

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE  
LA COMPUTACIÓN



**TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA EN  
IMÁGENES DE RESONANCIA MAGNÉTICA**

**RODRIGO IGNACIO BREVIS VERGARA**

Profesor Guía: Dr. Carlos Lizama Y.

Trabajo de titulación para  
optar al título profesional  
de Ingeniero Matemático

Santiago – Chile

2011

**© Rodrigo Ignacio Brevis Vergara**

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

# Agradecimientos

Los agradecimientos son para todas las personas que de una u otra forma aportaron en el desarrollo de esta tesis, ya sea de manera directa o indirecta, leyéndola, revisándola, entregando observaciones o simplemente dando una palabra de ánimo para seguir adelante.

Quisiera agradecer de manera especial a mi profesor guía Carlos Lizama, no tan sólo por el apoyo y la ayuda durante el periodo de realización de esta tesis, sino que por las diversas oportunidades académicas durante el transcurso de mi carrera. Con esto me refiero a la posibilidad de estudiar en otras universidades, dictar ayudantías y charlas.

Dar gracias además a una de las personas más importante para mí, mi padre Luis Brevis, por una vida de enseñanzas y consejos, que se ven reflejados en el término de mis estudios de pregrado. A mi madre Patricia Vergara por su dedicación y preocupación. Sin olvidar al resto de mi familia que también aportó de gran manera con más de una palabra de ánimo.

A todos mis amigos que me presionaron para terminar este trabajo dentro de los plazos, y así no dilatar más su entrega. Por último agradecer a Marilyn Gatica por su ayuda y paciencia leyendo este trabajo más de una vez durante su redacción.

A todos, muchas gracias.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1. Fenómeno físico . . . . .	4
2.2. Teoría espectral . . . . .	6
2.3. Teoría de semigrupos: Semigrupos uniformemente continuos . . . . .	7
2.4. Teoría de semigrupos: Semigrupos fuertemente continuos . . . . .	10
2.5. Funciones de Gauss–Hermite . . . . .	15
<b>3. Resonancia magnética</b>	<b>18</b>
3.1. Magnetización nuclear de sistemas de espines . . . . .	18
3.2. Excitación de radiofrecuencia . . . . .	23
3.3. Precesión libre y relajación . . . . .	28
3.4. Detección de la señal . . . . .	30
3.5. Características de la señal . . . . .	36
3.6. Localización de la señal . . . . .	40
<b>4. Reconstrucción</b>	<b>47</b>
4.1. $k$ espacio . . . . .	47
4.2. Muestreo en el $k$ espacio . . . . .	51
4.3. Reconstrucción de la imagen . . . . .	56
4.4. Reconstrucción desde el muestreo por transformada de Fourier . . . . .	57
<b>5. La transformada de Fourier fraccionaria</b>	<b>62</b>
5.1. Introducción a la transformada de Fourier fraccionaria . . . . .	63
5.2. Una perspectiva de la FrFT desde la teoría de semigrupos . . . . .	70
5.3. Comentarios sobre la transformada de Fourier fraccionaria . . . . .	78
<b>6. Conexión entre la FrFT y MRI</b>	<b>80</b>
6.1. Gradiente constante . . . . .	82
6.2. Estándar 2DFT readout . . . . .	84

<b>7. Reconstrucción vía transformada de Fourier fraccionaria</b>	<b>86</b>
7.1. Transformada de Fourier fraccionaria inversa . . . . .	87
7.2. Transformada de Fourier fraccionaria de orden variable . . . . .	87
7.3. Método propuesto . . . . .	89
<b>8. Experimentos numéricos</b>	<b>94</b>
8.1. Experimentos teóricos . . . . .	94
8.2. Experimentos prácticos . . . . .	97
<b>9. Comentarios finales</b>	<b>100</b>

# Índice de cuadros

3.1. Propiedades de algunos núcleos activos en NMR. . . . .	19
8.1. Parámetros de adquisición. . . . .	98

# Índice de figuras

2.1. Estados energéticos de un núcleo con espín 1/2 en presencia de un campo externo $B$ . . . . .	5
2.2. Primeros 6 polinomios de Hermite en el intervalo $[-5, 5]$ . . . . .	16
3.1. Efecto Zeeman para un sistema de espín 1/2. . . . .	22
3.2. Curvas de relajación. . . . .	30
3.3. Phase-sensitive detection. . . . .	34
3.4. Parámetros que caracterizan un slice en una dirección arbitraria. . . . .	42
3.5. Selección de slice en la dirección $x$ , $y$ y $z$ respectivamente. . . . .	42
3.6. Señal localizada de un objeto hipotético unidimensional en presencia de un gradiente de codificación. . . . .	44
3.7. Fase codificada en un objeto. . . . .	46
4.1. Trayectorias de muestreo en el $k$ espacio. . . . .	49
4.2. Tres pulsos gradientes usados para la codificación en fase. . . . .	50
4.3. Ilustración de la reconstrucción de una función continua desde su muestreo por medio de funciones sinc con peso. . . . .	52
4.4. Ilustración de un objeto acotado por un rectángulo de $W_x \times W_y$ y el muestreo en el $k$ espacio. . . . .	53
4.5. Ilustración de un objeto acotado por un círculo de radio $R_x$ y el muestreo en el $k$ espacio. . . . .	54
6.1. Ejemplo de trayectorias descritas en el $\rho$ - $\alpha$ espacio. . . . .	83
7.1. Ejemplo unidimensional de una trayectoria 2DFT (línea continua) en representación polar del espacio $\rho$ - $\alpha$ y la interpretación de reconstrucción (línea punteada). . . . .	87
8.1. Comparación entre la función original (línea punteada), su reconstrucción por transformada de Fourier estándar (línea gris) y la reconstrucción por medio de FrFT (línea negra). . . . .	95

8.2. Comparación entre la función original (línea punteada), su reconstrucción por transformada de Fourier estándar (línea gris) y la reconstrucción por medio de FrFT (línea negra). . . . .	97
8.3. Resultados de reconstrucción para el MRI phantom bajo un campo cuadrático. . . . .	98
8.4. Resultados de reconstrucción para estudio <i>en vivo</i> . . . . .	99

# Capítulo 1

## Introducción

La imagen de resonancia magnética (MRI), más estrictamente hablando tomografía de resonancia nuclear, es un método que permite visualizar cualquier parte del cuerpo y en cualquier ángulo, sin necesidad de alterarlo, permitiendo obtener diagnósticos médicos más acertados en distintas ramas de la medicina.

Se basa en el fenómeno cuántico conocido como *resonancia magnética nuclear*, por el cual es posible obtener una señal de los átomos que componen la sección del cuerpo desde la cual se quiere obtener la imagen, al someterlos a un campo magnético intenso y uniforme.

La transformación de la señal en imagen o *reconstrucción* de la imagen, se puede realizar mediante una herramienta matemática conocida como *transformada de Fourier*, aunque no es la única forma de obtener la reconstrucción. También es utilizada la transformada de Radon en este tipo de técnica.

El objetivo de este trabajo es analizar la viabilidad de la transformada de Fourier fraccionaria en la reconstrucción de imágenes por resonancia magnética. El contenido está basado en un reciente artículo sobre el particular, que es la base de esta tesis.

La transformada de Fourier Fraccionaria fué definida por V. Namías en 1980 como una operación matemática que generaliza la transformada de Fourier. Esta transformación juega un papel importante en la interpretación de fenómenos ópticos y en el procesamiento de señales.

Esta tesis se divide en 8 capítulos. A continuación se describirá brevemente cada uno de ellos.

En el capítulo 2 veremos conceptos físicos y matemáticos, bases que son esenciales para la comprensión de trabajo. Comenzando con una breve descripción del fenómeno cuántico de resonancia magnética, para luego seguir con algunas definiciones matemáticas de *teoría de semigrupos*.

En el capítulo 3 comenzamos a explicar cómo se originan las imágenes de resonancia magnética bajo un campo magnético uniforme y cómo se utiliza el fenómeno físico de resonancia magnética para generar una magnetización de un objeto real.

En el siguiente capítulo, abordaremos el problema de *reconstrucción*, el cual es un problema latente y presente en distintas ramas de ingeniería y de la matemática. Estudiaremos la reconstrucción desde el punto de vista teórico, para luego analizarlo concretamente en el contexto de las imágenes de resonancia magnética utilizando la *transformada de Fourier* como herramienta de reconstrucción.

En el quinto y sexto capítulo, presentaremos la *transformada de Fourier fraccionaria* desde distintos enfoques y en sus distintas representaciones. Uno de los principales enfoques en que se presentará la transformada de Fourier fraccionaria o FrFT es el de teoría de semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales acotados, ya que en este contexto se desarrollará la transformada para presentar una nueva fórmula de reconstrucción, por el momento, a nivel unidimensional. Por otro lado, conectaremos la transformada de Fourier fraccionaria con las imágenes de resonancia magnética, dándole una interpretación física al orden de la transformada. Todo esto, ahora, bajo campos magnéticos cuadráticos, lo que en la práctica es bastante aceptable por la dificultad que se presenta en los resonadores al tratar de obtener campos de alta magnitud y uniformes al mismo tiempo.

En el capítulo 7 volveremos a estudiar el problema de *reconstrucción*, pero en esta oportunidad, utilizando la transformada de Fourier fraccionaria como herramienta. Mostraremos distintos enfoques de reconstrucción, además presentaremos un nuevo método de reconstrucción basado en teoría de semigrupos, que permite obtener las imágenes unidimensionales, esto respaldado por toda la rigurosidad y formalidad matemática necesaria para poder justificar las fórmulas presentadas.

Finalmente en el último capítulo, incluiremos simulaciones que dan cuenta de las diferencias de los métodos, ventajas y desventajas en distintas situaciones. Por un lado, utilizando funciones matemáticas para poder estudiar el método propuesto, y por otro lado utilizando objetos reales (como un cerebro) para analizar la reconstrucción a

través de la transformada de Fourier fraccionaria, y así obtener una perspectiva de las propiedades de esta.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo revisaremos conceptos físicos fundamentales para poder entender de mejor forma la base que sustenta esta técnica médica ampliamente usada para la obtención de imágenes. Así como definiciones básicas de la teoría de operadores, necesarias para la comprensión de uno de los tópicos principales de esta tesis como lo es la transformada de Fourier fraccionaria.

### 2.1. Fenómeno físico

Todos los núcleos atómicos están compuestos por dos tipos de partículas: Protones y neutrones. La única excepción es el núcleo de hidrógeno ordinario, el cual está constituido por sólo un protón. Para describir el núcleo atómico se usan las siguientes cantidades:

- Número atómico  $Z$ , que es igual al número de protones en el núcleo.
- Número neutrónico  $N$ , que es igual al número de neutrones en el núcleo.
- Número de masa  $A$ , que es igual la cantidad de nucleones, esto es neutrones más protones, en el núcleo.

Para representar núcleos es conveniente usar la notación  ${}^A_ZX$  para mostrar cuántos protones y neutrones están presentes, donde  $X$  representa el símbolo químico del elemento. Cuando no existen dudas se omite el subíndice  $Z$  ya que siempre puede determinarse a través del símbolo químico.

Los núcleos de los átomos de un elemento particular contienen el mismo número de protones, pero a menudo contienen diferentes número de neutrones. Los núcleos que se relacionan de esta forma se denominan *isótopos*. Incluso el elemento más simple,

el hidrógeno, tiene isótopos:  ${}^1_1H$  (núcleo de hidrógeno ordinario),  ${}^2_1H$  (deuterio) y  ${}^3_1H$  (tritio).

Los núcleos poseen un momento angular intrínseco, denominado *espín*, debido a que las partículas que lo componen tienen cada una un espín intrínseco. El espín nuclear tiene asociado un momento magnético nuclear correspondiente, el cual se mide en términos del *magnetón nuclear*  $\mu_n$ . El momento magnético de un protón libre es  $2,792\mu_n$ . Sorprendentemente el neutrón (que no posee carga) también tiene un momento magnético con un valor de  $-1,9135\mu_n$ . El signo menos indica que este momento es opuesto al momento angular del espín del neutrón.

Los momentos magnéticos nucleares, así como los momentos magnéticos electrónicos, realizan un movimiento de precesión cuando se colocan en un campo magnético externo, y lo hacen a una frecuencia específica proporcional al campo magnético. La energía potencial del momento de dipolo magnético  $\mu$  en un campo magnético  $B$  está dada por  $-\mu B$ . Cuando el momento magnético  $\mu$  está alineado con el campo tan próximo como la física cuántica lo permite, la energía potencial del momento de dipolo en el campo tiene su valor mínimo  $E_{\text{mín}}$ . Cuando la proyección de  $\mu$  es tan antiparalela al campo como es posible (dirección opuesta al campo), la energía potencial toma su valor máximo  $E_{\text{máx}}$ . En general, existen otros estados energéticos entre aquellos valores. Para un núcleo con espín  $1/2$ , existen estos dos estados permitidos, con energías  $E_{\text{mín}}$  y  $E_{\text{máx}}$ , como se muestra en la figura 2.1.

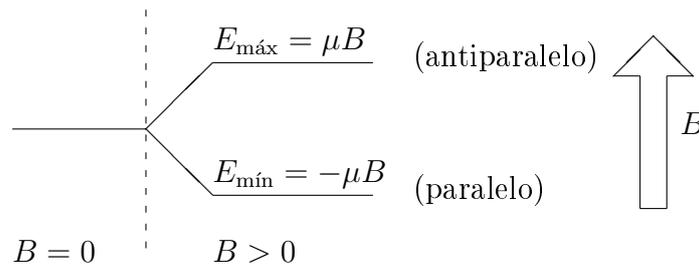


Figura 2.1: Estados energéticos de un núcleo con espín  $1/2$  en presencia de un campo externo  $B$ .

Gracias a un fenómeno conocido como *resonancia magnética nuclear* es posible observar transiciones entre estos dos estados de espín. Un campo magnético constante  $B$  se introduce, y se define un eje cartesiano con la dirección  $z$  en la dirección del campo. Un segundo campo magnético, débil y oscilante, se aplica perpendicular a  $B$ . Cuando la frecuencia del campo oscilante iguala a la frecuencia de precesión de los núcleos, actúa un momento de torsión en los momentos magnéticos que realizan precesión cau-

sando que se “muevan rápidamente” entre los dos estados de espín. Tales transiciones producen una absorción neta de energía por los núcleos, la que puede detectarse de una manera electrónica.

## 2.2. Teoría espectral

Para las definiciones que siguen a continuación, tendremos las siguientes consideraciones a no ser que se diga lo contrario.

Sea  $T: D_T \mapsto H$  un operador lineal con dominio  $D_T$  denso en  $H$ , donde  $H$  es un espacio de Hilbert. Sea  $I$  el operador identidad.

**Definición 2.2.1.** *Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda$  se llama punto regular de  $T$  si existe el operador*

$$(T - \lambda I)^{-1}$$

*y además es acotado con dominio  $D_{(T-\lambda I)^{-1}} = H$ .*

**Definición 2.2.2.** *Se llama conjunto resolvente de  $T$  y se denota por  $\rho(T)$ , al conjunto de los puntos regulares de  $T$ .*

**Definición 2.2.3.** *Se llama espectro de  $T$  y se denota  $\sigma(T)$ , al conjunto de los puntos no regulares de  $T$ . Es decir:*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Observemos que cuando  $T - \lambda I$  es inyectivo, entonces el dominio de  $(T - \lambda I)^{-1}$  es igual al recorrido de  $T - \lambda I$ .

Por otro lado, si  $\lambda \in \sigma(T)$  se tiene alguna de las siguientes posibilidades:

- $T - \lambda I$  no es inyectivo, entonces no existe  $(T - \lambda I)^{-1}$ .
- $T - \lambda I$  es inyectivo, tal que  $(T - \lambda I)^{-1}: D_{(T-\lambda I)^{-1}} \mapsto H$ , con  $D_{(T-\lambda I)^{-1}} \neq H$ , entonces  $(T - \lambda I)^{-1}$  puede o no ser acotado.
- $T - \lambda I$  es inyectivo, tal que  $(T - \lambda I)^{-1}: H \mapsto H$ , entonces  $(T - \lambda I)^{-1}$  no es acotado.

Además el espectro  $\sigma$  lo podemos clasificar en tres categorías. Y aunque existe confusión entre los nombres dados a las partes, expondremos las definiciones más utilizadas.

**Definición 2.2.4.** Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda$  se llama autovalor de  $T$  si  $T - \lambda I$  no es inyectivo, esto es, si existe  $x \in D_T$ ,  $x \neq 0$ , tal que  $Tx = \lambda x$ .

**Definición 2.2.5.** El conjunto de los autovalores de  $T$  se denota por  $\sigma_p(T)$  y se denomina espectro puntual de  $T$ .

**Definición 2.2.6.** Se define el espectro residual de  $T$ , se denota por  $\sigma_{res}(T)$ , como el conjunto de todos los puntos para los cuales  $T - \lambda I$  es inyectivo, siendo  $(T - \lambda I)^{-1}: R \mapsto H$  acotado, pero  $\bar{R} \neq H$ .

*Observación 2.2.7.* Para  $\lambda \in \sigma_{res}(T)$  el operador  $(T - \lambda I)^{-1}$  no se puede extender de forma continua a todo  $H$ .

**Definición 2.2.8.** Se define el espectro continuo de  $T$ , y se denota por  $\sigma_c(T)$ , como  $\sigma_c(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_{res}(T))$ .

Para ahondar más sobre este tema, recomendamos ver [11] o [7].

## 2.3. Teoría de semigrupos: Semigrupos uniformemente continuos

Comenzaremos esta sección y la siguiente, abordando tópicos de la teoría de semigrupos, exponiendo las principales deficiones y sus propiedades.

**Definición 2.3.1.** Una familia uniparamétrica  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores lineales acotados en un espacio Banach  $X$ , es un semigrupo de operadores acotados (o simplemente semigrupo) si:

- (i)  $T(0) = I$ , ( $I$  es el operador identidad en  $X$ ).
- (ii)  $T(t + s) = T(t)T(s)$  para todo  $t, s \geq 0$ .

**Definición 2.3.2.** Si  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es una familia de operadores lineales acotados que cumple con la definición 2.3.1 y además

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0,$$

decimos que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es uniformemente continuo.

**Definición 2.3.3.** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$  un semigrupo uniformemente continuo. El generador infinitesimal de  $T(t)$  es el operador  $A_T: D(A_T) \mapsto X$ , definido por

$$A_T x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

donde

$$D(A_T) = \left\{ x \in X \text{ tal que existe } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}.$$

Recordemos que  $\mathcal{B}(X, Y)$  representa el conjunto de los operadores lineales acotados de  $X$  en  $Y$ .

**Definición 2.3.4.** Consideremos  $0 \leq a < b < \infty$  y denotemos por  $\mathcal{P}_a^b$  al conjunto de todas las particiones de  $[a, b]$  en un número finito de subintervalos. Si  $P \in \mathcal{P}_a^b$  y  $P = (t_0, \dots, t_n)$ , escribimos  $|P| = \max_{k=1, \dots, n} \{t_k - t_{k-1}\}$ . Dado un semigrupo uniformemente continuo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en  $\mathcal{B}(X)$  definimos:

$$R_P(T) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})T(t_{k-1}).$$

Escribimos la integral de Riemann de  $T(t)$  como

$$\int_a^b T(t) dt = \lim_{|P| \rightarrow 0} R_P(T),$$

donde el límite se toma sobre todas las particiones  $P \in \mathcal{P}_a^b$ . Por la continuidad uniforme de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , es posible probar que el límite siempre existe y tiene las siguientes propiedades:

I.  $\int_a^b T(t) dt \in \mathcal{B}(X)$ .

II. Si  $U$  y  $T$  son semigrupos uniformemente continuos y  $A$  es acotado, entonces

$$\int_a^b [AT(t) + U(t)] dt = A \int_a^b T(t) dt + \int_a^b U(t) dt.$$

III. Para todo  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds \xrightarrow{h \rightarrow 0} T(t),$$

es decir, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|h| < \delta$ , entonces

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds - T(t) \right\| < \varepsilon.$$

**Lema 2.3.5.** Si  $A \in \mathcal{B}(X)$  y  $\|A\| < 1$ , entonces  $I - A$  es invertible.

*Demostración.* La función  $f(z) = 1/(1 - z)$  es analítica en  $\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1\}$ .

Como  $\|A\| < 1$ , tenemos que  $f(A) \in \mathcal{B}(X)$ , luego

$$(I - A)f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - A^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(I - A) = f(A)(I - A),$$

además

$$(I - A)f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - A^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I,$$

luego  $(I - A)f(A) = f(A)(I - A) = I$ . Por lo tanto  $I - A$  es invertible.  $\square$

**Proposición 2.3.6.** Si  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un semigrupo uniformemente continuo, entonces  $D(A_T) = X$  y  $A_T \in \mathcal{B}(X)$ .

