *para cada* x *en* X.

(ii) λf_1 *es casi automorfica en* $s \in \mathbb{K}$ *para cada* x *en* X, *donde* λ *es una escalar.*

(iii) $\sup_{s \in \mathbb{K}} \|f(s,x)\| = M_x < \infty$, *para cada* x *en* X.

(iv) $\sup_{s \in \mathbb{K}} \|\overline{f}(s,x)\| = N_x < \infty$, *para cada* x *en* X, *donde* $\overline{f}$ *es la función que está definida en la Definición 1.1.10.*

Demostración. Las demostraciones de los items *(i)* y *(ii)* son análogos a las demostraciones de los items *(i)* y *(ii)* del Teorema 1.1.5.

(iii) Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que

$$\sup_{s \in \mathbb{K}} \|f(s,x_0)\| = \infty,$$

luego existe una sucesión (s'_n) en $\mathbb{K}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|f(s'_n, x_0)\| = \infty.$$

Como f es casi automorfica existe una subsucesión (s_n) de (s'_n) tal que

$$\lim_{n \to \infty} f(s_n, x_0) = \overline{f}(s, x_0) < \infty,$$

lo que es una contradicción, pues toda subsuceción de (s'_n) cumple con

$$\lim_{n \to \infty} \|f(s_n, x_0)\| = \infty.$$

(iv) De manera análoga a la demostración anterior, supongamos que existe x_0 en X, tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{K}} \|\overline{f}(s, x_0)\| = \infty,$$

luego existe una sucesión (s'_n) en $\mathbb{K}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\overline{f}(-s'_n, x_0)\| = \infty.$$

Como f es una función casi automorfica en s, existe una subsucesión (s_n) de (s'_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\overline{f}(-s_n, x_0)\| = \|f(0, x_0)\| < \infty,$$

lo que es una contradicción.

$\square$

A continuación queremos encontrar las condiciones que debe satisfacer una función $f : \mathbb{K} \times X \to X$ para que la composición $F(n) := f(n, \varphi(n))$ sea una función casi automorfica (discreta) cuando φ es una función casi automorfica (discreta). El siguiente teorema nos da la respuesta.

Teorema 1.1.12. *Sea $f : \mathbb{K} \times X \to X$ una función casi automorfica en $s \in \mathbb{K}$ para cada x en X, y además satisface la condición del tipo Lipschitz en x uniformemente para cada s, esto es*

$$\|f(s, x) - f(s, y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in X.$$

Supongamos que $\varphi : \mathbb{K} \to X$ es casi automorfica, entonces la función $F : \mathbb{K} \to X$ definida por $F(s) = f(s, \varphi(s))$ es casi automorfica.

Demostración. Sea (s'_n) una sucesión en $\mathbb{K}$. Entonces existe una subsucesión (s''_n) de (s'_n) tal que $\lim_{n\to\infty} f(s + s''_n, x) = \overline{f}(s, x)$ para todo $s \in \mathbb{K}, x \in X$

y $\lim_{n\to\infty} \overline{f}(s - s''_n, x) = f(s,x)$ para cada $s \in \mathbb{K}, x \in X$. Como φ es una función casi automorfica para esta subsucesión (s''_n) existe una subsucesión $(s_n) \subset (s''_n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi(s + s_n) = \overline{\varphi}(s)$ está bien definida para cada $s \in \mathbb{K}$ y $\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}(s - s_n) = \varphi(s)$ para cada $s \in \mathbb{K}$. Como la función f es Lipschitziana, tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\|f(s+s_n,\varphi(s+s_n)) - \overline{f}(s,\overline{\varphi}(s))\| &\leq \|f(s+s_n,\varphi(s+s_n)) - f(s+s_n,\overline{\varphi}(s))\| \\
&+ \|f(s+s_n,\overline{\varphi}(s)) - \overline{f}(s,\overline{\varphi}(s))\| \\
&\leq L\|\varphi(s+s_n) - \overline{\varphi}(s))\| \\
&+ \|f(s+s_n,\overline{\varphi}(s)) - \overline{f}(s,\overline{\varphi}(s))\|.
\end{aligned}$$

Luego, cuando $n \to \infty$, tenemos que $\|f(s+s_n,\varphi(s+s_n)) - \overline{f}(s,\overline{\varphi}(s))\| \to 0$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f(s+s_n,\varphi(s+s_n)) = \overline{f}(s,\overline{\varphi}(s)), \text{ para cada } s \in \mathbb{K}.$$

Para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}(s-s_n,\overline{\varphi}(s-s_n)) = f(s,\varphi(s))$$

utilizamos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}(s-s_n,\overline{\varphi}(s-s_n)) - f(s,\varphi(s))\| &\leq \|\overline{f}(s-s_n,\overline{\varphi}(s-s_n)) - \overline{f}(s-s_n,\varphi(s))\| \\
&+ \|\overline{f}(s-s_n,\varphi(s)) - f(s,\varphi(s))\|,
\end{aligned}$$

y procedemos de manera análoga a la demostración del límite anterior. Así la función F es casi automorfica. $\square$

1.2. Derivada fraccionaria

En esta sección veremos la definición de derivada fraccionaria y algunas de las propiedas importantes que ésta posee. Recordemos que X es un espacio de Banach complejo.

Definición 1.2.1. *Sea $\alpha > 0$ y $u : [0, \infty) \to X$. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de u de orden α está definida por*

$$D_t^\alpha u(t) := \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t g_{m-\alpha}(t-s)u(s)ds, \ \ con \ \ t > 0, \, m = [\alpha]$$

y

$$g_\beta(t) := \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad t > 0, \quad \beta \geq 0.$$

Es importante señalar que la derivada fraccionaria coincide con la definición de derivada usual, cuando $\alpha = n$

$$D_t^n := \frac{d^n}{dt^n}, \text{ con } n = 1, 2, ...$$

Nos interesa determinar la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de una función cualquiera. Para esto recordemos que la transformada de Laplace de una función $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$ está definida por

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) := \hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \quad Re\lambda > \omega,$$

si $\mathcal{L}(f)(\lambda)$ es absolutamente convergente para $Re\lambda > \omega$, tenemos que

$$\widehat{D_t^\alpha f}(\lambda) = \lambda^\alpha \hat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0)\lambda^{m-1-k}, \tag{1.3}$$

donde el coeficiente λ^α está definido como

$$\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{iarg\lambda}, \text{ con } -\pi < arg\lambda < \pi.$$

En adelante, definiremos una función que es de crucial importancia para el desarrollo del capítulo posterior. La cual se denomina *función de Mittag-Leffler*, su definición es la siguiente.

Definición 1.2.2. *Sea* $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *definida por*

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\mu} \frac{\mu^{\alpha-\beta}}{\mu^{\alpha} - z} d\mu, \quad \alpha, \beta > 0,$$

donde Ha *es el camino Hankel, es decir, es un camino el cual empieza y termina en* $-\infty$ *y encierra en un círculo el disco* $|\mu| \leq |z|^{1/\alpha}$ *contra el sentido del reloj. La función* $E_{\alpha,\beta}$ *la llamamos función Mittag-Leffler.*

Para ver más detalles, ver (e.g. [30]). Ésta es una función entera la cual da una generalización de algunas funciones clásicas, por ejemplo:

i) Función Exponencial: $E_{1,1}(z) = e^z$;

ii) Funciones Coseno: $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$ y $E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$;

iii) Funciones Seno: $zE_{2,2}(z^2) = \sinh(z)$ y $zE_{2,2}(-z^2) = \sin(z)$.

La transformada de Laplace de la función Mittag-Leffler con peso está dada por:

$$\mathcal{L}(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\rho^{\alpha} t^{\alpha})(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^{\alpha} + \rho^{\alpha}}, \quad Re\lambda > \rho^{1/\alpha}, \quad \rho > 0, \tag{1.4}$$

la cual se encuentra en cf.[29, (A.27) p.267].
Consideremos la ecuación diferencial fraccionaria

$$D_t^{\alpha} u(t) = -\rho^{\alpha} u(t), \quad 0 < \alpha < 2, \ \rho > 0. \tag{1.5}$$

Si $0 < \alpha < 1$ la ecuación (1.5) se denomina *relajación fraccionaria,* ver ([29]) y si $1 < \alpha < 2$ la ecuación (1.5) se denomina *oscilación fraccionaria,* ver [30].

En el primer caso, necesitamos agregar una condición inicial como,

$$(g_{1-\alpha} * u)(0) = u_0,$$

y en el segundo caso necesitaremos dos condiciones iniciales como

$$(g_{2-\alpha} * u)(0) = u_0 \text{ y } (g_{2-\alpha} * u)'(0) = u_1.$$

Observación 1.2.3. *Dentro de la teoría de la viscoelasticidad, Heymans y Podlubny [38] han demostrado que es posible dar un sentido físico a las condiciones iniciales expresadas en términos de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, además es posible obtener valores iniciales para tales condiciones con medidas y observaciones apropiadas. Utilizando la transformada de Laplace (1.3) y la ecuación (1.4), podemos obtener la solución de (1.5) de la siguiente forma:*

$$u(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\rho^\alpha t^\alpha)u_0, \quad \alpha \in (0,1);$$
$$u(t) = t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\rho^\alpha t^\alpha)u_0 + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\rho^\alpha t^\alpha)u_1, \quad \alpha \in (1,2).$$

En lo que sigue, necesitaremos una descripción explícita de la función

$$s_\alpha(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\rho^\alpha t^\alpha), \quad \alpha \in (1,2)$$

cuya transformada de Laplace es

$$\hat{s}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha}, \quad Re\lambda > \rho^{1/\alpha}, \quad \rho > 0. \tag{1.6}$$

Proposición 1.2.4. *Sea $1 < \alpha < 2$ y $\rho > 0$. Para todo $t \geq 0$ tenemos que*

$$\begin{aligned} s_\alpha(t) &= \frac{1}{\pi}\sin\pi\alpha\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\alpha}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos\pi\alpha+\rho^{2\alpha}}dr \\ &- \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-1}}e^{t\rho\cos\pi/\alpha}\cos[t\rho\sin\pi/\alpha+\pi/\alpha]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Demostración. El caso $\rho = 1$ la demostración está se encuentra en [29, p.244-247]. Haremos un esquema de los pasos principales para la demostración del caso general. Primero notemos la siguiente identidad

$$\frac{1}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha} = \frac{-1}{\rho^\alpha}(\lambda \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha} - 1). \tag{1.8}$$