*Demostración.* Escojamos  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que se cumpla

$$\left\| I - \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} T(s) ds \right\| < 1.$$

Por el lema 2.3.5 tenemos que  $\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} T(s) ds$  es invertible, y por lo tanto  $\int_0^{\delta} T(s) ds$  es invertible. Así, para  $h \in (0, \delta)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[T(h) - I] \int_0^{\delta} T(s) ds &= \frac{1}{h} \left[ \int_0^{\delta} T(s+h) ds - \int_0^{\delta} T(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_h^{\delta+h} T(s) ds - \int_0^{\delta} T(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_h^{\delta} T(s) ds + \int_{\delta}^{\delta+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds - \int_h^{\delta} T(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_{\delta}^{\delta+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right] \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{1}{h}[T(h) - I] = \frac{1}{h} \left[ \int_{\delta}^{\delta+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right] \left[ \int_0^{\delta} T(s) ds \right]^{-1}$$

por lo que

$$\frac{1}{h}[T(h) - I] \xrightarrow{h \rightarrow 0} [T(\delta) - I] \left[ \int_0^{\delta} T(s) ds \right]^{-1}.$$

Dado que la convergencia uniforme implica convergencia fuerte, tenemos que para todo

$x \in X$  existe  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}[T(h)x - x]$ . Concluimos que  $D(A_T) = X$  y

$$A_T = [T(\delta) - I] \left[ \int_0^\delta T(s) ds \right]^{-1} \in \mathcal{B}(X)$$

por ser  $\mathcal{B}(X)$  un álgebra. □

## 2.4. Teoría de semigrupos: Semigrupos fuertemente continuos

Ahora veremos semigrupos que satisfacen una condición más débil que la continuidad uniforme, conocidos como *semigrupos fuertemente continuos*.

**Definición 2.4.1.** *Se dice que un semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores acotados es fuertemente continuo si para todo  $x \in X$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$ . También se dice que es de clase  $C_0$  o que es un  $C_0$ -semigrupo.*

Observemos que todo semigrupo uniformemente continuo es un  $C_0$ -semigrupo. La diferencia está en que un semigrupo uniformemente continuo converge uniformemente a la identidad en el cero, mientras que un  $C_0$ -semigrupo converge fuertemente. Al igual que los semigrupos uniformemente continuos, los  $C_0$ -semigrupos satisfacen una propiedad de acotamiento para su norma. La cual veremos a continuación:

**Proposición 2.4.2.** *Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo. Entonces existen  $w \geq 0$  y  $M \geq 1$  tales que para todo  $t \geq 0$ ,*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}.$$

*Demostración.* En virtud de la continuidad fuerte, existen  $\delta > 0$  y  $M \geq 0$  tales que  $\|T(t)\| \leq M$  para todo  $t \in [0, \delta]$ . De lo contrario, existiría una sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  y tal que  $\|T(t_n)\| \geq n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . El principio de acotamiento uniforme, asegura la existencia de un  $x \in X$  tal que  $\|T(t_n)x\| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , contradiciendo la continuidad fuerte.

Ahora bien, dado que  $T(0) = I$ , tenemos que  $M \geq 1$ . Por otra parte, dado  $t \geq 0$ , existen  $m \in \mathbb{N}$  y  $\eta \in [0, \delta)$  tales que  $t = \delta m + \eta$  (Lema de Euclides). Así,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(\delta m + \eta)\| = \|T(\delta)^m T(\eta)\| \\ &\leq M M^m \leq M M^{t/\delta}, \end{aligned}$$

ya que  $m \leq t/\delta$  y  $M \geq 1$ . También, como  $M \geq 1$ , se tiene que

$$w := \frac{1}{\delta} \log M \geq 0.$$

Entonces  $e^w = M^{1/\delta}$ . Así  $M^{t/\delta} = e^{wt}$  para todo  $t \geq 0$  y  $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ .  $\square$

**Proposición 2.4.3.** *Si  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un  $C_0$ -semigrupo, entonces para cada  $x \in X$  la función  $\phi_x: [0, \infty) \rightarrow X$  definida por  $\phi_x(t) = T(t)x$  es continua.*

*Demostración.* Sean  $t \geq 0$  y  $h \in [0, t]$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\| \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{t-h} \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^t \|T(h)x - x\| \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

$\square$

Notemos que el resultado anterior permite dar sentido a la integral de Riemann

$$\int_a^b T(s)x \, ds \quad \text{para todo } x \in X.$$

La definición de generador infinitesimal para un  $C_0$ -semigrupo es la misma que para un semigrupo uniformemente continuo, es decir:

$$\begin{aligned} A_T: D(A_T) \subseteq X &\mapsto X \\ D(A_T) &= \left\{ x \in X \text{ tal que existe } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\} \\ A_T x &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}. \end{aligned}$$

Veremos que en este caso, aunque es posible que  $D(A_T) \subsetneq X$ , se tiene que  $\overline{D(A_T)} = X$ . Más aún, dado que la continuidad fuerte es una condición más débil que la continuidad uniforme, esperamos que  $A_T$  también tenga una propiedad un poco más débil que el ser acotado. El siguiente resultado será útil para confirmar esos dos hechos.

**Lema 2.4.4.** Sean  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo y  $A_T$  su generador infinitesimal. Entonces:

a) Para todo  $x \in X$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

b) Para todo  $x \in X$ ,

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A_T)$$

$$A_T \left[ \int_0^t T(s)x ds \right] = T(t)x - x.$$

c) Para todo  $x \in D(A_T)$ ,

$$T(t)x \in D(A_T)$$

$$\frac{d}{dt} T(t)x = A_T T(t)x = T(t)A_T x.$$

d) Para todo  $x \in D(A_T)$ ,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)A_T x d\tau = \int_s^t A_T T(\tau)x d\tau.$$

*Demostración.* En efecto,

a) Es consecuencia de la proposición 2.4.3. Sea

$$G(t)x := \int_0^t T(s)x ds,$$

luego

$$T(t)x = G'(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(t+h)x - G(t)x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds.$$

b) Sean  $x \in X$  y  $h > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x ds &= \frac{1}{h} \int_0^t [T(s+h)x - T(s)x] ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds, \end{aligned}$$

sumando y restando la integral de  $T(s)x/h$  entre  $t$  y  $h$  obtenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x \, ds + \frac{1}{h} \int_t^h T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_t^h T(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando  $h \rightarrow 0$ , tenemos que

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A_T) \text{ y que } A_T \left( \int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - Ix = T(t)x - x.$$

c)

$$\left[ \frac{T(h)x - I}{h} \right] T(t)x = \left[ \frac{T(t+h)x - T(t)}{h} \right] x = T(t) \left[ \frac{T(h)x - I}{h} \right] x.$$

Tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0^+$ , tenemos

$$A_T T(t)x = \frac{d^+}{dt} T(t)x = T(t)A_T x,$$

por otro lado, veamos que pasa con  $\frac{d^-}{dt}$

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)A_T x \right] = \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} &\left[ \frac{T(t-h+h)x - T(t-h)x}{h} - T(t)A_T x + T(t-h)A_T x - T(t-h)A_T x \right] = \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} &T(t-h) \left[ \frac{T(h)x - x}{h} - A_T x \right] - \lim_{h \rightarrow 0^+} [T(t-h)A_T x - T(t)A_T x]. \quad (2.4.1) \end{aligned}$$

El primer término de la ecuación (2.4.1) es cero pues  $\|T(t-h)\|$  está acotado para todo  $h \in [0, t]$  y  $x \in D(A_T)$ . El segundo término también es cero por la continuidad fuerte de  $T(t)$ .

d) de c) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(t)x &= A_T T(t)x = T(t)A_T x \quad \forall x \in D(A_T) \\ \int_s^t \frac{d}{d\tau} T(\tau)x \, d\tau &= \int_s^t A_T T(\tau)x \, d\tau = \int_s^t T(\tau)A_T x \, d\tau \\ T(t)x - T(s)x &= \int_s^t A_T T(\tau)x \, d\tau = \int_s^t T(\tau)A_T x \, d\tau. \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.4.5.** Si  $A_T$  es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , entonces  $\overline{D(T)} = X$ .

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Construiremos una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(A_T)$  que converge a  $x$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$x_n = n \int_0^{1/n} T(s)x ds.$$

La parte b) del lema 2.4.4 nos dice que efectivamente  $x_n \in D(A_T)$  y de la parte a) se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .  $\square$

**Proposición 2.4.6.** Si  $A_T$  es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , entonces  $A_T$  es cerrado.

*Demostración.* Supongamos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(A_T)$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_T x_n = y \in Y$ .

De la parte d) del lema 2.4.4, tenemos que:

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)A_T x_n ds \tag{2.4.2}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t T(s)A_T x_n ds - \int_0^t T(s)y ds \right\| &= \left\| \int_0^t T(s) [A_T x_n - y] ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|T(s)\| \|A_T x_n - y\| ds \\ &\leq \int_0^t M e^{ws} \|A_T x_n - y\| ds \\ &\leq \int_0^t M e^{wt} \|A_T x_n - y\| ds \\ &= M e^{wt} \|A_T x_n - y\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación ( 2.4.2) queda de la forma:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds.$$

Así, por la parte a) del lema 2.4.4,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \, ds = T(0)y = y,$$

de aquí concluimos que  $x \in D(A_T)$  y además que  $A_T x = y$ . □

Para ahondar más en este tema, ver por ejemplo [7].

## 2.5. Funciones de Gauss–Hermite

Comenzaremos esta sección definiendo los polinomios de Hermite y algunas de sus principales propiedades para luego introducir, de una manera más simple, las funciones de Gauss–Hermite.

Los polinomios de Hermite se definen en la recta real según la fórmula de Rodrigues de la siguiente forma:

**Definición 2.5.1.** Sean  $H_n: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  para  $n \geq 0$ , donde

$$H_n(u) = (-1)^n e^{u^2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2}. \quad (2.5.3)$$

Notemos que  $H_n$  tiene la característica de ser solución de la ecuación diferencial de segundo orden de Hermite

$$f''(u) - 2uf'(u) + 2nf(u) = 0.$$

Para comprender de mejor manera su forma, miremos los primeros polinomios de Hermite, además en la figura 2.2 podemos ver su gráfico en el intervalo  $[-5, 5]$ ,

$$\begin{aligned} H_0(u) &= 1, \\ H_1(u) &= 2u, \\ H_2(u) &= 4u^2 - 2, \\ H_3(u) &= 8u^3 - 12u, \\ H_4(u) &= 16u^4 - 48u^2 + 12, \\ H_5(u) &= 32u^5 - 160u^3 + 120u. \end{aligned}$$

La función generatriz viene dada por:

$$e^{su-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(u)s^n}{n!}. \quad (2.5.4)$$

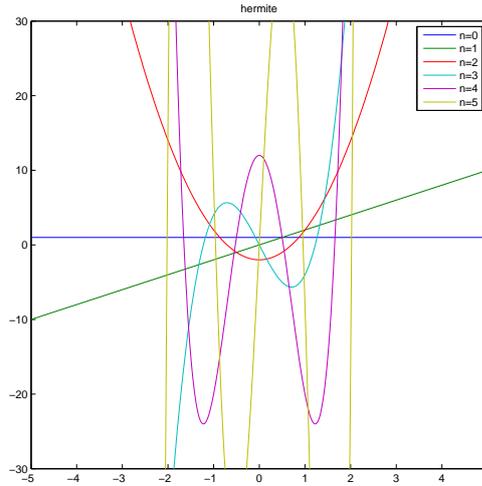


Figura 2.2: Primeros 6 polinomios de Hermite en el intervalo  $[-5, 5]$ .

Algunas de las principales propiedades de los polinomios de Hermite son:

- I. Los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto a la medida  $\mu(u) = e^{-u^2}$ , esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(u)H_n(u)\mu(u) du = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ n!2^n\sqrt{\pi} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

II.  $H_{n+1}(u) = 2uH_n(u) - 2nH_{n-1}(u)$ .

III.  $H'_n(u) = 2nH_{n-1}(u)$ .

IV.  $H_n(-u) = (-1)^n H_n(u)$ .

V.  $H_{2k-1}(0) = 0$  si  $k \in \mathbb{N}$ .

VI.  $H_{2k}(0) = (-1)^k 2^k \prod_{s=1}^k (2s - 1)$  si  $k \in \mathbb{N}$ .

VII. Una fórmula explícita de los polinomios de Hermite es de la forma

$$H_n(u) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!} (2u)^{n-2m}.$$

Ahora estamos en condiciones de introducir las funciones de Gauss-Hermite de una manera natural. Sean  $\psi_n: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , con  $n \geq 0$ , donde

$$\psi_n(u) = A_n H_n(\sqrt{2\pi}u) e^{-\pi u^2},$$

y donde  $H_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Hermite y  $A_n = 2^{1/4}/\sqrt{2^n n!}$ .

Las funciones de Gauss–Hermite forman un sistema ortonormal en  $L^2(\mathbb{R})$ , es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

Las funciones de Gauss–Hermite también son conocidas por ser solución de la siguiente ecuación diferencial (ver [5, tabla 2.8])

$$\psi_n''(u) + 4\pi^2 \left( \frac{2n+1}{2\pi} - u^2 \right) \psi_n(u) = 0. \quad (2.5.5)$$

Además estas funciones satisfacen  $\mathcal{F}\psi_n = e^{-in\pi/2}\psi_n$ , donde  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \mapsto C(\mathbb{R})$  es el operador transformada de Fourier, por lo tanto, representan las funciones propias de  $\mathcal{F}$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Donde:

$$\mathcal{F}f(\mu) := \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i2\pi u\mu} d\mu.$$

Para una revisión de más características y propiedades de los polinomios de Gauss–Hermite, ver por ejemplo [5] o [12].

# Capítulo 3

## Resonancia magnética

Una técnica de diagnóstico médico ampliamente utilizada es la *visualización por resonancia magnética* o *imágenes de resonancia magnética* (MRI, por sus siglas en inglés), la cual se basa en el fenómeno de la resonancia magnética nuclear (NMR, por sus siglas en inglés). Puesto que casi dos tercios de los átomos en el cuerpo humano son hidrógeno (el cual proporciona una intensa señal), la MRI entrega una buena visualización de los tejidos internos del cuerpo.

### 3.1. Magnetización nuclear de sistemas de espines

Para entender el fenómeno de la resonancia magnética nuclear en las imágenes de resonancia magnética, comenzaremos con el estudio de un objeto del cual se desea obtener su imagen por medio de este método. Es bien sabido que cualquier objeto físico puede ser dividido sucesivamente hasta estar constituido sólo por moléculas, luego por átomos, y finalmente núcleos con electrones orbitando en torno a ellos. Los núcleos tienen un radio finito ( $10^{-14}$  m aproximadamente), masa finita ( $10^{-27}$  Kg aproximadamente), y una carga eléctrica neta ( $10^{-19}$  coulomb).

Una propiedad fundamental de los núcleos es que aquellos con peso atómico impar y/o número atómico impar, así como por ejemplo el núcleo del átomo de hidrógeno (que tiene sólo un protón), poseen un momento angular  $\vec{J}$ , también llamado *espín*. Aunque el espín nuclear es una propiedad caracterizada por la mecánica cuántica, en el modelo vectorial clásico, el espín es visualizado como una rotación física sobre su eje, similar a la rotación de la tierra.

Una importante propiedad de un sistema de espines nucleares es el llamado *mag-*

*netismo nuclear*, creado al colocar un campo magnético externo. Este magnetismo es la base física de la MRI.

El magnetismo nuclear, de un sistema de espines, se origina de los campos magnéticos microscópicos asociados al espín. El argumento clásico para la existencia de este campo magnético es: Primero, un núcleo como el protón tiene carga eléctrica; Segundo, este rota sobre su propio eje si es que tiene espín no nulo. Así, como cualquier objeto con carga en movimiento, un núcleo con espín no nulo crea un campo magnético alrededor de él, lo que es análogo al entorno de una barra magnética microscópica. Físicamente se representa por una cantidad vectorial  $\vec{\mu}$ , que es llamado *momento de dipolo magnético nuclear* o *momento magnético*. Una relación fundamental de la física de partículas es la siguiente

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{J},$$

donde  $\gamma$  es una constante física conocida como *radio giromagnético*.

Además podemos definir la constante  $\varphi$ , la cual está relacionada con  $\gamma$  y también es altamente usada:

$$\varphi = \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Notemos que los valores de  $\gamma$  y  $\varphi$  dependen del núcleo. Por ejemplo,  $\gamma = 2,675 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}\cdot\text{T}}$  ( $\varphi = 42,58 \text{ MHz/T}$ ) para  $^1\text{H}$  mientras que  $\gamma = 2,675 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}\cdot\text{T}}$  ( $\varphi = 42,58 \text{ MHz/T}$ ) para  $^{31}\text{P}$ . El valor de algunos  $\varphi$  de núcleos que son relevantes en diagnósticos médicos se muestran en el cuadro 3.1

Núcleo	Espín	Radio Giromagnético $\varphi$ (MHz/T)
$^1\text{H}$	1/2	42.58
$^{13}\text{C}$	1/2	10.71
$^{19}\text{F}$	1/2	40.05
$^{31}\text{P}$	1/2	11.26

Cuadro 3.1: Propiedades de algunos núcleos activos en NMR.

**Definición 3.1.1.** *Un núcleo se dice activo en NMR sólo si el número de espín cuántico es distinto de cero.*

Dado que el momento magnético es una cantidad vectorial, necesitamos conocer su magnitud y orientación para definirlo unívocamente. Basado en teorías de mecánica cuántica, la magnitud de  $\vec{\mu}$  (a menudo denotada  $|\vec{\mu}|$  o simplemente  $\mu$  cuando no hay

peligro de confusión) se define

$$\mu = \gamma \hbar \sqrt{I(I+1)},$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck  $h$  ( $6,6 \times 10^{-34}$  J-s) dividida en  $2\pi$ , e  $I$  es *número de espín cuántico* del núcleo.

El espín cuántico toma valores del conjunto  $\{n/2: \text{ con } n \in \mathbb{N}_0\}$ . El valor que toma  $I$  para un núcleo particular depende de las siguientes tres reglas:

1. Núcleos con número másico impar toman valores impares de  $n$ .
2. Núcleos con número másico par y número de carga par toman el valor  $n = 0$ .
3. Núcleos con número másico par pero número de carga impar toman valores pares de  $n$ .

Por ejemplo, para los núcleos  $^1H$ ,  $^{13}C$ ,  $^{19}F$  y  $^{31}P$ , el valor de  $I$  es igual a  $1/2$ , y tal sistema de espines se llama *sistema de espín 1/2*.

Aunque la magnitud de  $\vec{\mu}$  se conoce bajo cualquier condición (con o sin un campo magnético externo), su dirección es completamente aleatoria en ausencia de un campo magnético externo debido al movimiento térmico aleatorio. Por lo tanto, por el equilibrio térmico, no existe un campo magnético alrededor del objeto a nivel macroscópico.

Para activar una magnetización macroscópica en el objeto, es necesario alinear los vectores de los espines. Esto se logra exponiendo el objeto a un potente campo magnético externo. Por convención, se asume que el campo magnético externo de intensidad  $B_0$  es aplicado en la dirección  $z$  tal que  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{k}$ . A diferencia de una aguja de brújula que está alineada exactamente con la dirección del campo magnético externo, el vector de momento magnético puede asumir una posición dentro de un conjunto discreto de orientaciones, la cual es una característica esencial del modelo cuántico.

A continuación describiremos el movimiento de  $\vec{\mu}$  cuando es sometido a un campo magnético externo. Usando el tratamiento clásico, suponemos que  $\vec{\mu}$  es un vector de momento magnético sin interacción mutua. De acuerdo con la mecánica clásica, el torque que experimenta  $\vec{\mu}$  por el campo magnético externo es dado por  $\vec{\mu} \times B_0 \vec{k}$ , que es igual a la tasa de cambio del momento angular. Esto es,

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\mu} \times B_0 \vec{k},$$

ya que  $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$ , tenemos que:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times B_0 \vec{k}, \quad (3.1.1)$$

que es la ecuación de movimiento para un solo espín en el tratamiento clásico.

La solución de la ecuación (3.1.1) puede expresarse por

$$\begin{cases} \mu_{xy}(t) = \mu_{xy}(0) e^{-i\gamma B_0 t} \\ \mu_z(t) = \mu_z(0), \end{cases} \quad (3.1.2)$$

donde  $\mu_{xy}(0)$  y  $\mu_z(0)$  son los valores iniciales y se entiende que  $\mu_{xy} = \mu_x + i\mu_y$  es equivalente a  $\vec{\mu}_{xy} = \mu_x \vec{i} + \mu_y \vec{j}$ .

La ecuación (3.1.2) describe la precesión de  $\vec{\mu}$  en torno al eje  $z$  (o del campo  $B_0$ ), la cual es llamada *precesión nuclear*.

Dos puntos importantes acerca de la precesión nuclear son evidentes de la ecuación (3.1.2). Primero, la frecuencia angular de la precesión nuclear es:

$$\omega_0 = \gamma B_0,$$

y es conocida como la *frecuencia de Larmor*. Segundo, la precesión de  $\vec{\mu}$  en torno a  $\vec{B}_0$  es en sentido de la agujas de reloj (si se observa en contra de la dirección del campo magnético). En la práctica, es fácil determinar la dirección de precesión usando la *regla de la mano izquierda*. Esto es, si el pulgar izquierdo apunta en la dirección de  $\vec{B}_0$ , la precesión nuclear sigue la dirección de los otros dedos.

Además de la ecuación (3.1.2), la precesión nuclear puede describirse por el vector de velocidad angular  $\vec{\omega} = -\gamma \vec{B}_0 = -\omega_0 \vec{k}$ . Otra manera de describir la precesión es usando la matriz de rotación. Específicamente, sea

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la ecuación (3.1.2) se puede expresar en forma escalar como  $\vec{\mu}(t)^\top = \mathbf{R}_z(\omega_0 t) \vec{\mu}(0)^\top$ .

Para describir el comportamiento colectivo del sistema de espín, se introduce el vector de magnetización  $\vec{M}$ , el cual es la suma de todos los momentos magnéticos microscópicos en el objeto. Específicamente, sea  $\vec{\mu}_n$  el momento magnético del  $n$ -ésimo

espín nuclear. Entonces,

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^{N_s} \vec{\mu}_n,$$

donde  $N_s$  es el número total de espines en el objeto examinado. Ahora analizaremos  $\vec{M}$  para sistemas de espín  $1/2$ .

Notemos que  $\vec{M} = 0$  en ausencia de un campo magnético externo, debido a que la dirección de los momentos magnéticos individuales es aleatoria y se anulan mutuamente. Ahora nos enfocaremos en el comportamiento colectivo de  $\vec{\mu}_n$  cuando el objeto es sometido a un campo magnético externo  $\vec{B}_0$ . De la mecánica cuántica tenemos que  $\vec{\mu}_n$  puede tomar dos posibles orientaciones con respecto al eje  $z$  en un instante dado (espines en diferente orientación tienen diferente energía de interacción con  $\vec{B}_0$ ). Específicamente  $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu_z B_0 = -\gamma \hbar m_I B_0$ , donde  $m_I$  es llamado *número magnético cuántico*. En consecuencia, para los espines en dirección del campo se tiene  $m_I = 1/2$ , luego

$$E_{\uparrow} = -\frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \quad (3.1.3)$$

y para los espines en dirección antiparalela (contra la dirección de campo) se tiene  $m_I = -1/2$ , además

$$E_{\downarrow} = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0. \quad (3.1.4)$$

Las ecuaciones (3.1.3) y (3.1.4) indican que los espines en dirección paralela están en un estado de energía menor, mientras que los espines en dirección antiparalela en un estado de energía mayor. La diferencia de energía entre los dos estados es dada por  $\Delta E = E_{\downarrow} - E_{\uparrow} = \gamma \hbar B_0$ . Esta diferencia no nula entre los dos estados de los espines es conocida como el fenómeno de *Efecto Zeeman* y se ilustra en la figura 3.1.

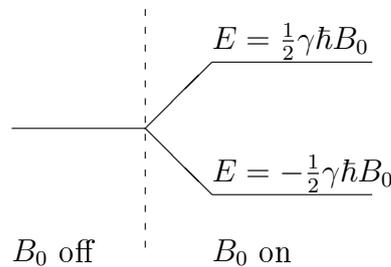


Figura 3.1: Efecto Zeeman para un sistema de espín  $1/2$ .

La diferencia de espines en los dos estados está relacionada con su diferencia de

energía. De acuerdo con la relación de Boltzmann, tenemos:

$$\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = e^{\frac{\Delta E}{kT_s}}.$$

Donde  $N_{\uparrow}$ ,  $N_{\downarrow}$  son los números de espines en sentido paralelo y antiparalelo respectivamente,  $T_s$  es la temperatura absoluta de sistema y  $K = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K es la constante de Boltzmann.

## 3.2. Excitación de radiofrecuencia

Hasta aquí hemos analizado dos aspectos del fenómeno de la NMR: núcleos y campo magnético estático. El efecto macroscópico de un campo magnético externo  $\vec{B}_0$  en un conjunto de núcleos con espín no nulo es la generación de la magnetización vectorial total  $\vec{M}$  apuntando en la dirección de  $\vec{B}_0$ . Aunque existe una componente transversal microscópica para cada vector de momento magnético de  $\vec{M}$  en equilibrio, ellas se anulan mutuamente ya que precesan en fases aleatorias, como muestra la ecuación (3.1.2). El establecimiento de una fase de coherencia entre esa aleatoriedad de precesión en un sistema de espines bajo una magnetización es conocido como *resonancia*.

Antes de ahondar en la condición de resonancia, analicemos la conocida analogía del *columpio*. Supongamos que hay una fila de columpios de igual largo (por lo que cada columpio tendrá la misma frecuencia natural), con niños jugando en él. Si los niños no parten al mismo tiempo, habrá una diferencia de fase entre los columpios; esto es, dado un instante fijo, los niños estarán en un punto distinto del arco de balanceo. Para que los columpios entren en fase de coherencia, se deben aplicar fuerzas externas a la frecuencia natural de los columpios. Por ejemplo, si todos los columpios son empujados al unísono a su frecuencia natural por una persona ubicada detrás de cada columpio, los niños pronto entrarán en fase, ejerciendo una fuerza coherente en la barra superior de los columpios.

Para un sistema de espines magnetizados, la fuerza externa (energía) viene del campo magnético oscilante denotado por  $\vec{B}_1(t)$  en distinción del campo estático  $\vec{B}_0$ . La condición de resonancia, basada en la física clásica, es que  $\vec{B}_1(t)$  rota de la misma forma que precesan los espines. Un argumento más riguroso se basa en el modelo cuántico. En este modelo, la radiación electromagnética de frecuencia  $\omega_{\text{rf}}$  lleva energía (Ley de Planck):

$$E_{\text{rf}} = \hbar\omega_{\text{rf}}.$$

Para introducir una transición coherente de los espines de un estado energético en otro, la radiación de energía debe ser igual a la diferencia de energía  $\Delta E$  entre los estados adyacentes del espín. Esto es,

$$\hbar\omega_{\text{rf}} = \Delta E = \gamma\hbar B_0$$

o

$$\omega_{\text{rf}} = \omega_0. \quad (3.2.5)$$

La ecuación (3.2.5) es conocida como *condición de resonancia*.

El *pulso RF* es sinónimo del campo  $B_1$ , ya que  $B_1$  es de corta duración y oscila en los rangos de radiofrecuencia. Específicamente, el campo  $B_1$  normalmente es activado por unos pocos microsegundos o milisegundos. También, en contraste con el campo magnético estático  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{B}_1$  es mucho más débil (por ejemplo,  $B_1 = 50$  mT mientras que  $B_0 = 1,5$  T).

Un típico campo  $B_1$  toma la siguiente forma:

$$\vec{B}_1(t) = 2B_1^e(t) \cos(\omega_{\text{rf}}t + \varphi)\vec{i},$$

donde  $B_1^e$  es una función de pulso envolvente,  $\omega_{\text{rf}}$  es la frecuencia que lleva la excitación y  $\varphi$  es el ángulo de fase inicial. Este campo se dice que es *linealmente polarizado* ya que oscila linealmente por el eje  $x$ . Matemáticamente, se puede descomponer en dos campos *circulares polarizados* rotando en direcciones opuestas, esto es,

$$\vec{B}_1(t) = B_1^e(t) \left[ \cos(\omega_{\text{rf}}t + \varphi) - \sin(\omega_{\text{rf}}t + \varphi)\vec{j} \right] + B_1^e(t) \left[ \cos(\omega_{\text{rf}}t + \varphi) + \sin(\omega_{\text{rf}}t + \varphi)\vec{j} \right],$$

donde los términos del primer paréntesis giran en sentido de las agujas del reloj, mientras que en el segundo lo hacen en sentido contrario a las agujas del reloj. Ya que el segundo paréntesis gira en la dirección opuesta a la precesión de los espines, produce efectos insignificantes sobre el sistema de espines si  $\omega_{\text{rf}}$  está cerca de la frecuencia de Larmor<sup>1</sup>. Por lo tanto, el campo  $\vec{B}_1(t)$  efectivo a considerar es:

$$\vec{B}_1(t) = B_1^e(t) \left[ \cos(\omega_{\text{rf}}t + \varphi) - \sin(\omega_{\text{rf}}t + \varphi)\vec{j} \right],$$

---

<sup>1</sup>El principal efecto de esta componente fuera de resonancia es un leve desplazamiento, el cual es conocido como *Bloch-Siegert shift*. Este desplazamiento en la frecuencia desaparece cuando  $B_1$  es activado.

la cual tiene una componente en  $x$

$$\vec{B}_{1,x}(t) = B_1^e(t) \cos(\omega_{\text{rf}}t + \varphi)$$

y una componente en  $y$

$$\vec{B}_{1,y}(t) = -B_1^e(t) \sin(\omega_{\text{rf}}t + \varphi).$$

Un marco rotatorio es un sistema coordenado cuyo plano transversal rota en el sentido de la agujas del reloj a una frecuencia angular  $\omega$ . Para distinguir este del marco convencional estacionario, que denominaremos *marco de laboratorio*, usaremos  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  para denotar los ejes ortogonales del marco rotatorio, y los correspondientes  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  y  $\vec{k}'$  para los vectores unitarios. Matemáticamente, está relacionado con el marco estacionario (o de laboratorio) mediante la siguiente transformación:

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos(\omega t)\vec{i} - \sin(\omega t)\vec{j} \\ \vec{j}' = \sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k}. \end{cases}$$

Dos marcos rotatorios especiales que son usados, corresponden a  $\omega = \omega_0$  y  $\omega = \omega_{\text{rf}}$ . En el primer caso, el plano  $x'y'$  precesa a la frecuencia de Larmor del sistema de espines, y lo llamaremos *marco rotatorio de Larmor*. En el segundo caso, el plano  $x'y'$  rota como el campo  $\vec{B}_1(t)$ , y lo llamaremos *marco rotatorio RF*. Cuando  $\omega_{\text{rf}} = \gamma B_0$ , ambos marcos son iguales. Por lo tanto, cuando no existe peligro de confusión, usaremos el término genérico, marco rotatorio o marco rotatorio  $\omega$ , para referirnos a uno o el otro, dependiendo del contexto.

La ventaja de introducir el marco rotatorio radica en la simplicidad que ofrece para describir el efecto de excitación bajo el pulso RF.

El comportamiento de dependencia temporal de  $\vec{M}$  en presencia de un campo magnético  $\vec{B}_1(t)$  se describe cuantitativamente por la *ecuación de Bloch*. En el contexto de MRI, la ecuación de Bloch toma la forma general:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B} - \frac{M_x \vec{i} + M_y \vec{j}}{T_2} - \frac{(M_z - M_z^0) \vec{k}}{T_1}, \quad (3.2.6)$$

donde  $M_z^0$  es el valor del equilibrio térmico para  $\vec{M}$  en presencia de  $\vec{B}_0$  solamente, y

puede ser calculado de la forma

$$M_z^0 = \frac{\gamma^2 \hbar^2 B_0 N_s I(I+1)}{3KT_s}.$$

$T_1$  y  $T_2$  son constantes de tiempo que caracterizan el proceso de relajación del sistema de espines después que fue perturbado de su estado de equilibrio térmico. Primero obviaremos los dos últimos términos y estudiaremos el comportamiento de  $\vec{M}$  durante el periodo de excitación RF. Esto es aceptable si la duración del pulso RF es corto en comparación con  $T_1$  y  $T_2$ , como suele ocurrir en la práctica.

Bajo esta suposición, la ecuación de Bloch toma la forma

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B}. \quad (3.2.7)$$

Uno puede reconocer que esta ecuación es idéntica a la ecuación de movimiento para un espín libre en la ecuación (3.1.1) si reemplazamos  $\vec{M}$  por  $\vec{\mu}$ . Ahora expresaremos la ecuación en el marco rotatorio:

$$\frac{\partial \vec{M}_{\text{rot}}}{\partial t} = \gamma \vec{M}_{\text{rot}} \times \vec{B}_{\text{rot}} - \omega \times \vec{M}_{\text{rot}} = \gamma \vec{M}_{\text{rot}} \times \left( \vec{B}_{\text{rot}} + \frac{\omega}{\gamma} \right).$$

Y la podemos reescribir como

$$\frac{\partial \vec{M}_{\text{rot}}}{\partial t} = \gamma \vec{M}_{\text{rot}} \times \vec{B}_{\text{eff}}, \quad (3.2.8)$$

donde

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B}_{\text{rot}} + \frac{\vec{\omega}}{\gamma}$$

es el campo magnético efectivo que el vector de magnetización experimenta en el marco rotatorio. El segundo término representa una componente ficticia del campo por el comportamiento simplificado de  $\vec{M}_{\text{rot}}$ .

El mismo análisis puede seguirse para expresar la ecuación general de Bloch (3.2.6) en el marco rotatorio:

$$\frac{\partial \vec{M}_{\text{rot}}}{\partial t} = \gamma \vec{M}_{\text{rot}} \times \vec{B}_{\text{eff}} - \frac{M_x i' + M_y j'}{T_2} - \frac{(M_z - M_z^0)}{T_1}. \quad (3.2.9)$$

El campo efectivo que los espines nucleares perciben en el marco rotatorio es:

$$\vec{B}_{\text{eff}} = B_0 \vec{k}' + B_1^e(t) \vec{i}' + \frac{\omega_{\text{rf}}}{\gamma} = \left( B_0 - \frac{\omega_{\text{rf}}}{\gamma} \right) \vec{k}' + B_1^e(t) \vec{i}'.$$

Usando la condición de excitación en resonancia  $\omega_{\text{rf}} = \omega_0 = \gamma B_0$ , tenemos que

$$\vec{B}_{\text{eff}} = B_1^e(t) \vec{i}'.$$

Sustituimos el resultado de arriba en la ecuación (3.2.8)

$$\frac{\partial \vec{M}_{\text{rot}}}{\partial t} = \gamma \vec{M}_{\text{rot}} \times B_1^e(t) \vec{i}'.$$

En forma escalar, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{dM_{x'}}{dt} = 0 \\ \frac{dM_{y'}}{dt} = \gamma B_1^e(t) M_{z'} \\ \frac{dM_{z'}}{dt} = -\gamma B_1^e(t) M_{y'}. \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Una solución cerrada de la ecuación (3.2.10) bajo las condiciones iniciales  $M_{x'} = M_{y'} = 0$  y  $M_{z'} = M_z^0$  es:

$$\begin{cases} M_{x'}(t) = 0 \\ M_{y'}(t) = M_z^0 \sin \left( \int_0^t \gamma B_1^e(s) ds \right) \\ M_{z'}(t) = M_z^0 \cos \left( \int_0^t \gamma B_1^e(s) ds \right). \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \tau_p \quad (3.2.11)$$

Esta ecuación indica que el efecto de la excitación en resonancia por el campo  $\vec{B}_1$ , en el marco rotatorio RF, es la precesión de la magnetización sobre el eje  $x'$ . Sin embargo, esto no sorprende ya que el campo efectivo  $\vec{B}_{\text{eff}}$  apunta al eje  $x'$ .

La mayoría de las excitaciones son asumidas en resonancia. Sin embargo, en la práctica, si las inhomogeneidades<sup>2</sup> del campo y efectos de desplazamiento químico no son despreciables, es poco probable que la excitación en resonancia sea exacta para todos los isocromáticos<sup>3</sup>. Cuando la excitación del campo es fuera de resonancia para un cierto isocromático, el campo magnético efectivo que somete a ese isocromático en

<sup>2</sup>Aunque no es correcto para la lengua castellana, es parte la de terminología usada en MRI.

<sup>3</sup>A cada grupo de espines que comparten la misma frecuencia de resonancia se le llama *isocromático*

el marco rotatorio es:

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \left( B_0 - \frac{\omega_{\text{rf}}}{\gamma} \right) \vec{k}' + B_1^e(t) \vec{i}' = \frac{\Delta\omega_0}{\gamma} \vec{k}' + B_1^e(t) \vec{i}', \quad (3.2.12)$$

donde  $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_{\text{rf}}$  mide el grado de “fuera de resonancia”.

La última igualdad de la ecuación (3.2.12) muestra que el campo efectivo tiene dos componentes: la componente usual  $B_1$  apuntando sobre el eje  $x'$  y una componente residual  $\Delta\omega_0/\gamma$  apuntando en dirección del eje  $z'$ . Intuitivamente, basado en la discusión anterior se puede predecir la precesión de  $\vec{M}_{\text{rot}}$  por  $\vec{B}_{\text{eff}}$ . Un análisis más riguroso puede obtenerse resolviendo directamente la ecuación de Bloch:

$$\begin{cases} \frac{dM_{x'}}{dt} = \Delta\omega_0 M_{y'} \\ \frac{dM_{y'}}{dt} = -\Delta\omega_0 M_{x'} + \gamma B_1^e(t) M_{z'} \\ \frac{dM_{z'}}{dt} = -\gamma B_1^e(t) M_{y'} \end{cases} \quad (3.2.13)$$

que gobierna el movimiento de  $\vec{M}$  durante el pulso RF. Desafortunadamente, no existe una solución cerrada para esta ecuación para un  $B_1^e(t)$  arbitrario.

### 3.3. Precesión libre y relajación

Después que el sistema de espines magnetizado ha sido perturbado de su estado de equilibrio térmico por el pulso RF, deberá, de acuerdo a las leyes de la termodinámica, volver a su estado inicial, siempre que la fuerza externa se remueva y se le de suficiente tiempo. Este proceso se caracteriza por la precesión de  $\vec{M}$  en torno al campo  $B_0$ , llamado *free precession* o *precesión libre*; la recuperación de la magnetización longitudinal  $M_z$ , llamada *relajación longitudinal*; y la desaparición de la magnetización transversal es llamada *relajación transversal*. Ambos procesos de relajación a menudo son atribuidos a la dependencia temporal de los campos magnéticos microscópicos que rodean el núcleo.

Fenomenológicamente, las relajaciones transversal y longitudinal son descritas por una ecuación diferencia de primer orden. Específicamente, en el marco rotatorio de Larmor, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{dM_{z'}}{dt} = -\frac{M_{z'} - M_z^0}{T_1} \\ \frac{dM_{x'y'}}{dt} = -\frac{M_{x'y'}}{T_2} \end{cases} \quad (3.3.14)$$

Esta ecuación deriva directamente de la ecuación de Bloch en el marco rotatorio (3.2.9),

en la cual los primeros términos se hacen cero porque  $\vec{B}_{\text{eff}} = (B_0 - \omega_0/\gamma)\vec{k}'$ . Resolviendo la ecuación (3.3.14), obtenemos cómo evolucionan en el tiempo las magnetizaciones transversal y longitudinal:

$$\begin{cases} M_{x'y'}(t) = M_{x'y'}(0_+) e^{-t/T_2} \\ M_{z'}(t) = M_z^0(1 - e^{-t/T_1}) + M_{z'}(0_+) e^{-t/T_1}, \end{cases} \quad (3.3.15)$$

donde  $M_{x'y'}(0_+)$  y  $M_{z'}(0_+)$  son las magnetizaciones en el plano transversal y a lo largo del eje  $z'$  respectivamente, inmediatamente después del pulso RF; y  $M_z^0$  es, como antes, la magnetización longitudinal en el equilibrio térmico.

Un punto importante sobre esta descripción fenomenológica es que el decaimiento de la magnetización transversal y la recuperación de la magnetización longitudinal, después del pulso RF, siguen una función exponencial. Esta descripción exponencial, especialmente la relajación transversal, se aplica sólo para sistema de espines con interacción *espín-espín* débil, como es el caso de los espines de las moléculas en estado líquido. Para sólidos y macromoléculas, el mecanismo de la relajación transversal es más complicado.