Denotamos $e_\alpha(t) := E_{\alpha,1}(-\rho^\alpha t^\alpha)$. Entonces por (1.4) obtenemos $\hat{e}_\alpha(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha}$ para $Re\lambda > \rho^{1/\alpha}$. Por lo tanto de (1.6) y (1.8) obtenemos

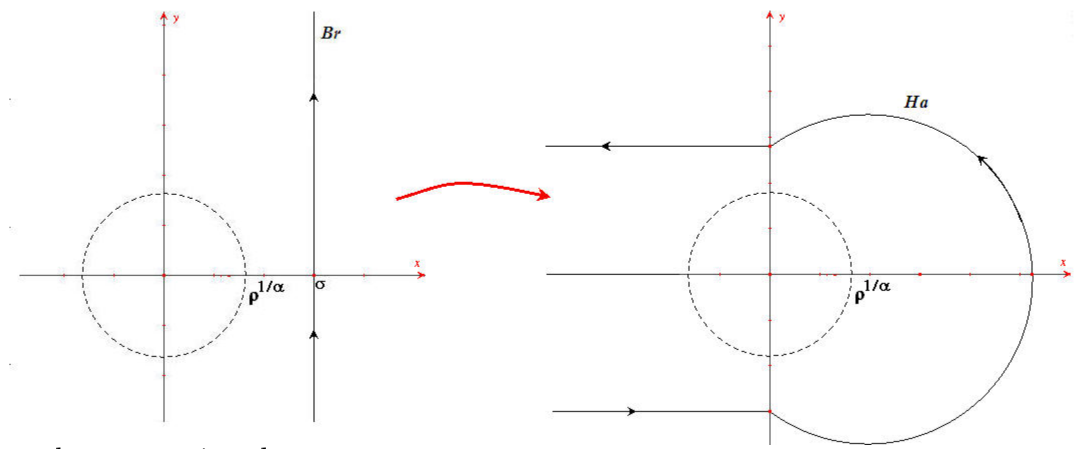
$$s_\alpha(t) = \frac{-1}{\rho^\alpha} e'_\alpha(t). \tag{1.9}$$

Por la fórmula de la inversión de la Transformada de Laplace, tenemos

$$e_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} e^{\lambda t} \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha} d\lambda$$

donde B_r denota el camino de Bromwich, es decir, es la recta $Re(\lambda) = \sigma \geq \rho^{1/\alpha}$ y la parte imaginaria $Im(\lambda)$ va desde $-\infty$ a $+\infty$.

En orden de obtener una descomposición de e_α en dos partes, torcemos la integración del camino Bromwich B_r a un camino equivalente que es el camino de Hankel $Ha(\rho^{1/\alpha})$, la cual empieza desde $-\infty$ a través del lado inferior del eje real negativo, luego rodea el disco $|\lambda| = \rho^{1/\alpha}$ en el sentido positivo y termina en $-\infty$ a lo largo del lado superior del eje real negativo, como muestra la siguiente figura:



Lo cual nos permite obtener

$$e_\alpha(t) = f_\alpha(t) + g_\alpha(t), \tag{1.10}$$

con

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha(\epsilon)} e^{\lambda t}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha}d\lambda$$

donde ahora el camino Hankel $Ha(\epsilon)$ denota un giro constituido por un círculo pequeño $|\lambda| = \epsilon$ con $\epsilon \longrightarrow 0$ y por los dos bordes del eje real negativo, y

$$g_\alpha(t) = e^{s_0 t}Res(\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha})|_{s_0} + e^{s_1 t}Res(\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \rho^\alpha})|_{s_1}$$

donde $s_0 = \rho e^{i\pi/\alpha}$ y $s_1 = \rho e^{-i\pi/\alpha}$ son los polos de $\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha+\rho^\alpha}$, $(1 < \alpha < 2)$. Notemos que s_0 y s_1 están localizados en la mitad del plano izquierdo. Entonces obtenemos

$$g_\alpha(t) = \frac{2}{\alpha}e^{\rho t\cos(\pi/\alpha)}\cos[\rho t\sin(\pi/\alpha)];\ 1 < \alpha < 2. \tag{1.11}$$

Por otra parte, la contribución del camino de Hankel $Ha(\epsilon)$ cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ es proporcionada por

$$f_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-rt}K_\alpha(r)dr, \tag{1.12}$$

con

$$
\begin{aligned}
K_\alpha(r) &= -\frac{1}{\pi} Im\{\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha+\rho^\alpha}|_{\lambda=re^{i\pi}}\} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\rho^\alpha r^{\alpha-1}\sin\alpha\pi}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos(\alpha\pi)+\rho^{2\alpha}}.
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

Por tanto

$$
e'_\alpha(t) = -\int_0^\infty re^{-rt}K_\alpha(r)dr + \frac{2\rho}{\alpha}e^{\rho t\cos(\pi/\alpha)}\cos[\rho t\sin(\pi/\alpha)+\pi/\alpha], \tag{1.14}
$$

y finalmente de (1.14) y (1.9) obtenemos (1.7).

□

Observación 1.2.5. *Si la condición inicial es* $e_\alpha(0)=1$*, se tiene de (1.10) y (1.11) que*

$$
1 = f_\alpha(0)+g_\alpha(0) = f_\alpha(0)+\frac{2}{\alpha}.
$$

Por tanto de (1.12) y (1.13),

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}\sin\alpha\pi}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos(\alpha\pi)+\rho^{2\alpha}}dr = \frac{1}{\rho^\alpha}(1-\frac{2}{\alpha}).
$$

1.3. Familias resolventes de operadores

Necesitamos una familia de operadores que nos permita definir una solución débil para las ecuaciones diferenciales fraccionarias, que trataremos en el siguiente capítulo. Para esto, veamos la siguiente definición

Definición 1.3.1. *Sea A un operador cerrado y lineal con dominio $D(A)$ definido sobre un espacio de Banach X y $\alpha > 0$. Llamamos A el generador de una familia α-resolvente si existe $\omega \geq 0$ y una función fuertemente continua $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$ tal que $\{\lambda^\alpha : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ y*

$$(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt, \quad Re\lambda > \omega, \quad x \in X.$$

En ese caso, $\{S_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es llamada la familia α-resolvente generada por A.

Por la unicidad de la transformada de Laplace, una familia 1-resolvente es lo mismo que un C_0-semigrupo, mientras que una familia 2-resolvente corresponde al concepto de la familia seno, ver [6, Sección 3.15].

Notemos que las familias α-resolventes son un caso particular de las familias (a, k)-regularizadas introducidas en [43]. Éstas han sido estudiadas en una serie de artículos en los últimos años (ver [44], [45], [46], [53]). Según [43] una familia α-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ corresponde a una familia (g_α, g_α)-regularizada.

Notablemente las familias α-resolventes están presentes también en [10, p.62] (ver fórmula (4.33)) donde algunas propiedades son estudiadas en el contexto de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Al igual que en la situación de los C_0-semigrupos, tenemos diversas relaciones de una familia α-resolvente y su generador. El siguiente resultado es una consecuencia directa de [43, Proposición 3.1 y Lema 2.2].

Proposición 1.3.2. *Sea $1 \leq \alpha \leq 2$ y sea $\{S_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ una familia α-resolvente sobre X con generador A. Entonces las siguientes aseveraciones son verdaderas:*

(a) $S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ *y* $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$, *para todo* $x \in D(A)$ *y* $t \geq 0$;

(b) Sea $x \in D(A)$ *y* $t \geq 0$, *entonces*

$$S_\alpha(t)x = g_\alpha(t)x + \int_0^t g_\alpha(t-s)AS_\alpha(s)xds. \tag{1.15}$$

En particular $\frac{d}{dt}S_\alpha(t)x$ *existe.*

(c) Sea $x \in X$ *y* $t \geq 0$. *Entonces* $\int_0^t g_\alpha(t-s)S_\alpha(s)xds \in D(A)$ *y*

$$S_\alpha(t)x = g_\alpha(t)x + A\int_0^t g_\alpha(t-s)S_\alpha(s)xds.$$

En particular, $S_\alpha(0) = g_\alpha(0)$.

Observación 1.3.3. *Sea $1 < \alpha < 2$. Tomando la transformada de Laplace a la ecuación*

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t), \quad (g_{2-\alpha} * u)(0) = 0, \quad (g_{2-\alpha} * u)'(0) = x \tag{1.16}$$

obtenemos que la transformada de Laplace de la solución es $(\lambda^\alpha - A)^{-1}$. En consecuencia, la ecuación (1.16) está bien definida si y sólo si A es el generador de una familia α-resolvente.

Sea $1 \leq \alpha \leq 2$. Si un operador A, con dominio $D(A) \subset X$, es el generador infinitesimal de una familia α-resolvente $S_\alpha(t)$ entonces,

$$Ax = \frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t\to 0^+} \frac{\Gamma(\alpha)S_\alpha(t)x - t^{\alpha-1}x}{t^{2\alpha-1}}, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Para la aseveración anterior ver [46, Teorema 2.1].

Por ejemplo, el caso límite $S_1(t)$ corresponde al generador de un C_0-semigrupo y $S_2(t)$ corresponde al generador de una familia seno.

Una caracterización de generadores de familias α-resolvente, análogo al Teorema de Hille-Yosida de C_0-semigrupos, pueden ser directamente deducidos de [43, Teorema 3.4]. Resultados sobre perturbación, aproximación, representación, así como los teoremas del tipo ergódico también pueden ser deducidos de $(a,k)-$resolventes regularizados, ver [44], [45], [46] y [53]. Tenemos el siguiente criterio para encontrar familias α-resolventes.

Teorema 1.3.4. *Sea A el generador de una familia coseno fuertemente continua. Entonces A es el generator de una familia α-resolvente para todo $1 \leq \alpha < 2$.*

Demostración. Como A genera una familia coseno, entonces por el principio de la subordinación [10, Teorema 3.1] tenemos que A genera una familia fuertemente continua $R_\alpha(t)$ exponencialmente acotada, tal que

$$\hat{R}_\alpha(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1},$$

para todo λ suficientemente grande. Definimos

$$S_\alpha(t)x = \frac{d}{dt}\int_0^t g_\alpha(t-s)R_\alpha(s)x ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X.$$

Luego es claro que $S_\alpha(t)$ es fuertemente continua y,

$$\hat{S}_\alpha(\lambda) = \lambda \widehat{g_\alpha * R_\alpha}(\lambda) = \lambda \frac{1}{\lambda^\alpha}\hat{R}_\alpha(\lambda) = (\lambda^\alpha - A)^{-1},$$

para todo λ suficientemente grande. Por lo tanto A genera una familia α-resolvente. $\square$

Capítulo 2

Soluciones débiles casi automorficas de ecuaciones diferenciales fraccionarias

En este capítulo definiremos la solución débil de la ecuación general

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + t^n f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \leq \alpha \leq 2, \quad (2.1)$$

donde $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador infinitesimal de una familia α-resolvente y $f : \mathbb{R} \times X \times X \to X$ es una función casi automorfica que satisface las condiciones del Teorema 1.1.12. La derivada fraccionaria que utilizaremos será en el sentido de Riemann-Liouville, como vimos en la sección *1.2* del capítulo anterior.

La razón para estudiar la ecuación (2.1) es que aparece en distintos modelos matemáticos de viscoelasticidad [51] y en otros campos de la ciencia [39], [50]. De hecho, la ecuación del tipo convolución (2.1) es equivalente a resolver una ecuación integral (ver [10], [18]). Es también interesante cuando se investiga entre las ecuaciones de difusión ($\alpha = 1$) y propagación de onda ($\alpha = 2$). Es importante destacar que el estudio de soluciones casi automorficas de (2.1) en el caso $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$ fue realizado en [20], [28], [33] y [42], pero no había sido considerado para las ecuaciones diferenciales fraccionarias antes del artículo [4].

Por otra parte, las condiciones suficientes para la existencia de soluciones débiles casi automorficas de la ecuación semilineal de evolución

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

donde f es casi automorfica, ha sido estudiada en distintos artículos en los últimos años. Por ejemplo en [33] A es un generador de un C_0-semigrupo exponencialmente estable, por otra parte, en [28] se trabaja con la misma condición de A y adicionalmente f es de la forma $f(t, x) = P(t)Q(x)$. La existencia y unicidad de (2.2) fue obtenida en [20] bajo algunas condiciones iniciales sobre A y f. El correspondiente problema de segundo orden fue recientemente estudiado en [42], donde A es el generador de un semigrupo holomorfico.

En resumen, la ecuación (2.1) será analizada en seis diferentes casos:

1. Cuando $n = 0$ y f es de una variable.

2. Cuando $n > 0$ y f es de una variable.

3. Cuando $n = 0$, f es de una variable y el generador $A = -\rho^{\alpha}$, con $\rho > 0$.

4. Cuando $n > 0$, f es de dos variables y el generaror $A = -\rho^{\alpha}$, con $\rho > 0$.

5. Cuando $n = 0$ y f está definida en dos variables.

6. Cuando $n = 0$ y f está definida en tres variables.

Los casos (1), (2) y (3) serán estudiados en la primera sección y los casos restantes en la segunda sección.
En la primera sección definiremos la solución débil para las ecuaciones ya mencionadas y haremos un contraste de las soluciones cuando α toma los valores extremos 1 y 2. Además, estudiaremos un nuevo concepto de funciones casi automorficas, que son las *funciones casi automorficas con peso,* cuales nos ayudarán a resolver las ecuaciones del tipo (2) y (4). En la segunda sección haremos incapié en la condición del tipo Lipchitz de las funciones casi automorficas en dos o tres variables, la cual es una condición crucial para demostrar la unicidad de la solución débil casi automorfica para las ecuaciones del tipo (4), (5) y (6).

2.1. Ecuaciones fraccionarias lineales

Comenzaremos esta sección con el siguiente lema, que será fundamental para demostrar que la solución de las ecuaciones fraccionarias lineales son casi automorficas.

Lema 2.1.1. *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *una familia fuertemente continua de operadores lineales acotados tal que*

$$\|S(t)\| \leq \phi(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+, \text{ con } \phi \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Si $f : \mathbb{R} \to X$ *es una función casi automorfica entonces*

$$\int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)\,ds \in AA(X).$$

Demostración. Sea $(s'_n) \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Como $f \in AA(X)$ existe una subsucesión (s_n) de (s'_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definimos $F(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)\,ds$ y $G(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s)\,ds$. Ahora consideremos

$$\begin{aligned} F(t+s_n) &= \int_{-\infty}^{t+s_n} S(t+s_n-s)f(s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} S(t-\sigma)f(\sigma+s_n)\,d\sigma. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\|F(t+s_n)\| \leq \|\phi\|_1\|f\|_\infty \text{ y } \|G(t)\| \leq \|\phi|_1\|g\|_\infty$$

y por la continuidad de $S(\cdot)x$, tenemos $S(t-\sigma)f(\sigma+s_n) \to S(t-\sigma)g(\sigma)$, cuando $n \to \infty$ para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ fijo y cualquier $t \geq \sigma$. Entonces por teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$F(t+s_n) \to G(t) \text{ cuando } n \to \infty, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

De manera similar podemos demostrar que

$$G(t-s_n) \to F(t) \text{ cuando } n \to \infty, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Sea $1 < \alpha < 2$ y supongamos que A genera una familia α-resolvente acotada $S_\alpha(t)$ sobre X, y sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$ dado. Entonces la única solución del problema

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad (g_{2-\alpha} * u)(0) = 0, \quad (g_{2-\alpha} * u)'(0) = x$$

está dada por

$$u(t) = S_\alpha(t)x + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Para nuestros propósitos no es natural especificar un valor inicial, por tanto ampliaremos la terminología anterior de la siguiente manera.

Definición 2.1.2. *Sea A un generador de una familia α-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$. Una función $u : \mathbb{R} \to X$ que satisface la ecuación*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s)s^n F(s, u(s), u'(s))ds, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

es llamada solución débil sobre $\mathbb{R}$ de la ecuación

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + t^n F(t, u(t), u'(t)), \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$$

Observación 2.1.3. *La definición anterior es la extensión natural del concepto usual de solución débil en los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$. De hecho, en el primer caso $T(t) = S_1(t)$ es el C_0-semigrupo generado por A y $u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds$. (Aquí denotamos $f(s) := s^n F(s, u(s), u'(s))$). Entonces tenemos que para todo $t > a$, con $a \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
T(t-a)u(a) \;+\; & \int_a^t T(t-s)f(s)ds \\
&= T(t-a)\int_{-\infty}^{a} T(a-s)f(s)ds + \int_a^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{a} T(t-s)f(s)ds + \int_a^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)ds = u(t).
\end{aligned}$$

En el segundo caso tenemos que $S(t) := S_2(t)$ es la familia seno generado por A y $u(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds$. Por tanto, con $a \in \mathbb{R}$ dado y denotando

$C(t) := S'(t)$ la función coseno (cf. [6] o [23]), tenemos

$$\begin{aligned} C(t-a)u(a) &+ S(t-a)u'(a) = C(t-a)\int_{-\infty}^{a} S(a-s)f(s)\,ds \\ &+ S(t-a)\int_{-\infty}^{a} C(a-s)f(s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{a} [C(t-a)S(a-s) + S(t-a)C(a-s)]f(s)\,ds. \end{aligned}$$

Como $S(t+s) = C(s)S(t) + S(s)C(t)$, tenemos

$$C(t-a)u(a) + S(t-a)u'(a) = \int_{-\infty}^{a} S(t-s)f(s)\,ds.$$

En consecuencia, obtenemos

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)\,ds = [C(t-a)u(a)+S(t-a)u'(a)] + \int_{a}^{t} S(t-s)f(s)\,ds,$$

la cual es usualmente llamada solución débil para el problema de Cauchy de segundo orden.

Note que en el caso de $1 < \alpha < 2$ no hay una propiedad análoga de semigrupo $T(t+s) = T(t)T(s)$ o una ecuación funcional de coseno $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$, las cuales juegan un papel crucial en el desarrollo de las correspondientes teorías. Esto se debe al carácter no local que posee la diferenciación fraccionaria, dejando siempre alguna presencia de memoria.

Antes de ver el siguiente resultado, veamos la definición de un espacio denominado *espacio de las funciones casi automorficas con peso*. Este espacio fue introducido en el año 2006, por B. Basit y A.J. Pryde para poder estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación del tipo

$$u'(t) = Au(t) + t^n f(t, u(t)),$$

donde A es el generador de un C_0-semigrupo y $f(\cdot, x)$ pertenece al espacio anteriormente mencionado.

Sea $w_n(t) = (1 + |t|)^n$, con $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$. Para una función $f : \mathbb{R} \to X$, definimos la norma

$$\|f\|_{w_n,\infty} = \|f/w_n\|_\infty.$$

Usaremos la siguiente notación para el siguiente conjunto

$$C_{w_n,0}(\mathbb{R}, X) = \{w_n f : f \in C_0(\mathbb{R}, X)\}.$$

Cabe notar que este espacio es un espacio de Banach dotado con la norma $\|\cdot\|_{w_n,\infty}$, para más detalles consultar [7].

Definición 2.1.4. *Una función casi automorfica con peso, es una función que pertenece a $AA_{w_n}(\mathbb{R}, X)$, donde*

$$AA_{w_n}(\mathbb{R}, X) = t^n AA(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \oplus C_{w_n,0}(\mathbb{R}, X),$$

es decir, si $f \in AA_{w_n}(\mathbb{R}, X)$, entonces f se puede descomponer de manera única en la forma

$$f = t^n f_1 + f_2,$$

con $f_1 \in AA(X)$ y $f_2 \in C_{w_n,0}(\mathbb{R}, X)$.

Cabe destacar $t^n AA(X)+C_{w_n,0}(\mathbb{R}, X)$ es un subespacio cerrado de $BC(\mathbb{R}, X)$ y la suma es directa (topologicamente), ver [7], Teorema 1.6. Esto nos motiva al siguiente teorema que es el principal resultado de esta sección. Cabe notar que este resultado extiende lo realizado en [33, Teorema 3.1].