Otro punto que vale la pena señalar es que  $T_1$  y  $T_2$  no están definidos como el tiempo en que las relajaciones longitudinal y transversal están completas. Para ver esto más claramente, consideremos  $T_1$  y  $T_2$  después de un pulso de  $90^\circ$ , que producirá  $M_{x'y'}(0_+) = M_z^0$  y  $M_{z'}(0_+) = 0$ . De la ecuación (3.3.15) obtenemos que

$$\begin{cases} M_{x'y'}(T_2) = M_{x'y'}(0_+) \frac{1}{e} \approx 37\% M_{x'y'}(0_+) \\ M_{z'}(T_1) = M_z^0 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 63\% M_z^0. \end{cases}$$

Por lo tanto,  $M_{z'}$  habrá recuperado el 63% del valor de equilibrio térmico después del tiempo  $T_1$ , pero  $M_{x'y'}$  habrá perdido el 63% de su valor inicial después del tiempo  $T_2$ , como muestra la figura 3.2. Los valores de  $T_1$  y  $T_2$  dependen de la composición del tejido, estructura y entorno. Para un sistema de espines dado,  $T_1$  siempre será mayor que  $T_2$ . Por ejemplo,  $T_1$  es del orden de 300 a 2000 ms, y  $T_2$  es del orden de 30 a 150 ms en tejidos biológicos.

El efecto combinado de precesión libre y relajación puede verse poniendo el vector de magnetización de vuelta en el marco de laboratorio. Específicamente, utilizando la

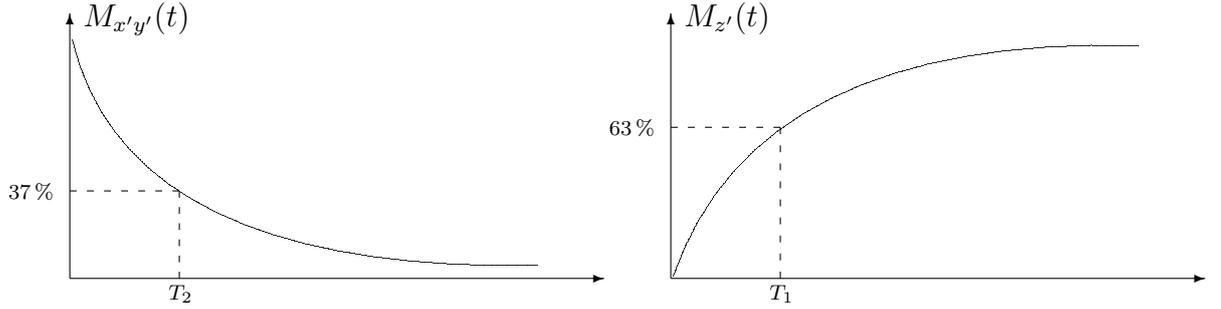


Figura 3.2: Curvas de relajación.

transformación  $M_{x'y'} = M_{xy} e^{i\omega t}$  en la ecuación 3.3.15, obtenemos:

$$\begin{cases} M_{xy}(t) = M_{xy}(0_+) e^{-t/T_2} e^{-i\omega_0 t} \\ M_z(t) = M_z^0(1 - e^{-t/T_1}) + M_z(0_+) e^{-t/T_1}, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

donde  $M_{xy}(0_+) = M_{x'y'} e^{-i\omega\tau_p}$  es la magnetización transversal “inicial” observada en el marco de laboratorio por el sistema de detección de señal. El tiempo de retraso es incluido ya que se inicializa el tiempo en cero al finalizar el pulso ( $t = \tau_p$ ) para describir los efectos de la relajación.

### 3.4. Detección de la señal

Sabemos de la discusión anterior que colocando un objeto en un campo magnético externo  $\vec{B}_0$  y estimulando este con otro campo magnético  $\vec{B}_1(t)$  alternado u oscilante, se produce un magnetismo macroscópico en forma de magnetización rotatoria en el objeto. Esto es llamado fenómeno de NMR. La siguiente pregunta es cómo detectar este magnetismo, o más específicamente, cómo convertir esta magnetización rotatoria en señal eléctrica. Abordaremos esta pregunta en esta sección. Comenzaremos con una breve revisión de los principios físicos básicos de detección de señales y, luego, describiremos los conceptos de demodulación y cuadratura.

La detección de la señal de resonancia magnética está basada en la ley de Faraday de inducción electromagnética y en el principio de reciprocidad. La ley de inducción de Faraday establece que la variación en el tiempo del flujo magnético a través de un conductor circular (una bobina receptora) inducirá en la bobina una fuerza electromagnética (o voltaje) que será proporcional al cambio del flujo magnético a través de la bobina. Existen muchos ejemplos de esta ley en la vida diaria. Los generadores de poder, que convierten la rotación mecánica de imanes permanentes en electricidad para los hogares, es uno de ellos.

En MRI, la magnetización total precesa a la radiofrecuencia y cualquier espiral conductor resonando a esa frecuencia puede ser usado como bobina receptora. En efecto, en muchos casos, la misma bobina RF es usada para la excitación y la detección. La sensibilidad de la detección por la bobina receptora está determinada por el principio de reciprocidad. Específicamente, supongamos que  $\vec{B}_r(\mathbf{r})$  es el campo magnético en el marco de laboratorio en la posición  $\mathbf{r}$  producido por una corriente que fluye en la bobina. Entonces, el flujo magnético a través la bobina es dado por:

$$\Phi(t) = \int_{\text{objeto}} \vec{B}_r(\mathbf{r}) \cdot \vec{M}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r},$$

donde  $\vec{B}_r$  es el campo magnético de recepción. De acuerdo con la ley de inducción de Faraday, el voltaje  $V$  inducido en la bobina es:

$$V(t) = -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{objeto}} \vec{B}_r(\mathbf{r}) \cdot \vec{M}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (3.4.17)$$

La ecuación (3.4.17) es la fórmula más básica en la detección de señal de MR (resonancia magnética), la cual incorpora la ley de Faraday y el principio de reciprocidad. De esta fórmula podemos determinar cuantitativamente como diversos factores en un experimento de NMR afectan la señal de MR recibida.

El término *señal* en MRI puede significar varias cosas. En algunos casos puede referirse a la magnetización transversal, a veces al voltaje inducido, y en otros al voltaje inducido después de algún proceso.

Escribamos la ecuación (3.4.17) en forma escalar:

$$V(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{objeto}} [B_{r,x}(\mathbf{r})M_x(\mathbf{r}, t) + B_{r,y}(\mathbf{r})M_y(\mathbf{r}, t) + B_{r,z}(\mathbf{r})M_z(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r}.$$

Ya que la variación de la función  $M_z$  es pequeña en comparación a la precesión libre de  $M_x$  y  $M_y$ , puede ser despreciada

$$V(t) = -\int_{\text{objeto}} \left[ B_{r,x}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} M_x(\mathbf{r}, t) + B_{r,y}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} M_y(\mathbf{r}, t) \right] d\mathbf{r}. \quad (3.4.18)$$

Aquí suponemos que  $M_x(\mathbf{r}, t)$  y  $M_y(\mathbf{r}, t)$  son lo suficientemente regulares para que se pueda aplicar el teorema de convergencia dominada.

La ecuación anterior nos muestra que el voltaje inducido es función sólo de  $M_x$  y  $M_y$ .

Esto es natural ya que se sabe que las señales de MR dependen de la magnetización transversal.

Para desarrollar esto más a fondo, escribamos  $B_{r,x}$  y  $B_{r,y}$  de la forma:

$$\begin{cases} B_{r,x} = |B_{r,xy}(\mathbf{r})| \cos(\phi_r(\mathbf{r})) \\ B_{r,y} = |B_{r,xy}(\mathbf{r})| \sin(\phi_r(\mathbf{r})), \end{cases} \quad (3.4.19)$$

donde  $\phi_r(\mathbf{r})$  es el ángulo de fase de recepción. Si el campo de recepción en la posición  $\mathbf{r}$  apunta a lo largo del eje  $x$ , entonces  $\phi_r(\mathbf{r}) = 0$ . Por otro lado, si el campo apunta en la dirección del eje  $y$ ,  $\phi_r(\mathbf{r}) = \pi/2$ . Para los demás casos,  $\phi_r(\mathbf{r})$  toma valores entre 0 y  $2\pi$ .

Para evaluar la derivada temporal de  $M_x$  y  $M_y$  en la ecuación (3.4.18), usaremos la ecuación (3.3.16), de la que obtenemos:

$$M_x(\mathbf{r}, t) = |M_{xy}(\mathbf{r}, 0)| e^{-t/T_2(\mathbf{r})} \cos(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}))$$

$$M_y(\mathbf{r}, t) = |M_{xy}(\mathbf{r}, 0)| e^{-t/T_2(\mathbf{r})} \sin(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r})),$$

donde  $\phi_e(\mathbf{r})$  es el desplazamiento de fase inicial introducido por la excitación RF. Similar a  $\phi_r(\mathbf{r})$ ,  $\phi_e(\mathbf{r})$  toma valores entre 0 y  $2\pi$  dependiendo de la dirección de  $\vec{M}_{xy}(\mathbf{r}, 0)$ . Particularmente  $\phi_e(\mathbf{r}) = 0$  si  $\vec{M}_{xy}(\mathbf{r}, 0)$  está a lo largo del eje  $x$ , y  $\phi_e(\mathbf{r}) = \pi/2$  si  $\vec{M}_{xy}(\mathbf{r}, 0)$  está a lo largo del eje  $y$ .

Por simplicidad de notación, escribiremos  $C(\mathbf{r}, t) = \omega(\mathbf{r})|M_{xy}(\mathbf{r}, 0)|e^{-t/T_2(\mathbf{r})}$ . De la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{\partial M_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = C(\mathbf{r}, t) \sin(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r})) - \frac{|M_{xy}(\mathbf{r}, 0)|}{T_2(\mathbf{r})} e^{-t/T_2} \cos(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}))$$

$$\frac{\partial M_y(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -C(\mathbf{r}, t) \cos(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r})) - \frac{|M_{xy}(\mathbf{r}, 0)|}{T_2(\mathbf{r})} e^{-t/T_2} \sin(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r})).$$

Para la mayoría de las aplicaciones, la precesión libre es mucho más rápida que la relajación, o sea,

$$\omega(\mathbf{r}) \gg \frac{1}{T_2}.$$

Por esto, el segundo término de la ecuación anterior puede ser ignorado, obteniendo:

$$\frac{\partial M_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = C(\mathbf{r}, t) \sin(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r})) \quad (3.4.20)$$

$$\frac{\partial M_y(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -C(\mathbf{r}, t) \cos(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r})). \quad (3.4.21)$$

Reemplazando la ecuaciones (3.4.19), (3.4.20) y (3.4.21) en la ecuación (3.4.18), con algunas simplificaciones, tenemos:

$$V(t) = - \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| C(\mathbf{r}, t) \sin(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}) - \phi_r(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \quad (3.4.22)$$

o

$$V(t) = - \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| C(\mathbf{r}, t) \cos\left(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}) - \phi_r(\mathbf{r}) + \frac{\pi}{2}\right) d\mathbf{r}. \quad (3.4.23)$$

La ecuación (3.4.22) (o (3.4.23)) es la expresión básica de señal que muestra explícitamente: La dependencia de la señal de voltaje detectada con la magnetización transversal en el marco de laboratorio  $M_{xy}(\mathbf{r}, 0)$ , la frecuencia de la precesión libre  $\omega(\mathbf{r})$  y la bobina receptora  $B_{r,xy}(r)$ .

La señal de voltaje  $V(t)$  es de alta frecuencia porque el vector de magnetización transversal precesa a la frecuencia de Larmor. Esto puede provocar problemas innecesarios para los circuitos electrónicos en procesos posteriores. En la práctica,  $V(t)$  se convierte en una señal de baja frecuencia usando lo que se conoce como el método *phase-sensitive detection* (PSD), o método de *demodulación de señal*. La demodulación de señal consiste en multiplicar  $V(t)$  por una sinusoidal de referencia y luego por un filtro pasabajos para remover las componentes de alta frecuencia. Tomando el ejemplo de la figura 3.3, supongamos que la sinusoidal de referencia es  $2 \cos(\omega_0 t)$ , tenemos

$$2V(t) \cos(\omega_0 t) = 2 \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| C(\mathbf{r}, t) \cos\left(-\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}) - \phi_r(\mathbf{r}) + \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega_0 t) d\mathbf{r}.$$

Si llamamos  $A(\mathbf{r}, t) = -\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}) - \phi_r(\mathbf{r}) + \pi/2$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 2V(t) \cos(\omega_0 t) &= 2 \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| C(\mathbf{r}, t) \cos(A(\mathbf{r}, t)) \cos(\omega_0 t) d\mathbf{r} \\ &= 2 \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| C(\mathbf{r}, t) \frac{\cos(A(\mathbf{r}, t) + \omega_0 t) + \cos(A(\mathbf{r}, t) - \omega_0 t)}{2} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Removiendo la primera componente a través de un filtro pasabajos, tenemos una señal de baja frecuencia, la cual es el *output* del sistema PSD. Denotando la señal como  $V_{\text{psd}}(t)$ , tenemos

$$V_{\text{psd}}(t) = \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| C(\mathbf{r}, t) \cos(A(\mathbf{r}, t) - \omega_0 t) d\mathbf{r}.$$

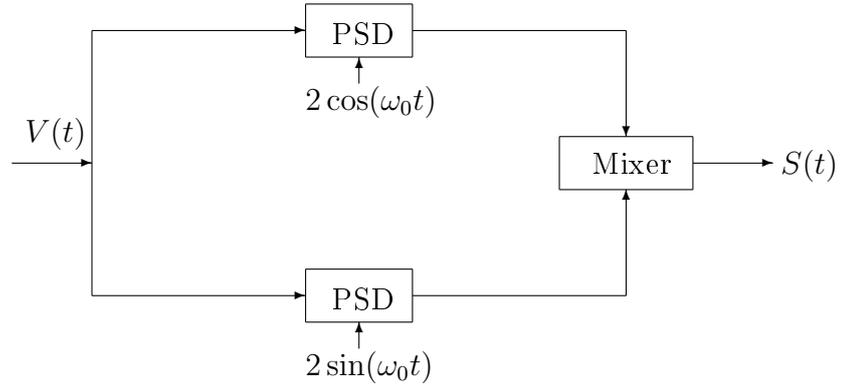
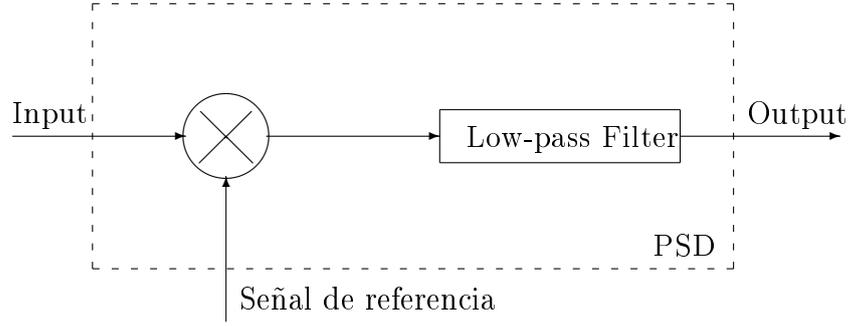


Figura 3.3: Phase-sensitive detection.

También es conveniente expresar  $\omega(\mathbf{r}) = \omega_0 + \Delta\omega(\mathbf{r})$ , donde  $\Delta\omega(\mathbf{r})$  es la dependencia espacial de la frecuencia de resonancia en el marco rotatorio. Entonces tenemos:

$$V_{\text{psd}}(t) = \int_{\text{objeto}} (\omega_0 + \Delta\omega(\mathbf{r})) |B_{r,xy}(\mathbf{r})| |M_{xy}(\mathbf{r}, 0)| e^{-t/T_2(\mathbf{r})} \times \\ \times \cos\left(-\Delta\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}) - \phi_r(\mathbf{r}) + \frac{\pi}{2}\right) d\mathbf{r}.$$

En la práctica,  $\Delta\omega(\mathbf{r}) \ll \omega_0$ , por lo que la ecuación anterior se puede simplificar a

$$V_{\text{psd}}(t) = \omega_0 \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| |M_{xy}(\mathbf{r}, 0)| e^{-t/T_2(\mathbf{r})} \times \\ \times \cos\left(-\Delta\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}) - \phi_r(\mathbf{r}) + \frac{\pi}{2}\right) d\mathbf{r} \quad (3.4.24)$$

la cual es una expresión general para señales con un PSD simple (sólo un PSD). Ya que  $\Delta\omega(\mathbf{r})$  es la frecuencia de precesión en el marco rotatorio,  $V_{\text{psd}}(t)$  a menudo se considera como la señal detectada en el marco rotatorio. Un inconveniente importante de este esquema de detección es que no se puede determinar si el isocromático está precesando en el sentido de las agujas de reloj ( $\Delta\omega > 0$ ) o en contra ( $\Delta\omega < 0$ ). Para solucionar este problema, se usa un segundo sistema PSD con una señal de referencia

de la forma  $\sin(\omega_0 t)$ , con un desplazamiento en la fase de  $90^\circ$  con respecto al anterior. Es fácil mostrar que el *output* de este sistema de detección es

$$V_{\text{psd}}(t) = \omega_0 \int_{\text{obj}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| |M_{xy}(\mathbf{r}, 0)| e^{-t/T_2(\mathbf{r})} \times \sin\left(-\Delta\omega(\mathbf{r})t + \phi_e(\mathbf{r}) - \phi_r(\mathbf{r}) + \frac{\pi}{2}\right) d\mathbf{r}. \quad (3.4.25)$$

Hasta aquí, hemos analizado la magnetización rotatoria con dos “detectores” ortogonales entre sí. Este esquema es conocido como *detección de cuadratura*, y es comúnmente usado en los sistemas modernos de MRI. Los dos *outputs* del sistema vienen usualmente en forma compleja, como muestra el segundo esquema de la figura 3.3, un *output* se toma como la parte real y el otro como la parte imaginaria.

Específicamente,

$$S(t) = S_R(t) + iS_I(t),$$

donde  $S_R(t)$  viene del *output* del primer PSD dado en por la ecuación (3.4.24) y  $S_I(t)$  viene de el *output* del segundo PSD dado por la ecuación (3.4.25). Entonces,

$$S(t) = \omega_0 \int_{\text{objeto}} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| |M_{xy}(\mathbf{r}, 0)| e^{-i(\Delta\omega(\mathbf{r})t - \phi_e(\mathbf{r}) + \phi_r(\mathbf{r}) - \pi/2)} d\mathbf{r}. \quad (3.4.26)$$

Usando la notación compleja

$$\begin{cases} B_{r,xy} = B_{r,x} + iB_{r,y} \\ M_{xy} = M_x + iM_y \end{cases}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} |B_{r,xy}(\mathbf{r})| e^{-i\phi_r(\mathbf{r})} &= B_{r,xy}^*(\mathbf{r}) \\ |M_{xy}(\mathbf{r}, 0)| e^{i\phi_e(\mathbf{r})} &= M_{xy}(\mathbf{r}, 0), \end{aligned}$$

donde  $B_{r,xy}^*$  es el complejo conjugado de  $B_{r,xy}$ . Así podemos reescribir la ecuación (3.4.26) como:

$$S(t) = \omega_0 e^{i\pi/2} \int_{\text{objeto}} B_{r,xy}^*(\mathbf{r}) M_{xy}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\Delta\omega(\mathbf{r})t} d\mathbf{r}. \quad (3.4.27)$$

Escalando por la constante  $\omega_0 e^{i\pi/2}$  la ecuación anterior, resulta la expresión

$$S(t) = \int_{\text{objeto}} B_{r,xy}^*(\mathbf{r}) M_{xy}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\Delta\omega(\mathbf{r})t} d\mathbf{r}. \quad (3.4.28)$$

Más aún, si la bobina receptora tiene un campo de recepción homogéneo sobre la

región de interés, como generalmente se asume, la expresión de la ecuación (3.4.28) se puede simplificar a

$$S(t) = \int_{\text{objeto}} M_{xy}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\Delta\omega(\mathbf{r})t} d\mathbf{r}. \quad (3.4.29)$$

Notemos que de la expresión anterior, se asume implícitamente que el objeto percibe un campo magnético estático e inhomogéneo durante el periodo de precesión libre. Expresemos la distribución del campo como:

$$B(\mathbf{r}) = B_0 + \Delta B(\mathbf{r})$$

y tenemos que  $\Delta\omega(\mathbf{r}) = \gamma\Delta B(\mathbf{r})$ , luego la ecuación (3.4.29) queda de la forma:

$$S(t) = \int_{\text{objeto}} M_{xy}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\gamma\Delta B(\mathbf{r})t} d\mathbf{r}.$$

Si el campo inhomogéneo varía con el tiempo, es decir,  $\Delta B$  es función del espacio y el tiempo, entonces todas las expresiones anteriores de la señal, deben ser modificadas. Específicamente, denotando el campo inhomogéneo como  $\Delta B(r, t)$ ,  $\Delta\omega(\mathbf{r})t$  debería ser reemplazado por  $\gamma \int_0^t \Delta B(\mathbf{r}, \tau) d\tau$ . Por ejemplo, la ecuación (3.4.27) quedaría de la forma:

$$S(t) = \omega_0 e^{i\pi/2} \int_{\text{objeto}} B_{r,xy}^*(\mathbf{r}) M_{xy}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\gamma \int_0^t \Delta B(\mathbf{r}, \tau) d\tau} d\mathbf{r}. \quad (3.4.30)$$

### 3.5. Características de la señal

En esta sección, examinaremos en detalle el tiempo de las señales de sistema de espines después del pulso de excitación. Clasificaremos estas señales en tres grandes categorías: *free induction decays* (FID), *RF echoes* y *gradient echoes*. Para cada tipo de señal, describiremos los requerimientos de excitación, características generales y expresión matemática.