Teorema 2.1.5. *Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. Suponga que A genera una familia α-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ para algún $1 \leq \alpha < 2$ que satisface*

$$\|s^k S_\alpha(t)\| \leq \phi_{\alpha,k}(t), \ t \geq 0, \ \textit{con } \phi_{\alpha,k} \in L^1(\mathbb{R}_+) \tag{2.4}$$

para todo $k = 0, 1, ..., n$. Sea $f \in AA(\mathbb{X})$. Entonces la ecuación

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + t^n f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

tiene solución débil $u \in AA_{w_n}(\mathbb{R}, X)$.

Demostración. Sea $u(t) = \displaystyle\int_0^\infty S_\alpha(s)(t-s)^n f(t-s)\, ds$ entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S_\alpha(s)(t-s)^n f(t-s)\, ds &= t^n \int_0^\infty S_\alpha(s) f(t-s)\, ds \\ &+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^{n-k} \int_0^\infty s^k S_\alpha(s) f(t-s)\, ds \\ &=: u_1(t) + u_2(t). \end{aligned}$$

(en el caso $n = 0$ tomamos $u_2(t) \equiv 0$). Por Lema 2.1.1, $u_1 \in AA_{w_n}(X)$. Demostraremos que $u_2 \in C_{w_n,0}(\mathbb{R}, X)$. De hecho, por (2.4) tenemos $s^k S_\alpha(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(X))$ para todo $k = 0, 1, ..., n$. Entonces

$$\left\| \int_0^\infty s^k S_\alpha(s) f(t-s)\, ds \right\| \leq \int_0^\infty \|s^k S_\alpha(s) f(t-s)\|\, ds \leq \|f\|_\infty ||\phi_k||_1$$

para todo $k = 0, 1, ..., n$. Como $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{t^r}{(1+|t|)^n} = 0$, tenemos

$$t^r \int_0^\infty s^k S_\alpha(s) f(t-s)\, ds \in C_{w_n,0}(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \quad 0 \leq r < n$$

y esto demuestra que $u_2 \in C_{w_n,0}(\mathbb{R}, X)$. $\square$

Observación 2.1.6. *El caso $\alpha = 2$ no está cubierto por el teorema anterior, aunque $n = 0$. Esto se debe al hecho de que la familia seno no puede ser estable, como fue demostrado recientemente en [52, Teorema 2.3]. Por otra parte, el caso $\alpha = 1$ y $n = 0$, está en el Teorema 2.1.5 que fue probado por N'Guérékata [33], y el caso $\alpha = 1, n \in \mathbb{N}$ fue demostrado por Basit y Pryde [7].*

Corolario 2.1.7. *Supongamos que A genera una familia α-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \phi_\alpha(t), \text{ para todo } t \geq 0, \text{ con } \phi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

y sea $f \in AA(X)$. Entonces para todo $1 \leq \alpha < 2$, la ecuación

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

tiene una solución débil $u \in AA(X)$.

El siguiente resultado es una generalización de [15, Teorema 3.1], donde el caso $\alpha = 1$ es demostrado.

Corolario 2.1.8. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función casi automorfica y sea $\rho > 0$ un número real. Entonces para cada $1 < \alpha < 2$, la ecuación*

$$D_t^\alpha u(t) = -\rho^\alpha u(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

tiene solución débil casi automorfica, dada por

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s) f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde

$$\begin{aligned} S_\alpha(t) &= \frac{1}{\pi} \sin \pi\alpha \int_0^\infty e^{-rt} \frac{r^\alpha}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \rho^\alpha \cos \pi\alpha + \rho^{2\alpha}} dr \\ &- \frac{2}{\alpha \rho^{\alpha-1}} e^{t\rho \cos \pi/\alpha} \cos[t\rho \sin \pi/\alpha + \pi/\alpha], \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Demostración. La demostración de que (2.6) es una familia α-resolvente se tiene de la Proposición 1.2.4. Probaremos que

$$|S_\alpha(t)| \leq \varphi_\alpha(t), \quad t \geq 0,$$

donde $\varphi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$. De hecho, notemos que $r^{2\alpha} + 2r^\alpha\rho^\alpha \cos\pi\alpha + \rho^{2\alpha} = (r^\alpha\cos(\pi\alpha) + \rho^\alpha)^2 + (r^\alpha\sin(\pi\alpha))^2 \geq 0$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |S_\alpha(t)| &\leq \frac{1}{\pi}|\sin\pi\alpha|\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\alpha}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos\pi\alpha+\rho^{2\alpha}}dr \\ &+ \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-1}}e^{t\rho\cos\pi/\alpha} =: \varphi_\alpha(t). \end{aligned}$$

Aplicando teorema de Fubini y notando que $\cos\pi/\alpha < 0$ y $\sin\pi\alpha < 0$ para $1 < \alpha < 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\varphi_\alpha(t)|dt &= \frac{1}{\pi}|\sin\pi\alpha|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\alpha}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos\pi\alpha+\rho^{2\alpha}}dtdr \\ &+ \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-1}}\int_0^\infty e^{t\rho\cos\pi/\alpha}dt \\ &= \frac{-\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos\pi\alpha+\rho^{2\alpha}}dr \\ &+ \frac{2}{\alpha\rho^\alpha(-\cos(\pi/\alpha))} \end{aligned}$$

El primer término es igual a $\frac{-1}{\rho^\alpha}(1-\frac{2}{\alpha})$ por la Observación 1.2.5. Entonces $\varphi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$ y

$$||\varphi_\alpha||_1 = \frac{2}{\alpha\rho^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{2}{\alpha\rho^\alpha\cos(\pi/\alpha)} \tag{2.7}$$

□

Observación 2.1.9. *Definamos* $l(\alpha) := ||\varphi_\alpha||_1^{-1}$. *Entonces para* $1 \leq \alpha \leq 2$ *tenemos que* $l(1) = \frac{\rho}{3}$, $l(2) = 0$ *y* $l(\alpha)$ *tiene un máximo en algún punto* $\alpha_0(\rho) \in (1,2)$. *Observamos que el punto* $\alpha_0(\rho)$ *tiende a* 1 *cuando* ρ *tiende a* 0 *y, recíprocamente, el punto punto* $\alpha_0(\rho)$ *tiende a* 2 *cuando* ρ *tiende a* ∞.

2.2. Ecuaciones fraccionarias semilineales

En lo que sigue, trabajaremos con ecuaciones semilineales con derivada fraccionaria, para esto denotaremos

$$l(\alpha,\rho) = (\frac{2}{\alpha\rho^{\alpha}} - \frac{1}{\rho^{\alpha}} - \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha}\cos(\pi/\alpha)})^{-1}, \quad \rho > 0,$$

siempre que $1 < \alpha < 2$. El principal resultado de esta sección generaliza [33, Teorema 3.2] al caso fraccionario .

Teorema 2.2.1. *Supongamos que A genera una familia α-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \phi_\alpha(t), \text{ para todo } t \geq 0, \text{ con } \phi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Sea $f : \mathbb{R}\times X \to X$ casi automorfica en t para cada $x \in X$ y además satisface la condición de Lipschitz en x uniformemente en t, esto es,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \text{ para todo } x,y \in X.$$

Entonces

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t,u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

tiene única solución débil casi automorfica si $L < ||\phi_\alpha||_1^{-1}$.

Demostración. Definimos el operador $F : AA(X) \mapsto AA(X)$ por

$$(F\varphi)(t) := \int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,\phi(s))\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En vista del Teorema [35, Teorema 2.2.6] y el Lema 2.1.1, F está bien definida. Entonces para $\varphi_1, \varphi_2 \in AA(X)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|F\varphi_1 - F\varphi_2\|_\infty &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s)[f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))]ds \right\| \\ &\leq L\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_0^\infty \|S_\alpha(\tau)\|\|\varphi_1(t-\tau) - \varphi_2(t-\tau)\|d\tau \\ &\leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \int_0^\infty \phi_\alpha(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Esto demuestra que F es una contracción, luego por el Teorema del Punto Fijo de Banach existe un único $u \in AA(X)$, tal que $Fu = u$, esto es,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s) f(s, u(s)) ds.$$

$\square$

Observación 2.2.2. *En [28] fue demostrada la existencia de soluciones débiles casi automorficas para (2.8) con $\alpha = 1$, donde f no necesariamente es Lipschitziana, pero f es una función de la forma $f(t,x) = P(t)Q(x)$, donde P y Q poseen condiciones apropiadas.*

El siguiente corolario es una generalización del caso $\alpha = 1$, que fue demostrado en [15, Teorema 3.2].

Corolario 2.2.3. *Sea $\rho > 0$ un número real. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función casi automorfica en la primera variable y además satisface la condición del tipo Lipschitz en la segunda variable, esto es,*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$D_t^\alpha u(t) = -\rho^\alpha u(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

tiene única solución débil casi automorfica si $L < l(\alpha, \rho)$.

Observación 2.2.4. *Es interesante notar, que en relación a la Observación 2.1.9, el comportamiento de las potencias fraccionarias en la ecuación (2.8) es mejor para el caso $\alpha > 1$ hasta cierto punto $s_0(\rho)$ el cual depende del número ρ, en este sentido la constante de Lipschitz L puede tomar más valores, comparado con el caso $\alpha = 1$. Mientras que el caso límite $\alpha = 2$ es el peor, pues $||\varphi_\alpha||^{-1}$ tiende a cero cuando α tiende a 2 independientemente del valor de ρ.*

Notemos que si $f \in AA(X)$, su derivada f' existe y es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, entonces $f' \in AA(X)$, ver [35, Teorema 2.4.1]. Para el siguiente resultado utilizaremos el espacio de las funciones casi automorficas diferenciables definidas por

$$AA^1(X) := \{f \in AA(X) : f' \text{ existe y pertenece a } AA(X)\},$$

el cual es un espacio de Banach, dotado con la norma

$$\|f\|_{AA^1(X)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Teorema 2.2.5. *Sea $1 < \alpha < 2$. Supongamos que A genera una familia α-resolvente $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \phi_\alpha(t) \ \text{ y } \ \|S'_\alpha(t)\| \leq \psi_\alpha(t), \ \text{ para todo } t \geq 0, \ \text{ con } \phi_\alpha, \psi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Sea $f : \mathbb{R} \times X \times X \mapsto X$ casi automorfica en $t \in \mathbb{R}$, para cada $x, y \in X$, además satisface la condición de Lipschitz uniformemente en t, esto es,

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq L_1\|x_1 - x_2\| + L_2\|y_1 - y_2\|, \ \text{ para todo } x, y \in X,$$

con

$$L := max\{L_1, L_2\} < \frac{1}{||\psi||_1 + ||\phi||_1}.$$

Entonces

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

tiene una única solución débil casi automorfica diferenciable.

Demostración. Definimos el operador $H : AA^1(X) \mapsto AA^1(X)$ por

$$(H\varphi)(t) := \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s) f(s, \varphi(s), \varphi'(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostraremos que H está bien definido, para esto primero demostraremos $f(\cdot, \varphi(\cdot), \varphi'(\cdot)) \in AA(X)$.

Como f es casi automorfica en t entonces para cualquier sucesión $(s'_n) \subset \mathbb{R}$ existe una subsucesión (s_n) tal que

$$f(t+s_n, x, y) \to \overline{f}(t, x, y) \text{ y } \overline{f}(t-s_n, x, y) \to f(t, x, y) \text{ cuando } n \to \infty,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Para esta sucesión (s_n) existe una subsucesión (s_m) tal que

$$\varphi(t+s_m) \to \overline{\varphi}(t) \text{ y } \overline{\varphi}(t-s_m) \to \varphi(t) \text{ cuando } m \to \infty,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Nuevamente para esta sucesión (s_m) existe una subsucesión (s_l) tal que

$$\varphi'(t+s_l) \to \overline{\varphi}'(t) \text{ y } \overline{\varphi}'(t-s_l) \to \varphi'(t) \text{ cuando } l \to \infty,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} f(t+s_l, x, y) \to \overline{f}(t, x, y) & \text{y} & \overline{f}(t-s_l, x, y) \to f(t, x, y) \text{ cuando } l \to \infty, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \\ \varphi(t+s_l) \to \overline{\varphi}(t) & \text{y} & \overline{\varphi}(t-s_l) \to \varphi(t) \text{ cuando } l \to \infty, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Definimos $F(t) := f(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ y $\overline{F}(t) := \overline{f}(t, \overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}'(t))$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \|F(t+s_l) - \overline{F}(t)\| & = & \|f(t+s_l, \varphi(t+s_l), \varphi'(t+s_l)) - \overline{f}(t, \overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}'(t))\| \\ & \leq & \|f(t+s_l, \varphi(t+s_l), \varphi'(t+s_l)) - f(t+s_l, \overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}'(t))\| \\ & + & \|f(t+s_l, \overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}'(t)) - \overline{f}(t, \overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}'(t))\| \\ & \leq & L_1\|\varphi(t+s_l) - \overline{\varphi}(t)\| + L_2\|\varphi'(t+s_l) - \overline{\varphi}'(t)\| \\ & + & \|f(t+s_l, \overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}'(t)) - \overline{f}(t, \overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}'(t))\| \\ & < & \varepsilon, \end{array}$$

cuando $l \to \infty$. Entonces $F(t+s_l) \to \overline{F}(t)$ cuando $l \to \infty$. De forma análoga tenemos que $\overline{F}(t-s_l) \to F(t)$. Entonces $F \in AA(X)$, luego $H\varphi \in AA(X)$ por Lema 2.1.1. Por otra parte

$$(H\varphi)'(t) = \int_{-\infty}^{t} S'_\alpha(t-s) f(s, \varphi(s), \varphi'(s)) ds,$$

entonces $(H\varphi)' \in AA(X)$ por Lema 2.1.1. Por tanto H está bien definido como queríamos demostrar. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in AA^1(X)$, luego tenemos

$$\begin{aligned}
\|H\varphi_1 - H\varphi_2\|_\infty &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[f(s,\varphi_1(s),\varphi_1'(s)) - f(s,\varphi_2(s),\varphi_2'(s))]ds \right\| \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\| [L_1||\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|| + L_2||\varphi_1'(s) - \varphi_2'(s)||]ds \\
&\leq [L_1\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty + L_2\|\varphi_1' - \varphi_2'\|_\infty] \int_0^\infty |\phi(s)|ds \\
&\leq L||\varphi_1 - \varphi_2||_{AA^1(X)} ||\phi||_1
\end{aligned}$$

donde $L = max\{L_1, L_2\}$. De manera similar obtenemos

$$\|(H\varphi_1)' - (H\varphi_2)'\|_\infty \leq L||\varphi_1 - \varphi_2||_{AA^1(X)} ||\psi||_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|H\varphi_1 - H\varphi_2\|_{AA^1(X)} &= \|H\varphi_1 - H\varphi_2\|_\infty + \|(H\varphi_1)' - (H\varphi_2)'\|_\infty \\
&\leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{AA^1(X)} [||\phi||_1 + ||\psi||_1],
\end{aligned}$$

demostrando que H es una contracción. Por tanto, existe un único $u \in AA^1(X)$, tal que $Hu = u$, i.e. $u(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} S(t-s) f(s, u(s), u'(s)) ds.$ $\square$

Corolario 2.2.6. *Sea* $1 < \alpha < 2$ *y* $\rho > 0$. *Sea* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *casi automorfica en la primera variable y además satisface la condición de Lipschitz en la segunda y en la tercera variable, esto es,*

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq L_1\|x_1 - x_2\| + L_2\|y_1 - y_2\|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

Entonces

$$D_t^\alpha u(t) = -\rho^\alpha u(t) + f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

tiene única solución débil casi automorfica diferenciable si

$$max\{L_1, L_2\} < [\frac{2}{\alpha\rho^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{2}{\alpha\rho^\alpha \cos(\pi/\alpha)}(1 + \rho(\sin(\pi/\alpha))^2)]^{-1}.$$

Demostración. La familia resolvente $S_\alpha(t)$ está dada por (2.6). Además por la demostración del Corolario 2.1.8 existe una función $\phi_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\|S_\alpha(t)\| \leq \phi_\alpha(t)$ y

$$||\varphi_\alpha||_1 = \frac{2}{\alpha\rho^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{2}{\alpha\rho^\alpha \cos(\pi/\alpha)}. \tag{2.10}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} S'_\alpha(t) &= \frac{-1}{\pi} \sin \pi\alpha \int_0^\infty e^{-rt} \frac{r^{\alpha+1}}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha\rho^\alpha \cos \pi\alpha + \rho^{2\alpha}} dr \\ &- \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-2}} e^{t\rho \cos \pi/\alpha} \cos[t\rho \sin \pi/\alpha]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |S'_\alpha(t)| &\leq \frac{1}{\pi} |\sin \pi\alpha| \int_0^\infty e^{-rt} \frac{r^{\alpha+1}}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha\rho^\alpha \cos \pi\alpha + \rho^{2\alpha}} dr \\ &+ \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-2}} e^{t\rho \cos \pi/\alpha} =: \psi_\alpha(t). \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el Teorema de Fubini y tomando en cuenta que $\sin(\pi\alpha) <$

0, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi_\alpha(t)dt &= \frac{1}{\pi}|\sin\pi\alpha|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^{\alpha+1}}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos\pi\alpha+\rho^{2\alpha}}drdt \\ &+ \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-2}}\int_0^\infty e^{t\rho\cos\pi/\alpha}dt \\ &= \frac{-1}{\pi}\sin\pi\alpha\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\alpha}{r^{2\alpha}+2r^\alpha\rho^\alpha\cos\pi\alpha+\rho^{2\alpha}}dr \\ &- \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-1}\cos(\pi/\alpha)}\end{aligned}$$

Como $S_\alpha(0)=0$, de (2.6) deducimos que el término de la integral de la última desigualdad es igual a $\frac{-2\cos(\pi/\alpha)}{\alpha\rho^{\alpha-1}}$. Por tanto

$$||\psi_\alpha||_1 = \frac{-2\cos(\pi/\alpha)}{\alpha\rho^{\alpha-1}} - \frac{2}{\alpha\rho^{\alpha-1}\cos(\pi/\alpha)}. \tag{2.11}$$

Así de (2.10) y (2.11) obtenemos

$$\frac{1}{||\psi_\alpha||_1+||\phi_\alpha||_1} = [\frac{2}{\alpha\rho^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{2}{\alpha\rho^\alpha\cos(\pi/\alpha)}(1+\rho(\sin(\pi/\alpha))^2)]^{-1}.$$

□

Observación 2.2.7. *Observamos que la función* $m(\alpha,\rho) := [\frac{2}{\alpha\rho^\alpha} - \frac{1}{\rho^\alpha} - \frac{2}{\alpha\rho^\alpha\cos(\pi/\alpha)}(1+\rho(\sin(\pi/\alpha))^2)]^{-1}$ *es estrictamente decreciente en* α *sobre el intervalo* $(1,2)$, *independientiente de los valores de* ρ. *Además* $m(1,\rho)=\rho/3$ *y* $m(2,\rho)=0$. *Esto demuestra que el caso* $\alpha=1$ *es mejor y que el caso* $\alpha=2$ *es peor, en contraste con la situación del Corolario 2.2.3.*

Capítulo 3

Soluciones casi automorficas de ecuaciones en diferencias

En el presente capítulo estudiaremos las soluciones casi automorficas discretas para ecuaciones en diferencias de la forma

$$\Delta u(n) = Tu(n) + F(n), \text{ con } n \in \mathbb{Z},$$

donde F es de la forma $F(n) = f(n, u(n))$, T es un operador lineal acotado definido en X y Δ es el operador diferencia de primer orden, es decir, para cada $u : \mathbb{Z} \to X$, y $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta u(n) = u(n+1) - u(n).$$

Durante este capítulo utilizaremos distintos métodos para encontrar y demostrar que las soluciones de las ecuaciones en diferencias son casi autormoficas discretas, eso dependerá de la forma de la función F si es de una o de dos variables.

En la primera sección estudiaremos la existencia de soluciones casi automorficas discretas para la ecuación lineal en diferencia

$$\Delta u(n) = Tu(n) + f(n),$$

donde $f(n)$ es una función casi automorfica discreta en X. La propiedad fundamental de la convolución entre funciones casi automorficas discretas con funciones discretas sumables, es la clave de esta sección para demostrar que las soluciones de la ecuación anterior son funciones casi automorficas discretas.