Estableceremos unas suposiciones generales que tomaremos dentro de toda esta sección:

- I. Asumiremos que el pulso RF es aplicado instantáneamente, de modo que el intervalo de pulso se supondrá cero.
- II. Ignoraremos cualquier imperfección en la excitación y recepción de modo que todo desplazamiento de fase por efectos de “fuera de resonancia” y no uniformidades de  $B_r$  que interfieran la señal recibida serán omitidos. Bajo esta suposición, podemos utilizar la expresión simplificada (3.4.29). Además, por comodidad de notación,

reemplazaremos  $\Delta\omega$  por  $\omega$  de manera que ahora  $\omega$  representará la frecuencia de precesión en el marco rotatorio. En consecuencia, la ecuación (3.4.29) se puede escribir como:

$$S(t) = \int_{\text{objeto}} M_{xy}(\mathbf{r}, 0_+) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-i\omega(\mathbf{r})t} d\mathbf{r} \quad (3.5.31)$$

III. Para sistemas de espines heterogéneos, introduciremos una función  $\rho$  de densidad espectral para caracterizar esta distribución de frecuencia. Específicamente, sea  $dM(\omega)$  la magnetización total<sup>4</sup> del isocromático. Entonces:

$$dM(\omega) = \rho(\omega) d\omega$$

y

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) d\omega.$$

Teniendo  $\rho(\omega)$ , la ecuación (3.5.31) queda de la forma:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{-t/T_2(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Notemos que  $\rho(\omega)$  no es idéntica al espectro de frecuencias de  $S(t)$ . Para diferenciarlas,  $\hat{\rho}(\omega)$  representará el espectro de frecuencias de una señal. Por definición,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Por lo tanto,  $\rho(\omega) = 2\pi\hat{\rho}(\omega)$  sólo si la relajación  $T_2$  se omite.

**“Free Induction Decays”:** Viene de la acción de un solo pulso en el sistema de espines nucleares. “*Free*” hace referencia al hecho que la señal es generada por la precesión libre de la magnetización vectorial total en torno al campo  $B_0$ ; “*induction*” indica que la señal es producida en base a la ley de Faraday de inducción electromagnética; y “*decay*” por la característica de decaer la amplitud de la señal a medida que transcurre el tiempo. Matemáticamente, la señal resultante de FID de un pulso  $\alpha$  toma la forma:

$$S(t) = \sin(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{-t/T_2(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \quad t \geq 0.$$

Claramente, la función de densidad espectral determina las características de la señal FID.

---

<sup>4</sup>Por simplicidad de notación, usaremos  $M_x(\omega)$ ,  $M_y(\omega)$  y  $M_z(\omega)$  para denotar la componente de magnetización de los isocromáticos.

Dos parámetros básicos de la señal FID son la amplitud y la tasa de decaimiento. Independiente de la distribución espectral del sistema de espines, la señal FID alcanza su amplitud máxima cuando  $t = 0$ , cuyo valor es dado por

$$A_f = \sin(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\alpha) d\omega = M_z^0 \sin(\alpha).$$

Entonces, la amplitud máxima de la señal FID depende del ángulo  $\alpha$  y del valor de equilibrio térmico de la magnetización total.

**“RF Echoes”:** Una señal de eco puede generarse por múltiples pulsos RF o por un campo magnético invertido. Las señales de primer tipo son llamadas *RF echoes* y las del segundo tipo *gradient echoes*. *RF echoes* fue descubierto por Erwin L. Hahn en 1950. Desde entonces, el concepto de realinear los vectores de magnetización incoherentes, mediante pulsos RF de reorientación, ha sido ampliamente usado en varios tipos de experimentos de NMR. Como por ejemplo:

- Eco de dos pulsos: Consiste en un pulso de  $90^\circ$ , seguido de un tiempo de espera (*delay*)  $\tau$  y luego un pulso de  $180^\circ$ . El esquema de esta excitación es el siguiente

$$90^\circ - \tau - 180^\circ.$$

La señal de eco generada se llama *spin echo* (SE).

- Eco de tres pulsos: En general, hasta cinco ecos pueden generarse con una secuencia eco de tres pulsos

$$\alpha_1 - \tau_1 - \alpha_2 - \tau_2 - \alpha_3.$$

- *The CPMG Echo train*: Cuando un sistema de espines es excitado por un pulso de  $90^\circ$  seguido de una secuencia de pulsos de  $180^\circ$ , un tren de *spin echoes* puede generarse. Supongamos que el pulso de  $90^\circ$  es aplicado en el tiempo  $t = 0$  y los pulsos de  $180^\circ$  son aplicados en los tiempos  $(2n - 1)\tau$  con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Un tren de  $N$  ecos se formará con una amplitud ponderada por

$$E_n = e^{-2n\tau/T_2}.$$

**“Gradient Echoes”:** Otra forma de señal del eco comúnmente usada en MRI es generada usando gradientes de campos magnéticos que varían en el tiempo. Tal eco se conoce como *gradient echo*, para distinguirlo de un *spin echo* o un *stimulated echo*.

La clave fundamental de la formación de *gradient echo* es que el gradiente de campo puede desfasar y refasar<sup>5</sup> la señal de una forma controlada de modo que una o varias señales de ecos puedan ser creadas. Para entender este mecanismo, primero vamos a formalizar la definición de gradiente de campo.

**Definición 3.5.1.** *Un gradiente de campo  $\vec{B}_G$  en el contexto de MRI es un tipo especial de campo inhomogéneo cuya componente  $z$  varía linealmente a lo largo de una dirección específica llamada dirección gradiente. Particularmente,  $\vec{B}_G$  es llamado gradiente de campo en  $x$  si*

$$B_{G,z} = G_x x \quad (3.5.32)$$

*y  $G_x$  es el gradiente en  $x$ . De manera similar,  $\vec{B}_G$  es denominado gradiente de campo en  $y$  si*

$$B_{G,z} = G_y y \quad (3.5.33)$$

*o gradiente de campo en  $z$  si*

$$B_{G,z} = G_z z. \quad (3.5.34)$$

El sistema de gradiente consiste en tres bobinas de gradiente denominadas como: bobina de gradiente  $x$ , bobina de gradiente  $y$  y bobina de gradiente  $z$ , que respectivamente producen los gradientes de campo en el eje  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Es importante notar que en cada caso, el campo magnético producido por la bobina gradiente también tiene componentes en la dirección  $x$  ( $B_{G,x}$ ) y además en  $y$  ( $B_{G,y}$ ). Sin embargo, estas componentes normalmente son ignoradas por la intensidad del campo  $B_0$  en la dirección  $z$ . Por esta razón,  $B_{G,z}$  normalmente es llamado sólo gradiente de campo, y  $B_{G,z}$  y  $B_G$  son usados indistintamente cuando no hay peligro de confusión.

Para poder entender esto, el campo magnético global en presencia del gradiente de campo en la región de interés se puede expresar como

$$\vec{B} = (B_0 + B_{G,z})\vec{k},$$

donde  $B_{G,z}$  es como en (3.5.32), (3.5.33) o (3.5.34) cuando una de las bobinas de gradiente está activada. Cuando las tres bobinas están activadas simultáneamente,  $B_{G,z} = G_x x + G_y y + G_z z$  y en consecuencia

$$\vec{B} = (B_0 + G_x x + G_y y + G_z z)\vec{k}.$$

---

<sup>5</sup>Aunque no es correcto para la lengua castellana, es parte la de terminología usada en MRI.

Los tres gradientes a menudo se agrupan en un vector  $\vec{G}$  tal que

$$\vec{G} = (G_x, G_y, G_z) = G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k}$$

y la dirección de  $\vec{G}$  es llamada *dirección de gradiente* de  $\vec{B}_G$  o  $\vec{B}$ .

Es importante conocer la diferencia entre la dirección gradiente de  $B_{G,z}$  y la dirección del gradiente de campo mismo. Aunque  $\vec{G}$  puede apuntar a lo largo de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  o de una dirección arbitraria, activando  $G_x$ ,  $G_y$  y  $G_z$  individualmente o simultáneamente, la dirección de  $B_G$  usualmente es desconocida e irrelevante.

Para ver como se forman los *gradient echoes*, por simplicidad consideremos una secuencia de pulso de la siguiente forma: Después de la aplicación del pulso RF de  $\alpha$  grados (*gradient echo* se usa comúnmente en combinación con excitaciones en ángulos pequeños de inclinación para imágenes rápidas), un gradiente en  $x$  negativo es activado. Como resultado, los espines en las diferentes posiciones de  $x$  adquieren diferentes fases, y esto se puede expresar en el marco rotatorio de la siguiente forma:

$$\phi(x, t) = \gamma \int_0^t -G_x x \, d\hat{t} = -\gamma G_x x t \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

La ecuación anterior indica que la pérdida de fase de coherencia se vuelve progresivamente mayor, a medida que pasa el tiempo, después del pulso de excitación. Después del tiempo que la señal decae a cero, si se aplica un gradiente de la misma magnitud, pero ahora positivo, la magnetización transversal comienza gradualmente a refasarse, resultando una reaparición de la señal. Específicamente, el ángulo de fase en marco rotatorio ahora es dado por:

$$\phi(x, t) = -\gamma G_x x \tau + \gamma \int_\tau^t G_x x \, d\hat{t} = -\gamma G_x x \tau + \gamma G_x x (t - \tau) \quad \tau \leq t \leq 2\tau.$$

La dispersión en la fase producida por el gradiente negativo se reduce gradualmente después que el gradiente positivo es activado en el tiempo  $\tau$ . Pasado este tiempo, la fase  $\phi$  llega a cero, lo que indica que los espines han sido refasados, y por lo tanto la señal de eco ha sido formada.

### 3.6. Localización de la señal

Basado en las secciones anteriores, sabemos como obtener una señal de MR de un objeto. De hecho, el protocolo experimental es relativamente simple: se ubica el objeto

en el campo magnético uniforme y luego es excitado con otro campo oscilante a la frecuencia de resonancia. La señal generada, es la suma de señales “locales” de todas las partes del objeto. Para un objeto espacialmente homogéneo, esta señal es todo lo que se necesita, ya que las señales locales son las mismas independiente del lugar espacial que provengan. En la práctica el objeto con el que trabajamos es heterogéneo, y se hace necesario identificar las señales locales según la posición del objeto que provienen. Esta sección se aboca en la localización espacial de estas señales.

Básicamente, hay dos métodos de localización espacial: *excitación selectiva* y *codificación espacial*. Principalmente estos dos métodos se basan en el uso de gradientes de campo. Los sistemas modernos de MRI proveen tres gradientes ortogonales cuyas formas pueden ajustarse independientemente.

**Selección del slice:** La selección del *slice*<sup>6</sup> es quizás el más simple pero también el más popular método de excitación selectiva usado en MRI. Para la excitación selectiva de espines en un slice, hay dos cosas esenciales:

- El gradiente de campo.
- La forma del pulso RF.

Matemáticamente, en un objeto tridimensional un slice puede definirse por la siguiente desigualdad:

$$|\vec{\mu}_s \cdot \mathbf{r} - s_0| < \frac{\Delta s}{2},$$

donde  $\vec{\mu}_s$  especifica la orientación del slice,  $\Delta s$  es el grosor del slice medido en la dirección de  $\vec{\mu}_s$ , y  $s_0$  es la distancia del slice al origen (como muestra la figura 3.4). Tengamos en cuenta que la dirección del slice se define ortogonalmente a este. En algunos casos, cuando no es necesario especificar el grosor explícitamente, la ecuación se puede expresar de la forma:

$$\vec{\mu}_s \cdot \mathbf{r} = s_0.$$

Tres casos especiales de selección de slice a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , se ilustran en la figura 3.5. Las cuales corresponden a las respectivas ecuaciones:

$$|x - x_0| < \frac{\Delta x}{2} \quad o \quad x = x_0$$

$$|y - y_0| < \frac{\Delta y}{2} \quad o \quad y = y_0$$

---

<sup>6</sup>Sección del cuerpo que se obtendrá la imagen.

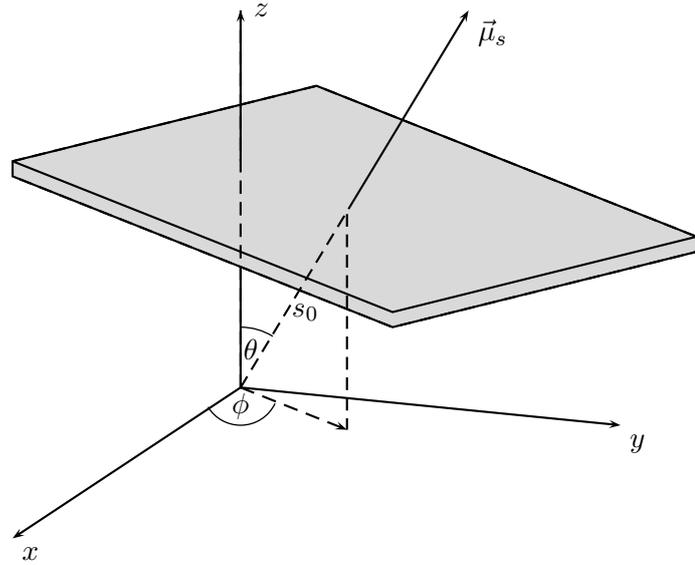


Figura 3.4: Parámetros que caracterizan un slice en una dirección arbitraria.

$$|z - z_0| < \frac{\Delta z}{2} \quad \text{o} \quad z = z_0.$$

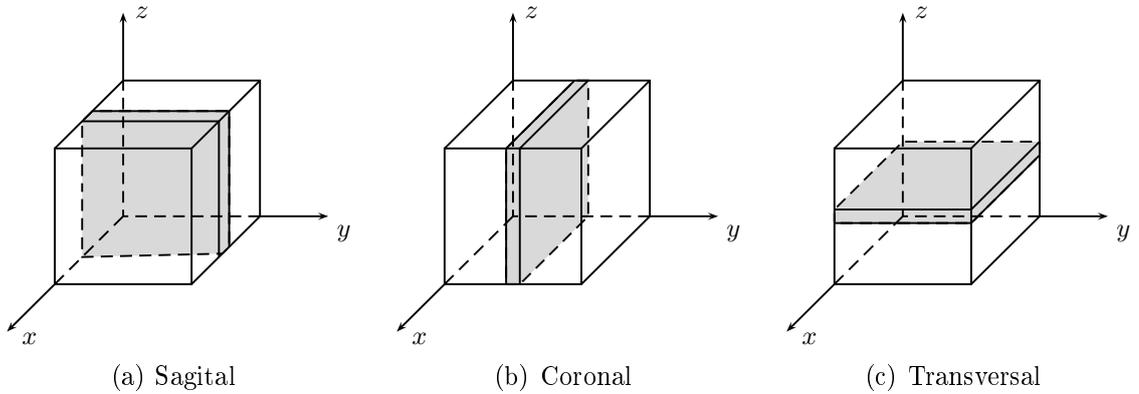


Figura 3.5: Selección de slice en la dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

La necesidad de activar un gradiente de campo durante el periodo de excitación en que se selecciona el slice, es debido a que el pulso RF sólo puede estar a la frecuencia selectiva (del slice), y espines en diferente posición espacial se excitarán por igual si resuenan a la misma frecuencia. Por lo tanto, para hacer el pulso RF selectivo espacialmente, es necesario hacer la resonancia del espín dependiente de la posición, o más deseablemente, que varíe linealmente a lo largo de la dirección del slice seleccionado ( $\vec{\mu}_s$ ). Un camino, simple pero efectivo, para lograr esto es aumentar el campo homogéneo  $B_0$  con un gradiente lineal durante el periodo de excitación. Tal gradiente es llamado *gradiente selección de slice* para distinguirlo de los gradientes de *codificación*

en fase o *codificación en frecuencia* que se introducirán posteriormente.

Después del gradiente de selección de slice, el siguiente paso es transformar la frecuencia de selección establecida por el gradiente de selección de slice a una señal de onda dependiente del tiempo de pulso RF. Recordemos de la sección 3.2 que la amplitud modulada del pulso RF se caracteriza por la frecuencia  $\omega_{\text{rf}}$  y la función envolvente  $B_1^e$  como<sup>7</sup>:

$$B_1(t) = B_1^e(t) e^{-i\omega_{\text{rf}}t}.$$

Entonces, la pregunta es cómo elegir  $B_1^e$  y  $\omega_{\text{rf}}$ .

**Codificación de la información espacial:** Después que la señal ha sido activada por el pulso, selectivo o no selectivo, información espacial puede ser codificada durante el periodo de precesión libre. Ya que la señal de MR tiene forma de una exponencial compleja, esencialmente tenemos dos formas de codificación espacial: *codificación en frecuencia* y *codificación en fase*.

- **Codificación en frecuencia:** Como el nombre lo dice, hace que la frecuencia de oscilación de la señal de MR activa sea linealmente dependiente de la posición. El principio físico usado para realizar esto es bastante simple. Consideremos primero un objeto idealizado, unidimensional, con una distribución de espines  $\rho(x)$ . Si el campo magnético que el objeto experimenta después de la excitación, es el campo homogéneo  $B_0$  más un gradiente lineal  $G_x x$ , la frecuencia de Larmor en la posición  $x$  será:

$$\omega(x) = \omega_0 + \gamma G_x x.$$

Correspondientemente, la señal de FID generada localmente de los espines en un intervalo infinitesimal  $dx$ , omitiendo el efecto de la relajación transversal, es

$$dS(x, t) \propto \rho(x) dx e^{-i\gamma(B_0 + G_x x)t},$$

donde la constante de proporcionalidad depende del ángulo de inclinación de la magnetización o *flip angle*  $\alpha$ , del campo magnético principal  $B_0$ , y otros. Por conveniencia de notación, omitiremos la constante de escalamiento y reescribiremos la ecuación anterior como

$$dS(x, t) = \rho(x) dx e^{-i\gamma(B_0 + G_x x)t}. \quad (3.6.35)$$

La señal en la ecuación (3.6.35) se conoce como *frecuencia codificada* porque su

---

<sup>7</sup>El ángulo de fase inicial del pulso RF no afecta la frecuencia selectiva si es constante.

frecuencia de oscilación  $\omega(x) = \gamma(B_0 + G_x x)$  es lineal con respecto a su posición espacial. Por esta misma razón,  $G_x$  se conoce como *gradiente de frecuencia codificada*. La señal recibida de todo el objeto en presencia del gradiente es:

$$S(t) = \int_{\text{objeto}} dS(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i\gamma(B_0 + G_x x)t} dx = e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i\gamma G_x x t} dx.$$

Después de la demodulación (esto es, removiendo la señal  $e^{-i\omega_0 t}$ ), tenemos

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i\gamma G_x x t} dx. \quad (3.6.36)$$

El efecto de  $G_x$  en la frecuencia de las señales locales de MR se ilustra en la figura 3.6. Como se puede ver de este ejemplo, la codificación del gradiente de campo, asigna diferentes frecuencias a las señales locales, y gradualmente lleva las señales fuera de su fase de coherencia.