Otro de los resultados importantes de esta sección, es que si agregamos ciertas condiciones al espacio de Banach X, basta con tener que la solución es acotada, para obtener que la solución es casi automorfica discreta. Para finalizar la sección mostraremos una ecuación en diferencias que modela la distribución de calor en una barra delgada, a la cual aplicamos los teoremas vistos para analizar la existencia de soluciones casi automorficas discretas.

En la segunda sección probaremos la existencia de soluciones casi automorficas discretas para la ecuación en diferencia semilineal

$$\Delta u(n) = Tu(n) + g(n, u(n)),$$

donde $g : \mathbb{Z} \times X \to X$ es una función casi automorfica discreta en n, para cada $x \in X$, y satisface la condición del tipo Lipchitz. Utilizaremos el teorema del punto fijo de Banach, para demostrar unicidad y existencia de la solución de la ecuación anterior y la propiedad de la convolución entre una función casi automorfica discreta con una función discreta sumable.

3.1. Soluciones casi automorficas discretas para ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Antes de comenzar el estudio de las soluciones de las ecuaciones en diferencias, analicemos algunas propiedades fundamentales que tiene el operador diferencia Δ evaluado en una función casi automorfica discreta u.

Teorema 3.1.1. *Sea $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una función casi automorfica discreta, entonces $\Delta u(k)$ es también casi automorfica discreta.*

Demostración. Como $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, entonces por *(i)* y *(iii)* del Teorema 1.1.5, tenemos que $\Delta u(k)$ es casi automorfica discreta. □

Recordemos que el espacio c_0 consiste en todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo límite es cero. El siguiente resultado es trascendental, pues es el recíproco del Teorema 3.1.1, hecho por Basit en [9, Theorem 1] (ver también [47, Lemma 2.8]). Éste es el siguiente:

Teorema 3.1.2. *Sea X un espacio de Banach que no contiene ningún subespacio isomorfico a c_0. Sea $u : \mathbb{Z} \to X$ y supongamos que*

$$y(k) = \Delta u(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

es una función casi automorfica discreta. Entonces $u(k)$ es también casi automorfica discreta.

Como es conocido un espacio de Banach convexo no contiene ningún subespacio isomorfico a c_0. En particular, todo espacio de dimensión finita no contiene ningún subespacio isomorfico a c_0.

A continuación, veremos que sucede con la convolución entre una función sumable con una función discreta casi automorfica. Estos resultados serán la clave en el estudio de las soluciones de ecuaciones en diferencias lineales y semilineales.

Teorema 3.1.3. *Sea $v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una función sumable, es decir,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(k)| < \infty.$$

Entonces para cualquier función casi automorfica discreta $u : \mathbb{Z} \to X$ la función $w(k)$ definida por

$$w(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(l) u(k-l), \quad k \in \mathbb{Z}$$

es también casi automorfica discreta.

Demostración. Sea (k_n') una sucesión de números enteros. Como u es casi automorfica discreta existe una subsucesión (k_n) de (k_n') tal que

$$\lim_{n \to \infty} u(k + k_n) = \overline{u}(k)$$

está bien definida para cada $k \in \mathbb{Z}$ y

$$\lim_{n \to \infty} \overline{u}(k - k_n) = u(k)$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Notemos que

$$\|w(k)\| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \|v(l)\| \|u(k-l)\| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \|v(l)\| \|u\|_d < \infty,$$

entonces, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} w(k + k_n) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(l) \lim_{n \to \infty} u(k + k_n - l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(l) \overline{u}(k-l) =: \overline{w}(k).$$

De manera análoga, demostramos que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{w}(k-k_n) = w(k),$$

por tanto w es una función casi discreta automorfica. $\square$

Observación 3.1.4.

(i) Si tenemos la misma hipotesis del teorema anterior y consideramos la convolución finita de la forma

$$w(k) = \sum_{l=0}^{k} v(k-l)u(l), \quad k \in \mathbb{Z}$$

o la convolución

$$w(k) = \sum_{l=-\infty}^{k} v(k-l)u(l), \quad k \in \mathbb{Z},$$

éstas también son casi automorficas discretas.

(ii) El resultado del teorema anterior se tiene también, si consideramos un operador

$$v : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(X)$$

tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||v(k)|| < \infty.$$

El ejemplo clásico es $v(k) = T^k$, donde $T \in \mathcal{B}(X)$ y satisface $||T|| < 1$.

Las ecuaciones en diferencia usualmente describen la evolución de cierto fenómeno sobre el transcurso del tiempo. En esta sección trabajaremos con ecuaciones en diferencias lineales de primer orden. Estas ecuaciones son aplicadas en varios áreas como, la biología (estudio de competitividad de especies en la dinámica de su población), física (en el estudio de los movimientos de cuerpos en interacción), el estudio de sistemas de control, neurología y electricidad, ver [21, Capítulo3].

Estamos interesados en encontrar soluciones casi automorficas discretas a ecuaciones en diferencias de primer orden, la cual escrita en forma vectorial es de la forma:

$$\Delta u(n) = Tu(n) + f(n) \tag{3.1}$$

donde T es una matriz, o de forma más general, un operador lineal acotado definido sobre un espacio de Banach X y f pertenece a $AA_d(X)$. Notemos que la ecuación (3.1) es equivalente a

$$u(n+1) = Au(n) + f(n), \tag{3.2}$$

donde $A = I + T$. Empezaremos estudiando el caso escalar. Para esto denotaremos $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Teorema 3.1.5. *Sea X un espacio de Banach. Si $A := \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ y $f : \mathbb{Z} \to X$ una función discreta casi automorfica entonces existe una solución discreta casi automorfica de (3.2) dada por*

(i) $u(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} \lambda^{n-k} f(k-1)$ *si* $|\lambda| < 1$; *y*

(ii) $u(n) = -\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \lambda^{n-k-1} f(k)$ *si* $|\lambda| > 1$.

Demostración.

(i) Definamos $v(k) = \lambda^k$. Entonces $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ luego por Teorema 3.1.3, obtenemos $u \in AA_d(X)$. Notemos que u es solución de (3.2), pues

$$u(n+1) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} \lambda^{n+1-k} f(k-1) = \sum_{k=-\infty}^{n} \lambda^{n+1-k} f(k-1) + f(n) = \lambda u(n) + f(n).$$

(ii) Definamos $v(k)=\lambda^{-k}$, como $|\lambda|>1$ tenemos que $v\in\ell^1(\mathbb{Z})$. Luego por el Teorema 3.1.3, obtenemos que $u\in AA_d(X)$. Finalmente, veamos que u es solución de (3.2)

$$\begin{aligned} u(n+1) &= -\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda^{n-k}f(k) = -\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda^{n-k}f(k)-f(n)\right) \\ &= -\lambda\sum_{k=n}^{\infty}\lambda^{n-k-1}f(k)+f(n) \\ &= \lambda u(n)+f(n). \end{aligned}$$

□

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado en el caso de una matriz A.

Teorema 3.1.6. *Supongamos que A es una matriz constante de $n\times n$ con valores propios $\lambda\notin\mathbb{D}$. Entonces para cualquier función $f\in AA_d(\mathbb{C}^n)$ existe una solución casi automorfica discreta de (3.2).*

Demostración. Por álgebra lineal sabemos que existe una matriz no singular S, tal que $S^{-1}AS=B$, donde B es una matriz triangular superior. En la ecuación (3.2) usamos la sustitución $u(k)=Sv(k)$ para obtener la igualdad

$$v(k+1)=Bv(k)+S^{-1}f(k),\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Obviamente el sistema (3.3) es de la forma (3.2) con $S^{-1}f(k)$ función casi automorfica discreta. El caso general de una matriz arbitraria A puede ser reducida al caso escalar. De hecho, la última ecuación del sistema (3.3) es de la forma

$$z(k+1)=\lambda z(k)+c(k),\quad k\in\mathbb{Z} \tag{3.4}$$

donde λ es un número complejo y $c(k)$ es una función casi automorfica discreta. Por tanto, todo lo que necesitamos demostrar es que cualquier solución $z(k)$ de (3.4) es una función casi automorfica discreta. Para esto utilizamos el Teorema 3.1.5, esto implica que la n-ésima componente $v_n(k)$ de la solución $v(k)$ de (3.3) es casi autormorfica discreta. Ahora sustituyamos el término $v_n(k)$ en la $(n-1)$-ésima ecuación de (3.3) y obtenemos nuevamente una ecuación de la forma (3.4) para $v_{n-1}(k)$. Así repitiendo el proceso sucesivamente hasta la primera componente de $v(k)$, obtenemos que $v(k)$ es solución casi automorfica discreta. $\square$

Observación 3.1.7. *El procedimiento en la demostración del Teorema 3.1.6 se denomina "Método de Reducción" que en el caso continuo fue introducido por N' Guérékata [32, Obsrvación 6.2.2]. Para ver más detalles, también se puede ver [41] y [22]. En el caso discreto, este método fue utilizado por Agarwal (cf. [1, Teorema 2.10.1]).*

Como aplicación del teorema anterior y [1, Teorema 5.2.4] obtenemos el siguiente Corolario.

Corolario 3.1.8. *Supongamos que A es una matriz $n \times n$ constante con valores propios $\lambda \notin \mathbb{D}$, y supongamos que $f \in AA_d(\mathbb{C}^n)$ tal que*

$$||f(k)|| \leq c\eta^{|k|}$$

para todo k suficientemente grande, donde $c > 0$ y $\eta < 1$. Entonces existe una solución casi automorfica discreta $u(k)$ de (3.2), la cual satisface

$$||u(k)|| \leq c\nu^{|k|},$$

para algún $\nu > 0$.

Podemos reemplazar $\lambda \in \mathbb{C}$ en el Teorema 3.1.5 por un operador acotado $A \in \mathcal{B}(X)$, y usamos la parte *(ii)* de la Observación 3.1.4 en la demostración de la primera parte del Teorema 3.1.5, para obtener el siguiente resultado.

Teorema 3.1.9. *Sea X un espacio de Banach y $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $||A|| < 1$. Sea $f \in AA_d(X)$. Entonces existe una solución casi automorfica discreta de (3.2).*

Además podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.1.10. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que $f \in AA_d(X)$ y $A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k$ donde los números complejos λ_k son mutuamente distintos, con $|\lambda_k| \neq 1$, y $(P_k)_{1\leq k\leq N}$ forma un sistema complejo $\sum_{k=1}^{N} P_k = I$ de proyecciones mutuamente disjuntas en X. Entonces la ecuación (3.2) admite una solución casi automorfica discreta.*

Demostración. Sea $k \in \{1, ..., N\}$ fijo. Aplicando la proyección P_k a la ecuación (3.2) obtenemos

$$P_k u(n+1) = P_k A u(n) + P_k f(n) = \lambda_k P_k u(n) + P_k f(n).$$

Por el Corolario 1.1.9 tenemos $P_k f \in AA_d(X)$, pues P_k es acotado. Entonces, por Teorema 3.1.5, obtenemos $P_k u \in AA_d(X)$. Concluimos que $u(n) = \sum_{k=1}^{N} P_k u(n) \in AA_d(X)$. □

Los siguientes resultados importantes, corresponden a un espacio de Banach cualquiera, realizados por Minh, Naito y N'Guerekata [47, Teorema 2.14]. Denotamos por $\sigma_{\mathbb{D}}(A)$ la parte del espectro de A en $\mathbb{D}$.

Teorema 3.1.11. *Sea X un espacio de Banach que no contiene ningún subespacio isomorfico a c_0. Supongamos que $\sigma_{\mathbb{D}}(A)$ es numerable y sea $f \in$*

$AA_d(X)$. *Entonces cada solución acotada de la ecuación (3.2) es casi automorfica discreta.*

Queremos destacar que en el caso de dimensión finita, el resultado anterior extiende el Teorema de Corduneanu sobre funciones casi periódicas discretas a funciones casi automorficas discretas (ver [1, Teorema 2.10.1, p.73]). El teorema aludido es el siguiente

Teorema 3.1.12. *Sea* $f \in AA_d(\mathbb{C}^n)$. *Entonces una solución de la ecuación (3.2) es casi automorfica discreta si y sólo si ésta es acotada.*

Interesantes ejemplos de aplicación del Teorema 3.1.11 están dados en [48], Teoremas 3.4 y 3.7 concerniente a la existencia de soluciones casi automorficas de ecuaciones diferenciales, donde parte de los argumentos son números enteros, de la forma

$$x'(t) = Ax([t]) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

donde A es un operador lineal sobre un espacio de Banach X y $[\cdot]$ es la función parte entera. Estos resultados están basados en la siguiente conección entre funciones casi automorficas discretas y funciones casi automorficas.

Teorema 3.1.13. *Sea* $f \in AA_d(X)$ *y* u *una solución acotada de (3.5) sobre* $\mathbb{R}$. *Entonces* u *es casi automorfica si y sólo si la sucesión* $\{u(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es casi automorfica.*

Para el detalle de la demostración véase [48, Lemma 3.3].
Existen otra clases de funciones casi automorficas, denominadas *funciones casi automorficas compactas*, veamos su definición.

Definición 3.1.14. *Una función $f : \mathbb{R} \to X$ continua se dice casi automorfica compacta si para cada sucesión de números reales (x'_n), existe una subsucesión $(x_n) \subset (x'_n)$, tal que los límites*

$$\lim_{n\to\infty} f(t + x_n) = \overline{f}(t) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \overline{f}(t - x_n) = f(t);$$

existen para cada $t \in \mathbb{R}$ y la convergencia de ellos es uniforme sobre cada subconjunto compacto en $\mathbb{R}$.

El Teorema 3.1.13 también es válido para funciones casi automorficas compactas, para ver más detalles (ver [48, Lemma 3.6]).

Terminamos esta sección con el siguiente ejemplo concerniente a la ecuación del calor. (cf. [21, p.157]).

Ejemplo 3.1.15. *Consideremos la distribución del calor a través de una barra delgada compuesta por un material homogéneo. Sea $x_1, x_2, ..., x_k$ con k puntos equidistantes sobre la barra. Sea $T_i(n)$ la temperatura en el tiempo, $t_n = (\Delta t)n$ en el punto x_i, con $1 \leq i \leq k$. Bajo ciertas condiciones se puede obtener la ecuación*

$$T(n+1) = AT(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.6}$$

donde el vector $T(n)$ tiene como componentes $T_i(n)$, con $1 \leq i \leq k$, y A es una matriz Toeplitz tridiagonal. Sus valores propios se pueden encontrar por medio de la fórmula

$$\lambda_n = (1 - 2\alpha) + \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{k+1}\right), \quad n = 1, 2..., k$$

donde α es una constante de proporcionalidad concerniente a la diferencia de temperatura entre el punto x_i y cercano a los puntos x_{i-1} y x_{i+1} (ver [21]). Suponiendo que

$$0 < \alpha < 1/2$$

obtenemos $|\lambda| < 1$ *para todos los valores propios* λ *de* A. *Si* $f \in AA_d(\mathbb{C}^k)$, *por el Teorema 3.1.9 tenemos que para* $0 < \alpha < 1/2$, *existe una solución casi automorfica discreta de (3.6). Por otra parte por el Teorema 3.1.11 tenemos que si la solución para (3.6) es acotada, entonces es casi automorfica discreta sin restricción sobre el valor* α.

3.2. Soluciones casi automorficas discretas de ecuaciones en diferencias semilineales

Recordemos que denotamos $AA_d(\mathbb{Z}\times X)$, como el espacio de las funciones casi automorficas discretas en k en $\mathbb{Z}$, para cada x en X. Queremos determinar bajo que condiciones es posible encontrar soluciones casi automorficas discretas a la ecuación

$$u(n+1) = Au(n) + f(n, u(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.7}$$

donde A es un operador lineal acotado definido en un espacio de Banach X y $f \in AA_d(\mathbb{Z} \times X)$.

Nuestro principal resultado en esta sección, es el caso escalar, que veremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sea* $A := \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ *y* $f : \mathbb{Z} \times X \to X$ *casi automorfica discreta en* k *para cada* $x \in X$. *Supongamos que* f *satisface la siguiente condición del tipo Lipschitz*

$$\|f(k,x) - f(k,y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in X \text{ y } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Entonces la ecuación (3.7) tiene única solución casi automorfica discreta que satisface *(i)* $u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \lambda^{n-k} f(k-1, u(k-1))$ *si* $|\lambda| < 1 - L$ *y*

(ii) $u(n) = -\sum_{k=n}^{\infty} \lambda^{n-k-1} f(k, u(k))$ *si* $|\lambda| > 1 + L$.

Demostración. Caso $|\lambda| < 1 - L$:

Definimos el operador $F : AA_d(X) \to AA_d(X)$, por

$$F(\varphi)(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \lambda^{n-k} f(k-1, \varphi(k-1)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Como $\varphi \in AA_d(X)$ y $f(k,x)$ satisface (3.8), obtenemos por el Teorema 1.1.12 que $f(\cdot, \varphi(\cdot))$ pertenece a $AA_d(X)$. Entonces F está bien definido, debido al Teorema 3.1.3. Ahora para $u_1, u_2 \in AA_d(X)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|F(u_1) - F(u_2)\|_d &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{n} |\lambda|^{n-k} \|f(k-1, u_1(k-1)) - f(k-1, u_2(k-1))\| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{n} |\lambda|^{n-k} L \|u_1(k-1) - u_2(k-1)\| \\
&\leq L\|u_1 - u_2\|_d \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{n} |\lambda|^{n-k} \\
&= L\|u_1 - u_2\|_d \sup_{n\in\mathbb{Z}} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j \\
&\leq L\|u_1 - u_2\|_d \frac{1}{1 - |\lambda|}.
\end{aligned}$$

Como $|\lambda| < 1 - L$, obtenemos que la función F es una contracción. Entonces existe una única función u en $AA_d(X)$ tal que $Fu = u$. Es decir, u satisface $u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \lambda^{n-k} f(k-1, u(k-1))$ y por tanto u es solución de la ecuación (3.7) (cf. la demostración de (i) en el Teorema 3.1.5).

Caso $|\lambda| > 1 + L$: Definimos $F : AA_d(X) \to AA_d(X)$, por

$$F(\varphi)(n) = -\sum_{k=n}^{\infty} \lambda^{n-k-1} f(k, \varphi(k)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

de la misma manera que en el caso anterior, obtenemos que F está bien definida. Ahora para $u_1, u_2 \in AA_d(X)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|F(u_1) - F(u_2)\|_d &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda|^{n-k-1} \|f(k, u_1(k)) - f(k, u_2(k))\| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda|^{n-k-1} L \|u_1(k-1) - u_2(k-1)\| \\
&\leq L\|u_1 - u_2\|_d \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda|^{n-k-1} \\
&= L\|u_1 - u_2\|_d \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda^{-1}|^{j+1} \quad (\text{ reemplazando } j = k-n) \\
&\leq L\|u_1 - u_2\|_d \frac{1}{|\lambda| - 1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto F es una contracción, luego existe una única función $u \in AA_d(X)$ tal que $Fu = u$. La función u satisface

$$u(n) = -\sum_{k=n}^{\infty} \lambda^{n-k-1} f(k, u(k)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

y por tanto ésta es solución de la ecuación (3.7) (cf. la demostración de *(ii)* en el Teorema 3.1.5). $\square$

En el caso particular $f(k, x) := h(k)g(x)$, obtenemos el siguiente Corolario.

Corolario 3.2.2. *Sea $A := \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Supongamos que g satisface la condición del tipo Lipschitz, esto es,*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in X. \tag{3.9}$$

Entonces para cada $h \in AA_d(X)$, la ecuación (3.7) tiene una única solución casi automorfica discreta, si $|\lambda| < 1 - L||h||_d$ o $|\lambda| > 1 + L||h||_d$.

El caso de un operador acotado A, también puede ser estudiado suponiendo condiciones extras para el operador, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3. *Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y supongamos que $f \in AA_d(\mathbb{Z}\times X)$ y además f cumple con la condición del tipo Lipschitz, esto es,*

$$\|f(k,x) - f(k,y)\| \leq L\|x-y\|, \text{ para todo } x,y \in X \text{ y } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Entonces la ecuación (3.7) tiene una única solución casi automorfica discreta, siempre que $||A|| < 1 - L$.