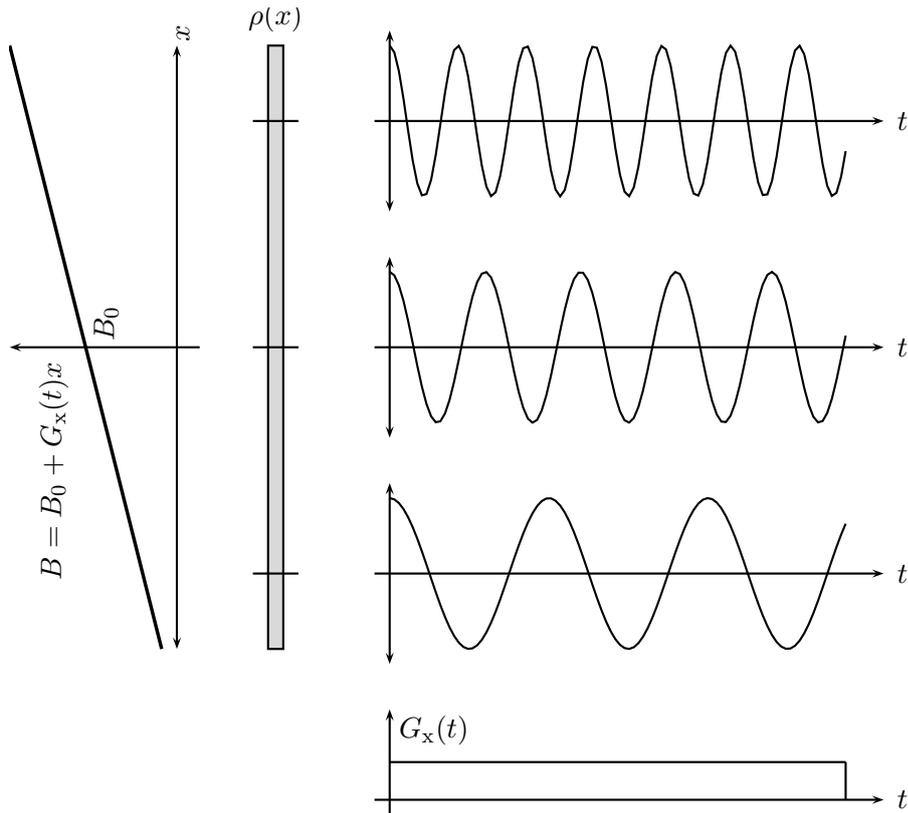


Figura 3.6: Señal localizada de un objeto hipotético unidimensional en presencia de un gradiente de codificación.

Este análisis puede generalizarse. Específicamente, se puede mostrar que la señal FID recibida codificada en frecuencia después de la demodulación es, en general,

dada por:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\gamma G_{fe} \mathbf{r} t} d\mathbf{r}, \quad (3.6.37)$$

donde  $G_{fe}$  es el gradiente de codificación definido por  $G_{fe} = (G_x, G_y, G_z)$ . Similar a la ecuación (3.6.37), la señal general de eco codificada en frecuencia, puede expresarse como:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\gamma G_{fe} \mathbf{r} (t - T_E)} d\mathbf{r}. \quad (3.6.38)$$

Una pregunta importante surge de las ecuaciones (3.6.37) y (3.6.38): ¿Se podrá asignar a cada punto en el espacio una única frecuencia activando  $G_x$ ,  $G_y$  y  $G_z$  simultáneamente? La respuesta a esta pregunta es *no*. Para argumentar esta respuesta ver [4, sección 5.2.1].

- Codificación en fase: Comenzaremos de nuevo con el caso unidimensional. Supongamos que, después del pulso RF, se activa el gradiente  $G_x$  por un intervalo pequeño  $T_{pe}$  y luego se apaga. La señal local bajo la influencia de este gradiente es

$$dS(x, t) = \begin{cases} \rho(x) e^{-i\gamma(B_0 + G_x x)t} & 0 \leq t \leq T_{pe} \\ \rho(x) e^{-i\gamma G_x x T_{pe}} e^{-i\gamma B_0 t} & T_{pe} \leq t. \end{cases}$$

Es claro que durante el intervalo  $0 \leq t \leq T_{pe}$ , la señal local es codificada en frecuencia. Como resultado de esta codificación, las señales tienen diferentes fases para cada posición  $x$  hasta el tiempo  $T_{pe}$ , como se muestra en la figura 3.7. Por lo tanto, si usamos el primer intervalo de tiempo como *periodo preparatorio*, la señal medida posteriormente tendrá una fase para posición  $x$

$$\phi(x) = -\gamma G_x x T_{pe}.$$

Ya que  $\phi$  es lineal en relación con la posición espacial de la señal, la llamaremos *codificación en fase*. Por la misma razón,  $G_x$  se denomina como gradiente de codificación en fase y  $T_{pe}$  como intervalo de codificación en fase.

La codificación en fase también puede realizarse a lo largo de una dirección arbitraria para objetos tridimensionales, activando  $G_x$ ,  $G_y$  y  $G_z$  simultáneamente durante el periodo de codificación. En este caso, el gradiente de codificación en fase sería  $G_{pe} = (G_x, G_y, G_z)$  para  $0 \leq t \leq T_{pe}$ . El ángulo de fase inicial es dado por:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\gamma G_{pe} \cdot \mathbf{r} T_{pe}.$$

Como en el caso de codificación en frecuencia, la señal recibida es la suma de todas las codificaciones locales en fase y viene dado por:

$$\int_{\text{objeto}} dS(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega_0 t} \int_{\text{objeto}} \rho(\mathbf{r}) e^{-iG_{\text{pe}} \cdot \mathbf{r} T_{\text{pe}}} d\mathbf{r}, \quad (3.6.39)$$

donde la señal  $e^{-i\omega_0 t}$  se puede remover después de una demodulación.

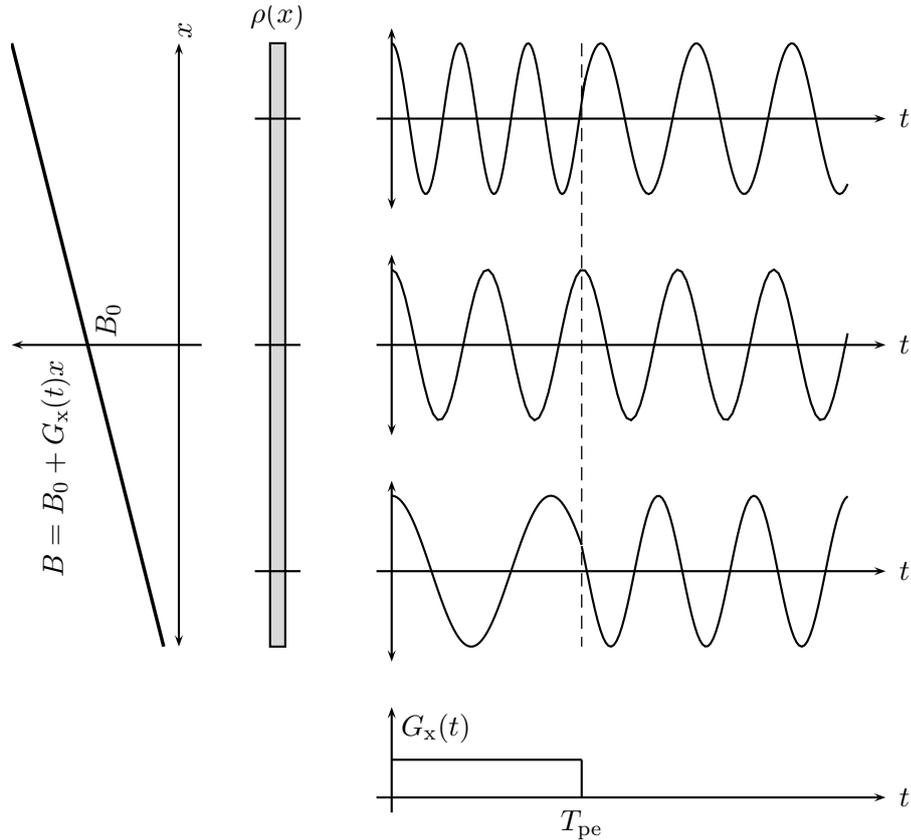


Figura 3.7: Fase codificada en un objeto.

*Observación 3.6.1. Notemos que la codificación de la fase se obtiene por una previa codificación en la frecuencia durante un corto tiempo  $T_{\text{pe}}$ , ver figura 3.7.*

# Capítulo 4

## Reconstrucción

### 4.1. $k$ espacio

En esta sección estableceremos una conexión entre la codificación espacial (codificación en fase y frecuencia) y la transformada de Fourier. Esta conexión nos permite describir un esquema de imágenes complejas, usando la notación del  $k$  espacio.

Primero consideremos la señal codificada en frecuencia dada en la ecuación (3.6.36). Además, de la transformada de Fourier podemos obtener la siguiente relación:

$$S(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i2\pi k_x x} dx.$$

Con un simple cambio de variables,

$$k_x = \begin{cases} \gamma G_x t & \text{señal FID} \\ \gamma G_x (t - T_E) & \text{señal de eco.} \end{cases}$$

Es claro que el rol del gradiente de codificación en frecuencia  $G_x$  es para mapear la señal temporal en una señal en el  $k$  espacio. En el caso extremo que  $G_x = 0$ , el gráfico es trivial, ya que todos los puntos de la señal temporal se ubican en un mismo punto del  $k$  espacio, esto es  $k_x = 0$ . Si  $G_x \neq 0$ , la señal tendrá un mapeo no trivial en el  $k$  espacio. En otras palabras, el gradiente de codificación en frecuencia, codifica la información espacial inequívocamente.

Cuando se usan múltiples gradientes para la codificación en frecuencia, la relación

de mapeo entre  $t$  y  $k$  es dado por:

$$\mathbf{k} = \begin{cases} \gamma \mathbf{G}_{\text{fe}} t & \text{señal FID} \\ \gamma \mathbf{G}_{\text{fe}}(t - T_E) & \text{señal de eco} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

y la correspondiente señal del  $k$  espacio, de acuerdo a la ecuación (3.6.37), es:

$$S(\mathbf{k}) = \int_{\text{objeto}} \rho(\mathbf{r}) e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (4.1.2)$$

El  $k$  espacio coordenado de estos puntos, define lo que se llama *trayectoria de muestreo*. En el caso bidimensional, por ejemplo la trayectoria de muestreo de una señal FID, de acuerdo con la ecuación (4.1.1), se define como:

$$\begin{cases} k_x = \gamma G_x t \\ k_y = \gamma G_y t \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} k_x = k \cos(\phi) \\ k_y = k \sin(\phi), \end{cases} \quad (4.1.3)$$

donde  $k = \gamma G_{\text{fe}} t = \gamma t \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$  y  $\psi = \tan^{-1}(G_y/G_x)$ . La ecuación (4.1.3) define una línea recta que parte en el origen del  $k$  espacio, como muestra la figura 4.1(a). La orientación de la línea es ajustable seleccionando diferentes valores de  $G_x$  y  $G_y$ . Para la señal de eco,

$$\begin{cases} k_x = \gamma G_x(t - T_E) \\ k_y = \gamma G_y(t - T_E), \end{cases}$$

que corresponde a la línea recta que pasa por el origen del  $k$  espacio, como se muestra en la figura 4.1(b).

Todo esto puede extenderse a tres dimensiones:

$$\begin{cases} k_x = k \sin(\theta) \cos(\phi) \\ k_y = k \sin(\theta) \sin(\phi) \\ k_z = k \cos(\theta), \end{cases}$$

donde

$$k = \begin{cases} \gamma t \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} & \text{señal FID} \\ \gamma(t - T_E) \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} & \text{señal de eco,} \end{cases}$$

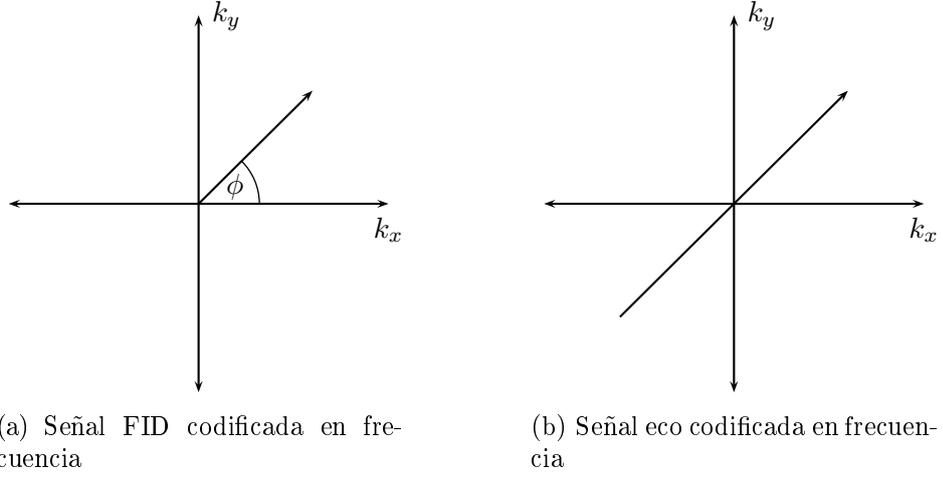


Figura 4.1: Trayectorias de muestreo en el  $k$  espacio.

$$\theta = \tan^{-1} \left( \sqrt{G_x^2 + G_y^2} / G_z \right) \text{ y } \phi = \tan^{-1} (G_y / G_x).$$

Notemos que la trayectoria de muestreo del  $k$  espacio de una señal codificada en frecuencia es una línea recta sólo si se usan gradientes constantes para la codificación. Si  $\mathbf{G}_{fe}$  es una función del tiempo, la relación de mapeo entre  $t$  y  $\mathbf{k}$  debería escribirse como:

$$\mathbf{k}(t) = \gamma \int_0^t \mathbf{G}_{fe}(\tau) d\tau,$$

donde el tiempo inicial corresponde al instante que la excitación RF es apagada. Por lo tanto, la señal puede atravesar el  $k$  espacio de forma lineal o no lineal, dependiendo de la forma del gradiente de codificación en frecuencia  $\mathbf{G}_{fe}$ .

Como la codificación en frecuencia, el efecto de la codificación en fase también puede describirse por la transformada de Fourier. Específicamente, podemos expresar la señal codificada en fase de la ecuación (3.6.39) como:

$$S(\mathbf{k}) = \int_{\text{objeto}} \rho(\mathbf{r}) e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (4.1.4)$$

obviando la señal portadora  $e^{-i\omega_0 t}$  y suponiendo que  $\mathbf{k} = \gamma \mathbf{G}_{pe} T_{pe}$ . Notemos que  $S$ , como función de  $\mathbf{k}$ , tiene la misma forma para la codificación en fase y frecuencia, como se muestra en la ecuaciones (4.1.4) y (4.1.2). Sin embargo, en un tiempo dado, la señal es mapeada diferentemente en el  $k$  espacio por la codificación en fase y frecuencia. Específicamente,  $\mathbf{k}$  toma un valor fijo para  $G_{pe}$  y  $T_{pe}$  dados en la codificación en fase, mientras que  $\mathbf{k}$  siempre es una función del tiempo en la codificación de frecuencia. Por lo tanto, la codificación en fase influye sólo en el punto inicial, pero no en la forma de

la trayectoria del  $k$  espacio.

En el caso general que  $\mathbf{G}_{pe}$  es una función del tiempo,  $\mathbf{k}$  es de la forma:

$$\mathbf{k} = \gamma \int_0^{T_{pe}} \mathbf{G}_{pe}(\tau) d\tau.$$

Por lo tanto, si el área bajo el pulso gradiente tiene el mismo valor, el tipo y la forma del pulso gradiente de codificación en fase no es importante en lo que concierne al mapeo del  $k$  espacio. Para entender mejor este punto, consideremos tres gradientes como se muestra en la figura 4.2. En el primer caso 4.2(a),

$$k_x = \gamma \left[ \int_0^1 \tau d\tau + \int_1^2 d\tau + \int_2^3 (3 - \tau) d\tau \right] = 2\gamma.$$

Es fácil ver que que  $k_x = 2\gamma$  para el segundo 4.2(b) y tercer 4.2(c) caso. Por lo tanto, los tres tipos de gradientes tienen el mismo efecto de codificación. Notemos que los tres pulsos tienen el mismo valor máximo de gradiente, pero el trapezoidal y triangular son más suaves y más duraderos que el pulso rectangular. Durante el periodo de codificación en fase,  $k_x$  va desde  $k_x = 0$  hasta  $k_x = 2\gamma$  a diferentes velocidades para diferentes formas de gradientes. Específicamente, ya que

$$\frac{dk_x(t)}{dt} = \gamma G_x(t)$$

$k_x$  va desde el origen hasta el valor requerido de codificación en fase a velocidad constante en presencia de un gradiente constante, pero a velocidad variable en todos los otros casos.

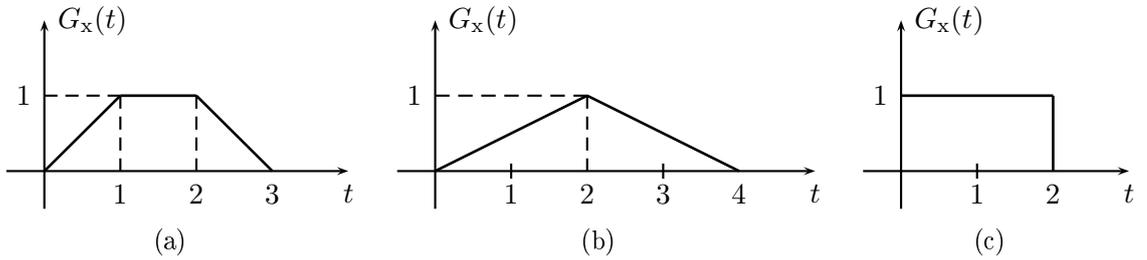


Figura 4.2: Tres pulsos gradientes usados para la codificación en fase.

## 4.2. Muestreo en el $k$ espacio

Primero vamos a establecer unas definiciones sobre señales de ancho de banda acotado.

**Definición 4.2.1.** Una señal  $g$  que depende del tiempo, se dice limitada en tiempo, si  $g(t) = 0$  para  $t > T$ , donde  $T$  es un número finito.

**Definición 4.2.2.** Una señal  $g$  que depende del tiempo, se dice limitada en banda (frecuencia), si el espectro de frecuencia  $\{\mathcal{F}g\}(f)$  es cero para  $|f| > f_{\max}$ , con  $f_{\max}$  el ancho de banda.

**Definición 4.2.3.** Una señal  $g$  que depende de la posición, se dice limitada en espacio, si  $g(x) = 0$  para  $|x| > W$ .

**Definición 4.2.4.** Una señal  $g$  que depende de la posición, se dice limitada en banda (frecuencia), si el espectro de frecuencia  $\{\mathcal{F}g\}(k)$  es cero para  $|k| > k_{\max}$ , con  $k_{\max}$  el ancho de banda.

El teorema de muestreo de Shannon establece que una función limitada en banda puede ser reconstruida perfectamente de su muestreo, si este es tomado uniformemente en intervalos que no excedan el inverso de dos veces el ancho de banda. Más específicamente, sea  $g$  una señal de ancho de banda  $f_{\max}$ , entonces el muestreo debe ser

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_{\max}} \quad \text{o} \quad f_s = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_{\max},$$

el cual es conocido como *criterio de muestreo de Nyquist*. El intervalo más largo permitido por el criterio de Nyquist es  $\Delta t = 1/2f_{\max}$ , y es llamado *intervalo de Nyquist*. Equivalentemente  $f_s = 2f_{\max}$  es conocido como *frecuencia de Nyquist*, que es la tasa mínima requerida para recuperar exactamente  $g$ .

Sean  $g(n\Delta t)$  los valores del muestreo de  $g(t)$ , con  $\Delta t$  cumpliendo el criterio de Nyquist. Entonces,  $g(t)$  puede ser reconstruida de  $g(n\Delta t)$  usando la siguiente fórmula de interpolación:

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) \operatorname{sinc}(\pi f_s(t - n\Delta t)), \quad (4.2.5)$$

como se muestra en la figura 4.3 (para una definición de la función sinc ver ecuación (5.1.7)). También es fácil mostrar que la ecuación (4.2.5) puede ser escrita en términos del ancho de banda de la señal

$$g(t) = \frac{2f_{\max}}{f_s} \sum_{-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) \operatorname{sinc}(2\pi f_{\max}(t - n\Delta t)).$$

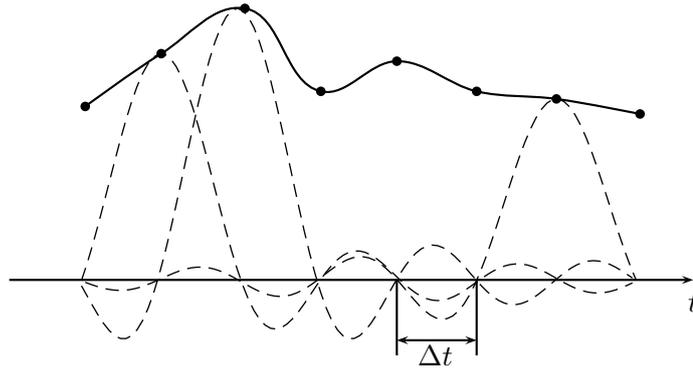


Figura 4.3: Ilustración de la reconstrucción de una función continua desde su muestreo por medio de funciones sinc con peso.