Demostración. Usar la primera parte del Teorema 3.2.1 y la demostración de la parte *(ii)* de la Observación 3.1.4. $\square$

Bibliografía

[1] R.P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] R.P. Agarwal and J. Popenda, *On periodic solutions of first order linear difference equations,* Math. Comput. Modelling 22 (1) (1995), 11-19.

[3] R. P. Agarwal, D. O'Regan, and P. J. Y.Wong, *Constant-sign periodic and almost periodic solutions of a system of difference equations,* Computers & Mathematics with Applications, 50 (1012) (2005), 1725-1754.

[4] D. Araya and C. Lizama, *Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations.* Nonlinear Anal. 69 (11) (2008), 3692–3705.

[5] D. Araya, R. Castro and C. Lizama, *Almost automorphic solutions of difference equations.* Advances in Difference Equations, Vol. 2009 (2009), Article ID 591380.

[6] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Monographs in Mathematics. **96**. Birkhäuser, Basel, 2001.

[7] B. Basit, A.J. Pryde. *Asymptotic behavior of orbits of C_0-semigroups and solutions of linear and semilinear abstract differential equations.* Russ. J. Math. Phys. **13** (1) (2006), 13–30.

[8] B. Basit and H. Günzler, *Difference propertty for perturbations of vector valued Levitan almost periodic functions and their analogs,* Russian J. of Mathematical Physics, 12 (4) (2005), 424-438.

[9] B. Basit, *Generalization of two theorems of M. I. Kadets concerning the indefinite integral of abstract almost periodic functions,* Mat. Zametki 9 (1971), 311-321. (Russian)

[10] E. Bazhlekova. *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces,* Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, 2001.

[11] S. Bochner, *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 52 (1964), 907-910.

[12] S. Bochner, *Uniform convergence of monotone sequences of functions,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47 (1961), 582-585.

[13] S. Bochner, *A new approach in almost-periodicity,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48 (1962), 2039-2043.

[14] S. Bochner and J. von Neumann, *On compact solutions of operational-differential equations I,* Ann. Math., 36 (1935), 255-290.

[15] D. Bugajewski and T. Diagana, *Almost automorphy of the convolution operator and applications to differential and functional differential equations*, Nonlinear Studies, 13 (2) (2006), 129-140.

[16] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions.* John Wiley and Sons, New York, 1968.

[17] C. Corduneanu, *Almost periodic discrete processes,* Libertas Math. 2 (1982), 159- 169.

[18] E. Cuesta. *Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations.* Discrete Cont. Dyn. Sys. (Supplement) (2007), 277-285.

[19] T. Diagana. *Some remarks on some second-order hyperbolic differential equations*, Semigroup Forum **68** (2004), 357-364.

[20] T. Diagana, G.M. N'Guérékata. *Almost automorphic solutions to semi-linear evolution equations.* Funct. Differ. Equ. **13** (2) (2006), 195-206.

[21] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Undergraduate Texts in Mathematics, 3rd. ed. Springer Verlag, 2005.

[22] K. Ezzinbi, V. Nelson and G.M. N'Guérékata, $C(n)$*-almost automorphic solutions of some nonautonomous differential equations,* Cubo, A Mathematical Journal, 10 (2) (2008), 61-74.

[23] H.O Fattorini. *Second Order Linear Differential equations in Banach spaces.* North-Holland Math. Studies, **108**. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland, 1985.

[24] S. Fatajou, M. V. Minh, G.M. N'Guérékata, and A. Pankov, *Stepanov-like almost automorphic solutions for nonautonomous evolution equations,* Electron. J. Differential Equations, 2007, No. 121, 11 pp. (electronic).

[25] S. G. Gal and G.M. N'Guérékata, *Almost automorphic fuzzy-number-valued functions,* J. Fuzzy Math., 13 (1) (2005), 185-208.

[26] C. G. Gal, S. G. Gal and G.M. N'Guérékata, *Almost automorphic functions in Fréchet spaces and applications to differential equations,* Semigroup Forum, 71 (2) (2005),23-48.

[27] C. G. Gal, S. G. Gal and G.M. N'Guérékata, *Almost automorphic functions with values in a p-Fréchet space,* Elect. J. Differential Equations, 21 (2008), 1-18.

[28] J.A. Goldstein, G.M.N'Guérékata. *Almost automorphic solutions of semilinear evolution equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **133**(8) (2005), 2401-2408.

[29] R. Gorenflo, F. Mainardi. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, A. Carpinteri and F. Mainardi (Editors): Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Wien and New York 1997, 223-276.

[30] R. Gorenflo, F. Mainardi. *On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes*. J. Comp. Appl. Math. **118** (2000), 283-299.

[31] G.M. N'Guérékata, *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces,* Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2001.

[32] G.M. N'Guérékata, *Topics in Almost Automorphy*, Springer-Verlag, New-York-Boston-London-Moscow, 2005.

[33] G.M. N'Guérékata. *Existence and Uniqueness of Almost Automorphic Mild Solutions of Some Semilinear Abstract Differential Equations,* Semigroup Forum **69** (2004), 80-86.

[34] G.M. N'Guérékata. *Topics in almost automorphy,* Springer Verlag, New York, 2005.

[35] G.M. N'Guerekata. *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces,*Kluwer Acad/Plenum, New York-Boston-Moscow-London, 2001.

[36] A. Halanay, *Solution periodiques et presque periodiques des systems d'equationcs aux difference finies,* Arch. Rat. Mech. 12 (1963), 134-149.

[37] Y. Hamaya, *Existence of an almost periodic solution in a difference equation with infinite delay,* J. Difference Equ. Appl., 9 (2) (2003), 227-237.

[38] N. Heymans, I. Podlubny. *Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives,* Rheologica Acta, **45**(5) (2006), 765-771.

[39] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics,* World Scientific Publ. Co., Singapore, 2000.

[40] A. O. Ignatyev and O. A. Ignatyev, *On the stability in periodic and almost periodic difference systems,* J. Math. Anal. Appl., 313 (2) (2006), 678-688.

[41] J. Liu, N. V. Minh and G.M. N'Guérékata, *A Massera type theorem for almost automorphic solutions of differential equations,* J. Math. Anal. Appl. 299 (2) (2004), 587-599.

[42] J. Liu, G.M. N'Guérékata, N. van Minh. *Almost automorphic solutions of second order evolution equations,* Appl. Anal. **84**(11) (2005), 1173-1184.

[43] C. Lizama. *Regularized solutions for abstract Volterra equations.* J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 278-292.

[44] C. Lizama. *On approximation and representation of k-regularized resolvent families.* Integral Equations Operator Theory 41 (2), (2001), 223-229.

[45] C. Lizama, H. Prado. *Rates of approximation and ergodic limits of regularized operator families.* J. Approximation Theory, 122 (1) (2003), 42-61.

[46] C. Lizama, J. Sánchez, *On perturbation of k-regularized resolvent families,* Taiwanese J. Math. **7** (2), (2003), 217-227.

[47] N.V. Minh, T. Naito and G.M. N'Guérékata, *A spectral countability condition for almost automorphy of solutions of differential equations,* Proc. Amer. Math. Soc., 134 (11) (2006), 3257- 3266.

[48] N. V. Minh and T. T. Dat, *On the almost automorphy of bounded solutions of differential equations with piecewise constant,* J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 165-178.

[49] P.Y.H. Pang and R.P. Agarwal, *On periodicity of difference equations of a general type,* J. Difference Equ. Appl. 2 (1996), 271–286.

[50] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations,* Academic Press, San Diego, 1999

[51] J. Prüss. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Monographs Math., **87**, Birkhäuser Verlag, 1993.

[52] R. Sato, S.Y.Shaw. *Strong and uniform mean stability of cosine and sine operator functions.* J. Math. Anal. Appl., **330** (2007), 1293-1306.

[53] S.Y.Shaw, J.C. Chen. *Asymptotic behavior of* (a, k)*-regularized families at zero.* Taiwanese J. Math. 10(2) (2006), 531-542.

[54] Y. Song, *Almost periodic solutions of discrete Volterra equations,* J. Math. Anal. Appl., 314 (1) (2006), 174-194.

[55] Y. Song. *Periodic and almost periodic solutions of functional difference equations with infinite delay*, Adv. Difference Equ., Article ID 68023, (2007).

[56] Y. Song and H. Tian, *Periodic and almost periodic solutions of nonlinear Volterra difference equations with unbounded delay,* to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics.

[57] S. Sugiyama, *On periodic solutions of difference equations,* Bull. Sci. Eng. Research Lab. Waseda Univ. 52 (1971), 89-94.

[58] W. A. Veech, *Almost automorphic functions on groups,* Amer. J. Math., 87 (1965), 719-751.

[59] W.A. Veech, *Almost automorphic functions,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 49 (1963), 462-464.

[60] A. Walther, *Fastperiodische Folgen und Potenzreihen mit fastperiodischen Koeffizienten,* Abh. Math. Scm. Hamburg Univ. 6 (1928), 217-234.

[61] A. Walther, *Fastperiodische Folgen und ihre Fouriersche Analysis,* Atti Congresso Int. Mat. Bologna 2 (1928), 289-298.

[62] S. Zaidman, *Almost automorphic solutions of some abstract evolution equations,* Istituto Lombardo di Sci. e Lett., 110 (1976), 578-588.

[63] S. Zaidman, *Behavior of trajectories of C_0 -semigroups,* Istituto Lombardo di Sci. e Lett., 114 (1980-1982), 205-208.

[64] S. Zaidman, *Existence of asymptotically almost periodic and of almost automorphic solutions for some classes of abstract differential equations,* Ann. Sc. Math. Québec, 13 (1989), 79-88.

[65] S. Zaidman, *Topics in abstract differential equations,* Nonlinear Anal., 23 (1994), 849-870.

[66] S. Zaidman, *Topics in Abstract Differential Equations,* Pitman Research Notes in Mathematics, Ser. II, John Wiley and Sons, New York, 1994-1995.

[67] M. Zaki, *Almost automorphic solutions of certain abstract differential equations,* Annali di Mat. Pura ed Appl., 101 (4) (1974), 91-114.

[68] S. Zhang, P. Liu, and K. Gopalsamy, *Almost periodic solutions of nonautonomous linear difference equations,* Applicable Analysis, 81 (2) (2002), 281-301.