Es conocido que una función periódica que satisface las condiciones de Dirichlet puede ser escrita en términos de una serie de Fourier. Si además esta función periódica es de ancho de banda limitado, la serie de Fourier tiene una cantidad finita de términos no nulos. Consideremos la serie de Fourier siguiente:

$$g(t) = \sum_{-N}^N c_n e^{-i2\pi nt/T}.$$

Claramente,  $g$  es periódica de periodo  $T$  y su ancho de banda es  $N/T$ . Ya que  $g$  queda únicamente definida por  $2N + 1$  coeficientes, se espera que con un muestreo de  $2N + 1$  datos tomados en un sólo periodo sea suficiente para una única reconstrucción de  $g$ . Por lo tanto, el criterio de Nyquist en este caso sería de la forma:

$$\Delta t \leq \frac{T}{2N + 1}.$$

Supongamos que se adquieren  $N_s \geq 2N + 1$  muestras de  $g(t)$  en intervalos de  $\Delta t = T/N_s$ . Entonces  $g$  puede reconstruirse de este conjunto de muestreo usando la siguiente fórmula de interpolación:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N_s-1} g(n\Delta t) \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{T}(2N + 1)(t - n\Delta t) \right]}{N_s \sin \left[ \frac{\pi}{T}(t - n\Delta t) \right]}.$$

El muestreo del  $k$  espacio es un problema de muestreo multidimensional. En la práctica, se tratan las muestras a lo largo de cada dimensión por separado, así reduciéndolo a un problema de muestreo unidimensional. El patrón de muestreo resultante no es óptimo; sin embargo, garantiza una reconstrucción “perfecta” en base a la señal continua del  $k$  espacio. Por lo tanto se adopta este tratamiento para determinar los requerimientos de muestreo en la adquisición de datos de MRI para dos populares esquemas:

- Muestreo rectangular.
- Muestreo polar.

Aquí consideraremos sólo el caso de imágenes bidimensionales, siendo fácilmente extensible a dimensiones superiores en caso de ser necesario.

Primero consideremos el caso de muestreo rectangular. Supongamos que el objeto del cual se obtendrá la imagen está acotado por un rectángulo de  $W_x \times W_y$ , como muestra la figura 4.4(a). De acuerdo con el teorema de muestreo se tiene

$$\Delta k_x \leq \frac{1}{W_x} \quad y \quad \Delta k_y \leq \frac{1}{W_y}. \quad (4.2.6)$$

Supondremos además que la codificación en frecuencia es en dirección del eje  $x$  y la codificación en fase a lo largo del eje  $y$ . Entonces:

$$\begin{cases} \Delta k_x = \gamma |G_x| \Delta t \\ \Delta k_y = \gamma \Delta G_y T_{pe}, \end{cases} \quad (4.2.7)$$

donde  $G_x$  es el gradiente de codificación en frecuencia,  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo para lectura de muestreo,  $\Delta G_y$  es el tamaño del paso del gradiente de codificación en fase y  $T_{pe}$  es el intervalo de codificación en fase.

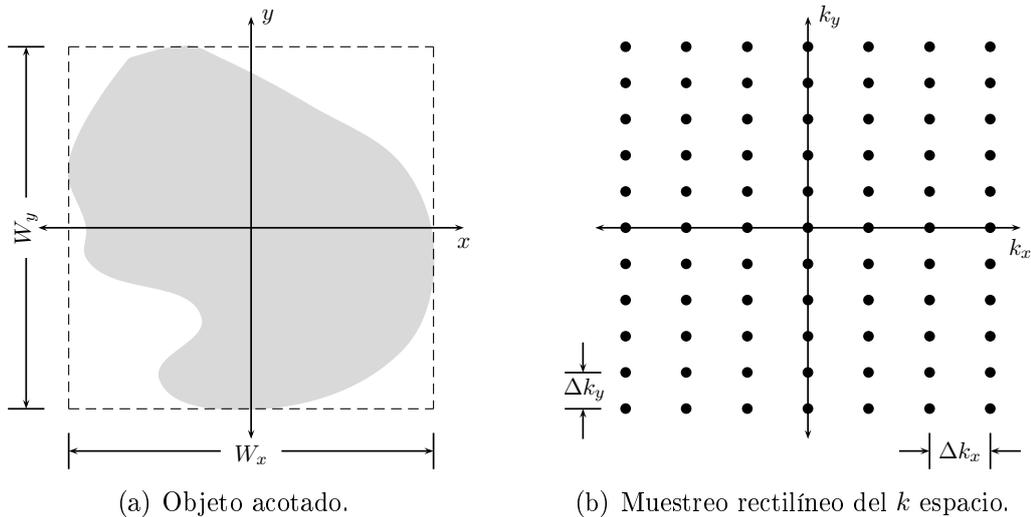


Figura 4.4: Ilustración de un objeto acotado por un rectángulo de  $W_x \times W_y$  y el muestreo en el  $k$  espacio.

Reemplazando la ecuación (4.2.7) en (4.2.6), y obtenemos los siguientes requeri-

mientos en los parámetros de adquisición:

$$\begin{cases} \Delta t \leq \frac{2\pi}{\gamma |G_x| W_x} \\ \Delta G_y \leq \frac{2\pi}{\gamma T_{pe} W_y} \end{cases}$$

Ahora consideraremos el caso de muestreo polar. En este esquema, hay dos parámetros de adquisición esenciales:  $\Delta k$  y  $\Delta\phi$ . Para obtener las condiciones para estos parámetros, se hacen dos suposiciones estándar:

(a) Acotado en espacio (figura 4.5(a)):

$$\rho(x, y) = 0 \quad \text{para} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \geq R_x. \quad (4.2.8)$$

(b) Acotado en frecuencia (figura 4.5(b)):

$$S(k_x, k_y) = \mathcal{F}\rho = 0 \quad \text{para} \quad \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \geq R_k. \quad (4.2.9)$$

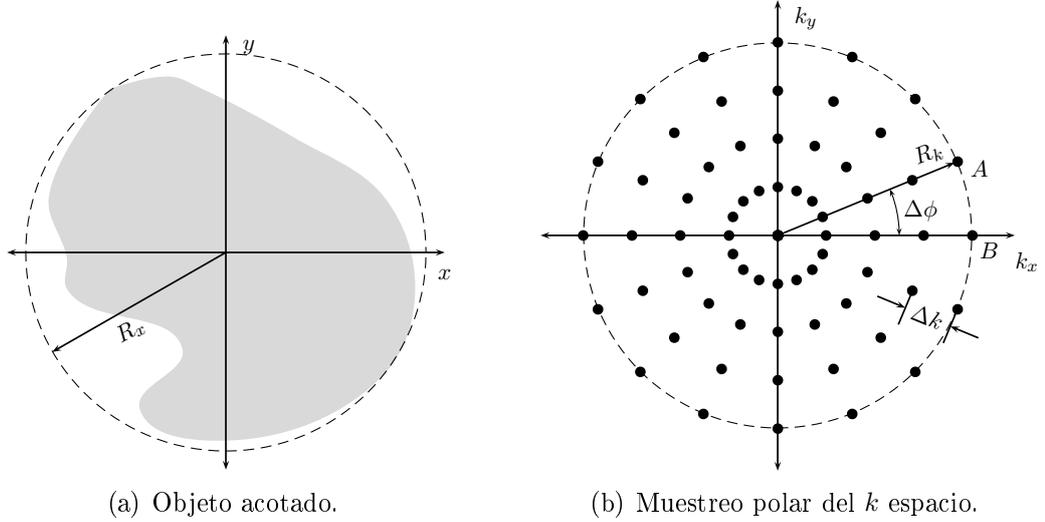


Figura 4.5: Ilustración de un objeto acotado por un círculo de radio  $R_x$  y el muestreo en el  $k$  espacio.

La primera suposición es válida ya que los objetos utilizados son acotados. La segunda suposición es solamente una aproximación ya que una función no puede ser acotada en espacio y frecuencia al mismo tiempo. Sin embargo, esta suposición es necesaria para que se requieran un mínimo de muestras a lo largo de la dirección  $\phi$ .

Con la suposición (a), el requerimiento de muestreo a lo largo de la dirección  $k$  para cada  $\phi$  se obtiene fácilmente. Específicamente, se puede mostrar que:

$$\Delta k = \gamma G \Delta t \leq \frac{1}{2R_x}$$

o

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\gamma G R_x},$$

donde  $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ .

Determinar el mínimo de muestras necesarias en la dirección  $\phi$  es más complicado que para la dirección  $k$ . Debido a que  $S_p(k, \phi)$  es periódica en  $\phi$  para un  $k$  dado, podemos expresar esto en términos de la serie de Fourier

$$S_p(k, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(k) e^{-in\phi}, \quad (4.2.10)$$

con

$$c_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_p(k, \phi) e^{in\phi} d\phi.$$

El intervalo  $\Delta\phi$  de muestreo angular más grande permitido para  $S_p$  es determinado por el número de términos significativos en la serie de Fourier en la ecuación (4.2.10). Para objetos con simetría circular,  $S_p(k, \phi)$  es constante en  $\phi$  y la serie tendrá sólo un término. En general, el número de términos significativos aumenta con  $|k|$ . Se conoce un resultado que establece que  $S_p(k, \phi)$  es limitado en banda por  $R_x 2\pi|k| + 1$  con respecto a  $\phi$ . En otras palabras, los coeficientes  $c_n(k)$  de la serie de Fourier en la ecuación (4.2.10) no son significativos para  $|n| > [2\pi R_x R_k] + 1$  (donde  $[x] = n$ , donde  $n$  es el mínimo entero tal que  $n \geq x$ ). Basado en la suposición de ser limitado en frecuencia, ecuación (4.2.9), se puede ignorar  $c_n$  para cualquier valor de  $k$  si  $|n| > [2\pi R_x R_k] + 1$ . Por lo tanto, de acuerdo con el resultado de muestreo funciones periódicas de ancho de banda limitado visto anteriormente, el intervalo de muestreo angular satisface el criterio de Nyquist para todo valor  $k$  muestreado dado por

$$\Delta\phi \leq \frac{2\pi}{2([2\pi R_x R_k] + 1) + 1}. \quad (4.2.11)$$

Además, se puede obtener la siguiente relación de la ecuación (4.2.11), directamente relacionada con el número de líneas radiales, denotado por  $N_\phi$  y el número de muestreo por línea, denotado por  $N_k$ . Tomando en cuenta el hecho de que  $n\Delta\phi$  y  $n\Delta\phi + \pi$  se

adquieren simultáneamente, podemos expresar  $N_\phi$  como:

$$N_\phi = \frac{\pi}{\Delta\phi} \geq \lceil 2\pi R_x R_k \rceil + 1,5.$$

Reemplazando  $R_x = 1/2\Delta k$  y  $R_k = N_k\Delta k/2$ , obtenemos:

$$\frac{N_\phi}{N_k} \approx \frac{\pi}{2}. \quad (4.2.12)$$

La ecuación (4.2.12) indica que el número de líneas radiales es medianamente el mismo que el número de muestras por línea de proyección.

### 4.3. Reconstrucción de la imagen

En esta sección estableceremos formalmente el problema de reconstrucción, cómo encontrar una función imagen  $I$  que sea consistente con la señal medida  $S$  de acuerdo con la ecuación de la imagen:

$$S = \mathcal{T}\{I\}, \quad (4.3.13)$$

donde  $\mathcal{T}$  es usualmente un operador integral. En MRI,  $\mathcal{T}$  representa cualquiera de los esquemas de codificación espacial. La ecuación (4.3.13) comúnmente hace referencia a una restricción para la consistencia de datos, donde cualquier función que satisfaga estas restricciones es llamada *reconstrucción posible*.

La restricción para la consistencia de datos es importante, ya que la reconstrucción de la imagen no hace más que convertir la información de los datos medidos a un formato de imagen. Una violación de la restricción para la consistencia de datos puede significar que el paso de conversión no sea fiable, una pérdida de información válida o resultar en información falsa. Sin embargo, no se debe asumir que la técnica de reconstrucción satisface la restricción para la consistencia de datos. En la práctica, la consistencia de datos puede ser sacrificada en una forma controlada, a cambio de otra propiedad más deseable de imagen. Por ejemplo, en la reconstrucción de Fourier apodizada descrita más adelante (ver ecuación (4.4.22)) la restricción de consistencia de datos es violada intencionalmente para reducir el fenómeno de los anillos de Gibbs.

Teóricamente, si  $\mathcal{T}$  es invertible, datos consistentes  $I$  pueden obtenerse de la transformada inversa

$$I = \mathcal{T}^{-1}\{S\}.$$

Sin embargo, en realidad  $\mathcal{T}^{-1}\{S\}$  no puede ser obtenida ya que el espacio de los datos

es sólo parcialmente muestreado. Por lo tanto, en vez de implementar directamente la fórmula de inversión, nos enfocamos en encontrar una función imagen que satisfaga la restricción para la consistencia de datos, ya sea por una aproximación a través de una transformada inversa o por algún método distinto. Algunos problemas generales con los que tiene que lidiar la reconstrucción de imágenes son *existencia*, *unicidad* y *estabilidad*. Tópicos muy latentes también en el área de matemática.

Dado un conjunto de mediciones, siempre existirá una función imagen  $I$  que sea consistente con los datos, ya que son generados por un objeto físico real.

La unicidad de tal función imagen, depende de cómo el espacio de datos sea muestreado. Si se tiene una cantidad finita de muestras, como siempre ocurre en la realidad, existe más de una reconstrucción posible para tal muestreo de datos. En este caso, se utiliza algún criterio de optimalidad para seleccionar una imagen de todas las reconstrucciones posibles.

La estabilidad en la reconstrucción de imágenes se refiere a como perturbaciones en el dominio de datos se transfieren en posibles errores en la imagen. Más específicamente, si los datos son perturbados por  $\Delta S$  y, como consecuencia, la función imagen tiene un error de  $\Delta I$ , entonces

$$S + \Delta S = \mathcal{T}\{I + \Delta I\}.$$

## 4.4. Reconstrucción desde el muestreo por transformada de Fourier

El problema de reconstruir una función desde el muestreo por la transformada de Fourier puede formularse de la siguiente forma:

Dado

$$S(\mathbf{k}_n) = \int I(\mathbf{r}) e^{-i2\pi\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad \mathbf{k}_n \in \mathcal{D}, \quad (4.4.14)$$

determinar  $I(\mathbf{r})$ . Donde  $\mathcal{D}$  contiene el conjunto de puntos del  $k$  espacio del que se recogen los datos de medición.

Este problema ocurre en muchas disciplinas científicas y ha sido estudiado desde mucho antes del nacimiento de la MRI. Hoy en día, es sabido que dado un conjunto de muestras uniformes de la transformada de Fourier, la transformada de Fourier discreta (DFT) es la herramienta computacional usada para la reconstrucción de imágenes. En

esta sección se discutirán las bases teóricas y las limitaciones de la técnica de reconstrucción DFT.

En el caso unidimensional, la ecuación (4.4.14) puede escribirse como:

$$S(k_n) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) e^{-i2\pi k_n x} dx.$$

Además supondremos que el  $k$  espacio es uniformemente muestreado, tal que:

$$\mathcal{D} = \{k_n = n\Delta k, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

La ecuación de imagen se convierte en

$$S[n] = S(n\Delta k) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) e^{-i2\pi k_n x} dx.$$

**Proposición 4.4.1.** *Sea  $I \in L^1(\mathbb{R})$ . Dado  $N \in \mathbb{N}$ , se cumple la siguiente igualdad.*

$$\sum_{n=-N}^N S[n] e^{i2\pi n \Delta k x} = \frac{1}{\Delta k} \sum_{n=-N}^N I\left(x - \frac{n}{\Delta k}\right). \quad (4.4.15)$$

*Demostración.* En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N S[n] e^{i2\pi n \Delta k x} &= \sum_{n=-N}^N \left[ \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) e^{-i2\pi n \Delta k \xi} d\xi \right] e^{i2\pi n \Delta k x} \\ &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) e^{i2\pi n \Delta k (x - \xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) \sum_{n=-N}^N e^{i2\pi n \Delta k (x - \xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) \frac{1}{\Delta k} \sum_{n=-N}^N \delta\left(x - \xi - \frac{n}{\Delta k}\right) d\xi \quad (\text{fórmula de Poisson}) \\ &= \frac{1}{\Delta k} \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) \delta\left(x - \xi - \frac{n}{\Delta k}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{\Delta k} \sum_{n=-N}^N I\left(x - \frac{n}{\Delta k}\right). \end{aligned}$$

□

*Observación 4.4.2. La identidad*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S[n] e^{i2\pi n \Delta k x} = \frac{1}{\Delta k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I\left(x - \frac{n}{\Delta k}\right). \quad (4.4.16)$$

es válida en el sentido de distribuciones (ver [4]).

Una importante fórmula que gobierna la reconstrucción de  $I$  desde los  $S(n\Delta k)$  es la ecuación (4.4.16). El lado izquierdo de esta ecuación puede ser visto como una serie de Fourier. El lado derecho es una extensión periódica de  $I$  con periodo  $1/\Delta k$ .

**Muestreo infinito:** En este caso hipotético de un muestreo infinito,  $S(k)$  existe para  $k \in \mathcal{D}$ , donde

$$\mathcal{D} = \{n\Delta k, -\infty < n < \infty\}.$$

Por lo tanto, existe suficiente información para definir la serie de Fourier en la ecuación (4.4.16). La pregunta ahora es si se puede recuperar  $I(x)$  de la extensión periódica definida en (4.4.16). La respuesta es sí, si  $\Delta k$  satisface el criterio de muestreo de Nyquist. Para ilustrar este punto, primero usaremos el hecho de que cualquier  $I(x)$  en la práctica será de soporte compacto. Esto es, existe un  $W_x$  tal que  $I(x) = 0$  para  $|x| > W_x/2$ , donde la región definida por  $|x| < W_x/2$  es llamado *field of view* (FOV) en la literatura de MRI.

Si la relación

$$W_x < \frac{1}{\Delta x}$$

vale, no existe solapado entre las réplicas periódicas  $I(x - n/\Delta k)$  para los distintos  $n$ . Entonces, se puede obtener  $I(x)$  de la serie de Fourier formada en la ecuación (4.4.16), más específicamente,

$$I(x) = \Delta k \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} S[n] e^{i2\pi n \Delta k x}, \quad (4.4.17)$$

para una definición de la función  $\operatorname{rect}$  ver ecuación (5.1.6).

En la práctica,  $I(x)$  se evalúa sólo en el área FOV; por conveniencia de notación, generalmente la función  $\operatorname{rect}$  se omite de la ecuación (4.4.17), obteniendo

$$I(x) = \Delta k \sum_{n=-\infty}^{\infty} S[n] e^{i2\pi n \Delta k x} \quad |x| < \frac{1}{\Delta k}. \quad (4.4.18)$$

**Muestreo finito:** En la mayoría de las situaciones prácticas, sólo se obtiene una

cantidad finita de puntos del  $k$  espacio. Por convención, asumiremos que  $S(k)$  se conoce para  $k \in \mathcal{D}$ , donde

$$\mathcal{D} = \{n\Delta k, -N/2 < n < N/2\},$$

con  $N$  fijo. Este conjunto no es suficiente para definir la serie de Fourier como requiere la fórmula (4.4.18). Lo que da como resultado, una reconstrucción posible no única.

*Observación 4.4.3.* Si  $I$  es una reconstrucción posible, entonces  $\hat{I}(x) = I(x) + e^{i2\pi m\Delta kx}$  es también una reconstrucción posible para cualquier  $|m| > N/2$ .

*Observación 4.4.4.*  $I$  dado en la ecuación (4.4.18) es una reconstrucción posible, si los coeficientes no considerados toman valores finitos arbitrarios. En otras palabras,

$$I(x) = \Delta k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} S[n] e^{i2\pi n\Delta kx} + \sum_{\substack{n < N/2 \\ n \geq N/2}} c_n e^{i2\pi n\Delta kx} \quad (4.4.19)$$

es una reconstrucción posible para  $c_n$  arbitrarios (finitos).

Una importante pregunta con respecto a la reconstrucción de imágenes de una cantidad finita de muestras es: ¿Qué valores deberíamos asignar a  $c_n$ ? Claramente, la respuesta depende de la aplicación. En la práctica, a menudo los  $c_n$  son seleccionados en base a la restricción de *norma mínima*. Como resultado los coeficientes de la serie de Fourier que no son medidos son forzados a ser cero. Porque, de acuerdo con el teorema de Parseval,

$$\int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2} |I(x)|^2 dx = (\Delta k)^2 \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |S[n]|^2 + \sum_{\substack{n < N/2 \\ n \geq N/2}} |c_n|^2, \quad (4.4.20)$$

que alcanza el mínimo cuando  $c_n = 0$ . Por lo tanto la reconstrucción posible, de norma mínima  $L^2$ , tiene forma de una serie de Fourier truncada:

$$I(x) = \Delta k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} S[n] e^{i2\pi n\Delta kx} \quad |x| < \frac{1}{\Delta k}. \quad (4.4.21)$$

La ecuación (4.4.21) es conocida como *fórmula de reconstrucción de Fourier*.

Claramente, la reconstrucción de Fourier no es idéntica a la función de la imagen real. De hecho, como resultado de truncar la serie, la continuidad inherente de  $S$  ( $S$  es una función analítica) se puede perder, dando paso al conocido *fenómeno de Gibbs*.

Una manera simple de solucionar este problema es multiplicar los datos por una función de apodización o filtro  $w_n$  (*window function*), la cual decae suavemente a cero

en  $n = \pm N/2$ . Existe variedad en este tipo de filtros. El más popular es la función *Hamming window*

$$w_n = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi n/N) \quad \text{con } -N/2 \leq n \leq N/2.$$

Después de seleccionar la función de apodización, la reconstrucción de Fourier apodizada viene dada por:

$$I(x) = \Delta k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} S[n] w_n e^{i2\pi n \Delta k x} \quad |x| < \frac{1}{\Delta k}. \quad (4.4.22)$$

Notemos que la reconstrucción de Fourier apodizada no es consistente con los datos ya que

$$\int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2} I(x) e^{-i2\pi n \Delta k x} dx = w_n S[n].$$

El efecto de esta violación en la consistencia se manifiesta en una pérdida en la resolución espacial, pero por otro lado soluciona el fenómeno de los *anillos de Gibbs*.

# Capítulo 5

## La transformada de Fourier fraccionaria

En este capítulo veremos una breve introducción a la transformada de Fourier fraccionaria (FrFT), luego introduciremos la transformada de Fourier fraccionaria en el contexto de la teoría de semigrupos. A su vez, las fórmulas de aproximación que se plantean en esta teoría nos servirán para proponer nuevos métodos para reconstruir la magnetización del objeto a través de señales de resonancia magnética.

Para comenzar, consideremos  $L^2(\mathbb{R})$ , esto es, el espacio de Hilbert de funciones Lebesgue medibles con dominio  $\mathbb{R}$  e imagen en  $\mathbb{C}$ , tal que:

$$\|f\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du < \infty.$$

La FrFT en  $L^2(\mathbb{R})$  originalmente fue descrita por Kober [19] y después redescubierta por Namias en el contexto de la mecánica cuántica [22]. Una definición equivalente es la siguiente, ver ecuación (5.1.19):

$$\mathcal{F}^a = e^{-i\frac{\pi}{2}a\mathcal{H}}, \quad (5.0.1)$$

donde  $\mathcal{H}$  es proporcional al Hamiltoniano del oscilador armónico en mecánica cuántica. Esta es una definición heurística, ya que si (5.0.1) se expande como serie de potencias, no se tiene su convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$ . En efecto, esta materia es bien estudiada en la teoría de semigrupos fuertemente continuos [9]. En un interesante trabajo, Kerr [17] demostró que la FrFT constituye un grupo unitario de operadores fuertemente continuos en  $L^2(\mathbb{R})$ . Sin embargo, la estructura de  $L^2(\mathbb{R})$  como un espacio de Hilbert no fue usada en toda su extensión, ya que, desde el enfoque de Kerr, se considera la FrFT según su definición por medio de una fórmula integral (ver corolario 5.2.8).

## 5.1. Introducción a la transformada de Fourier fraccionaria

Es posible definir la transformada de Fourier fraccionaria de muchas formas distintas. Cualquiera de estas se puede tomar como definición inicial, y mostrar que las demás derivan de propiedades de la definición inicial.

Antes de presentar las definiciones, introduciremos algo de notación y suposiciones generales. El  $a$ -ésimo orden de la transformada de Fourier fraccionaria de la función  $f$  se denotará, dependiendo del contexto y los requerimientos para su claridad, de cualquiera de las siguientes formas. El más comúnmente usado será  $f_a$  o equivalentemente  $\mathcal{F}^a f$ . Interpretaremos este operador  $\mathcal{F}^a$  actuando sobre una señal abstracta (o función)  $f$ , expresado en un dominio  $u$ :

$$f_a(u) = \mathcal{F}^a f(u) = (\mathcal{F}^a f)(u) = \mathcal{F}^a(f)(u).$$

Un elemento muy importante en este contexto es la función generalizada (o distribución) delta de Dirac  $\delta$ , la cual es cero para todo punto distinto de cero del dominio, y la integral sobre cualquier intervalo que contenga el cero es 1, esto es

$$\delta(u) := \begin{cases} \delta(u) = 0 & \text{para todo } u \neq 0 \\ \int_I \delta(\xi) d\xi = 1 & \text{si } 0 \in \text{Int}(I). \end{cases}$$

Además se puede definir como el límite de las siguientes funciones:

$$\delta(u) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \text{rect} \left( \frac{u}{c} \right), \quad (5.1.2)$$

$$\delta(u) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \text{sinc} \left( \frac{u}{c} \right), \quad (5.1.3)$$

$$\delta(u) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \text{gauss} \left( \frac{u}{c} \right), \quad (5.1.4)$$

$$\delta(u) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \text{chirp} \left( \frac{u}{c} \right), \quad (5.1.5)$$

con  $c > 0$ , donde

$$\text{rect}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in ] -1/2, 1/2[ \\ 1/2 & \text{si } u \in \{-1/2, 1/2\} \\ 0 & \text{e.o.c. ,} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

$$\text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}, \quad (5.1.7)$$

$$\text{gauss}(u) = e^{-\pi u^2}, \quad (5.1.8)$$

$$\text{chirp}(u) = e^{-i\pi/4} e^{i\pi u^2}. \quad (5.1.9)$$

Las dos últimas ecuaciones (5.1.4) y (5.1.5) pueden ser reescritas para todo valor real de  $c$

$$\delta(u) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|c|}} e^{-\pi u^2/|c|}, \quad (5.1.10)$$

$$\delta(u) = \lim_{c \rightarrow 0} e^{-i\pi \text{sgn}(c)/4} \frac{1}{\sqrt{|c|}} e^{i\pi u^2/c} = \lim_{c \rightarrow 0} e^{-i\pi/c} \sqrt{\frac{1}{c}} e^{i\pi u^2/c}. \quad (5.1.11)$$

**Definición A:** (*Transformación integral lineal*) La primera definición es la más directa y concreta, aunque no es inmediatamente evidente por qué esta transformada merece ser llamada transformada de Fourier fraccionaria.

**Definición 5.1.1.** *Las transformada de Fourier fraccionaria de orden  $a$  es definida mediante la integral*

$$f_a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(u, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (5.1.12)$$

con,

$$K(u, \xi) = \begin{cases} A_\alpha e^{i\pi[\cot(\alpha)u^2 - 2\csc(\alpha)u\xi + \cot(\alpha)\xi^2]} & \text{si } a \neq 2j \\ \delta(u - \xi) & \text{si } a = 4j \\ \delta(u + \xi) & \text{si } a = 4j \pm 2, \end{cases}$$

donde  $A_\alpha = \sqrt{1 - i \cot(\alpha)}$ ,  $\alpha = a\pi/2$  y  $j \in \mathbb{Z}$ .

La raíz cuadrada de  $A_\alpha$  es definida tal que el argumento este dentro del intervalo  $]-\pi/2, \pi/2]$ .

**Proposición 5.1.2.** *Para  $0 < |\alpha| < \pi$ ,  $A_\alpha$  puede reescribirse sin ambigüedad de la forma:*

$$A_\alpha = \frac{e^{-i[\pi \text{sgn}(\alpha)/4 - \alpha/2]}}{\sqrt{|\sin(\alpha)|}}. \quad (5.1.13)$$

*Demostración.* En efecto, claramente

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\alpha) [\sin(\alpha) - i \cos(\alpha)] &= (i)^{-\text{sgn}(\alpha)} [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] \\ &= (-1)^{-\text{sgn}(\alpha)/2} [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)], \end{aligned}$$

como  $|\alpha| < \pi$  se cumple que  $|\sin(\alpha)| = \text{sgn}(\alpha) \sin(\alpha)$ , luego

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\alpha) [\sin(\alpha) - i \cos(\alpha)] &= (-1)^{-\text{sgn}(\alpha)/2} [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] \\ |\sin(\alpha)| [1 - i \cot(\alpha)] &= (e^{i\pi})^{-\text{sgn}(\alpha)/2} e^{i\alpha}. \end{aligned}$$

Finalmente, ya que  $\alpha \neq 0$ , tenemos

$$1 - i \cot(\alpha) = \frac{e^{-i\pi \operatorname{sgn}(\alpha)/2 + i\alpha}}{|\sin(\alpha)|},$$

y aplicando raíz a ambos lados se obtiene el resultado.  $\square$

Cuando  $a$  está fuera del intervalo  $0 \leq |a| \leq 2$ , simplemente se reemplaza  $a$  por su equivalente en módulo 4.

La transformada es por definición lineal, pero no es shift-invariante (excepto para  $a = 4j$ ), ya que el kernel no es sólo una función de  $(u - \xi)$ . Primero examinaremos el caso en que  $a$  es entero. Sea  $j$  un entero arbitrario, notamos de la definición que  $\mathcal{F}^{4j}$  y  $\mathcal{F}^{4j \pm 2}$  corresponden a los operadores  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{P}$  respectivamente, donde  $\mathcal{I}$  es el operador identidad y  $\mathcal{P}$  es el operador paridad, esto es

$$\mathcal{I}(f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - \xi) f(\xi) d\xi$$

$$\mathcal{P}(f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u + \xi) f(\xi) d\xi.$$

Para  $a = 1$ , tenemos  $\alpha = \pi/2$  y  $A_\alpha = 1$ , por lo tanto

$$f_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi u\xi} f(\xi) d\xi.$$

Vemos que  $f_1$  es igual a la transformada de Fourier de  $f$ , la cual normalmente se denota  $\mathcal{F}$ . De la misma forma, es posible ver que  $f_{-1}$  es la transformada inversa de Fourier de  $f$ . Ya que  $\alpha = a\pi/2$  aparece en la ecuación (5.1.12) solamente en el argumento trigonométrico de  $K_a$ , la definición es periódica en  $a$  (o  $\alpha$ ) con periodo 4 (o  $2\pi$ ). Por esto podemos centrar nuestra atención al intervalo  $a \in ] - 2, 2]$  (o  $\alpha \in ] - \pi, \pi]$ ), o en algunos casos  $a \in [0, 4[$  (o  $\alpha \in [0, 2\pi[$ ). Estos hechos pueden resumirse en notación de operadores de la forma:

$$\mathcal{F}^0 = \mathcal{I},$$

$$\mathcal{F}^1 = \mathcal{F},$$

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{P},$$

$$\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{F},$$

$$\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}^0 = \mathcal{I},$$

$$\mathcal{F}^{4j+a} = \mathcal{F}^{4k+a},$$

donde  $j$  y  $k$  son enteros arbitrarios.

Esta definición parecería artificial si no presentara algún tipo de continuidad con respecto a  $a$ . No es difícil ver, examinando el kernel, que un leve cambio en  $a$  resulta sólo en un leve cambio en  $f_a(u)$  cuando  $a$  no está cerca de un entero múltiplo de 2. Para ver que esto además es válido cuando  $a$  se aproxima a un entero múltiplo de 2, primero consideremos el comportamiento del kernel cuando  $a \rightarrow 0$ .

**Proposición 5.1.3.** *Para  $|a| > 0$  infinitesimal el kernel puede ser reescrito como:*

$$K_a(u, \xi) \approx \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} e^{-i \operatorname{sgn}(\alpha)/4} e^{i\pi(u-\xi)^2/\alpha}. \quad (5.1.14)$$

*Demostración.* En efecto, usando (5.1.18) tenemos

$$K_a(u, \xi) = \frac{e^{-i\pi \operatorname{sgn}(\alpha)/4} e^{i\alpha/2}}{\sqrt{|\sin(\alpha)|}} e^{i\pi[\cot(\alpha)u^2 - 2 \operatorname{csc}(\alpha)u\xi + \cot(\alpha)\xi^2]},$$

como  $|a| \rightarrow 0$ , esto implica que  $|\alpha| \rightarrow 0$ , luego  $\sin(\alpha) \approx \alpha$  y  $\cos(\alpha) \approx 1$  por lo que

$$\begin{aligned} K_a(u, \xi) &= \frac{e^{-i\pi \operatorname{sgn}(\alpha)/4}}{\sqrt{|\alpha|}} e^{i\pi[u^2/\alpha - 2u\xi/\alpha + \xi^2/\alpha]} \\ &= \frac{e^{-i\pi \operatorname{sgn}(\alpha)/4}}{\sqrt{|\alpha|}} e^{i\pi(u-\xi)^2/\alpha}. \end{aligned}$$

□

De (5.1.11) se ve que la ecuación (5.1.14) se reduce a  $\delta(u - \xi)$  cuando  $a \rightarrow 0$ . Para un análisis cuando  $a$  se aproxima a otro entero múltiplo de 2, ver [5, página 120].

Finalmente, podemos ver una importante propiedad del operador de transformada de Fourier fraccionaria, la aditividad de índices

$$\mathcal{F}^{a_1} \mathcal{F}^{a_2} = \mathcal{F}^{a_1+a_2} = \mathcal{F}^{a_2} \mathcal{F}^{a_1}.$$

**Definición B:** (*Potencias fraccionarias de la transformada de Fourier*) Ahora definiremos el  $a$ -ésimo orden de la transformada de Fourier fraccionaria como la  $a$ -ésima potencia fraccionaria de la transformada de Fourier.

Denotemos por  $\psi_l$  la función de Gauss–Hermite que es función propia de la transformada de Fourier, con su respectivo valor propio  $\lambda_l$ . Se sabe además que este conjunto de funciones propias constituye una base ortonormal en  $L^2$ .

**Definición 5.1.4.** *La transformada de Fourier fraccionaria se define de la forma:*

$$\mathcal{F}^a \psi_l(u) = \lambda_l^a \psi_l(u) = (e^{-il\pi/2})^a \psi_l(u) = e^{-ial\pi/2} \psi_l(u). \quad (5.1.15)$$

Así se define completamente la transformada de Fourier fraccionaria como una función lineal por medio de la especificación en las funciones propias y los valores propios.

Varias propiedades de la transformada de Fourier fraccionaria discutidas en términos de la definición A, se deducen con mayor facilidad en la presente definición, así como los casos  $a = 0$ ,  $a = 1$  y la propiedad de aditividad de índices.

En efecto, para obtener la transformada de Fourier fraccionaria de una función  $f$ , primero debemos escribir su representación en las funciones propias de la transformada de Fourier,

$$f(u) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \psi_l(u), \quad (5.1.16)$$

con

$$C_l = \int \psi_l(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Aplicando  $\mathcal{F}^a$  a la ecuación (5.1.16) y usando (5.1.15) obtenemos

$$\mathcal{F}^a f(u) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-ial\pi/2} C_l \psi_l(u) = \int \sum_{l=0}^{\infty} e^{-ial\pi/2} \psi_l(u) \psi_l(\xi) f(\xi) d\xi.$$

En comparación con la ecuación (5.1.12), el kernel  $K_a$  es ahora de la forma

$$K_a(u, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-ial\pi/2} \psi_l(u) \psi_l(\xi), \quad (5.1.17)$$

el cual es llamado *expansión espectral* del kernel de la transformada de Fourier fraccionaria. Para ver una equivalencia entre el kernel de la ecuación (5.1.17) y (5.1.12), ver [5, tabla 2.8].

**Definición C:** (*Transformación de operadores de multiplicación y diferenciación*) Este enfoque se debe esencialmente a Condon (1937). Notamos que más tarde Wolf (1979) usó un enfoque similar para definir las transformaciones lineales canónicas.

Para esta definición es necesario primero definir el operador de multiplicación  $\mathcal{U}$  y el operador de diferenciación  $\mathcal{D}$  en los dominios de tiempo ( $u$ ) y frecuencia ( $\mu$ ) como

sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}f(u) &= uf(u), \\ \mathcal{D}f(u) &= \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{du} f(u), \\ \mathcal{U}F(\mu) &= -\frac{1}{i2\pi} \frac{d}{d\mu} f(\mu), \\ \mathcal{D}F(\mu) &= \mu F(\mu).\end{aligned}$$

A través de esta sección usaremos  $u_a$  como la variable asociada al dominio de la  $a$ -ésima transformada de Fourier fraccionaria. Como es usual,  $u$  denotará la variable en el dominio de tiempo.

**Definición 5.1.5.** *Definimos los operadores  $\mathcal{U}_a$  y  $\mathcal{D}_a$  de la forma*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_a \\ \mathcal{D}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix},$$

con  $\alpha = a\pi/2$ , tal que

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U},$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D}_1 = -\mathcal{U}.$$

Ahora, definimos la representación en el dominio de la transformada de Fourier fraccionaria  $f_a(u_a)$  de la función  $f$  tal que satisface las propiedades

$$\mathcal{U}_a f_a(u_a) = u_a f(u_a),$$

$$\mathcal{D}_a f_a(u_a) = \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{du_a} f_a(u_a).$$

**Definición D:** (*Ecuación diferencial*) Aquí la transformada de Fourier fraccionaria de una función  $f_0$  es definida como la solución de una ecuación diferencial, donde  $f_0(u)$  representa la condición inicial. Esta es la ecuación diferencial del oscilador armónico en mecánica cuántica y además la ecuación gobierna la propagación óptica en medios de índice cuadrático.

**Definición 5.1.6.** *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} \left[ -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \pi u^2 - \frac{1}{2} \right] f_a(u) = i \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial a} f_a(u) \\ f_0(u) = f(u). \end{cases} \quad (5.1.18)$$

La solución de la ecuación  $f_a$ , la transformada de Fourier de  $f$  de orden  $a$ .

Para una equivalencia de las definiciones A y B, ver [5, página 130].

Las soluciones de la ecuación (5.1.18) son las funciones de Gauss-Hermite; esto es, si la condición inicial es  $\psi_l(u)$ , la solución es  $e^{-ial\pi/2}\psi(u)$ .

Dada una condición inicial arbitraria  $f_0(u)$  suficientemente regular, se puede obtener su expansión en términos de las funciones de Gauss-Hermite

$$f_0(u) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \psi_l(u),$$

con

$$C_l = \int \psi_l(\xi) f_0(\xi) d\xi.$$

Ya que la ecuación (5.1.18) es lineal, la solución correspondiente a la condición inicial es obtenida de la forma:

$$f_a(u) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l e^{-ial\pi/2} \psi_l(u).$$

**Definición E:** (*Operador Hiperdiferencial*) Finalmente, mostraremos como la transformada de Fourier fraccionaria puede definirse en una forma Hiperdiferencial

**Definición 5.1.7.** La transformada de Fourier fraccionaria se define por el operador hiperdiferencial

$$\mathcal{F}^a = e^{-i(a\pi/2)\mathcal{H}}, \quad (5.1.19)$$

donde

$$\mathcal{H} = \pi (\mathcal{D}^2 + \mathcal{U}^2) - \frac{1}{2}.$$

En el dominio de tiempo esto es

$$\mathcal{F}^a f(u) = \exp \left[ -i \frac{a\pi}{2} \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{du^2} + \pi u^2 - \frac{1}{2} \right) \right] f(u).$$

Esta definición está muy relacionada con la definición anterior. Para una equivalencia ver [5, página 132].

## 5.2. Una perspectiva de la FrFT desde la teoría de semigrupos

En esta sección, formalizaremos la igualdad (5.0.1) mediante la teoría de semigrupos en operadores lineales, introduciendo la definición de FrFT desde una nueva perspectiva. En esta dirección, destacamos la interesante publicación [18] que desarrolla una teoría general de las transformaciones fraccionarias en grupos equicontinuos de operadores en espacios de funciones generalizadas, donde la transformada fraccionaria de Fourier es un caso especial.

Para comenzar, recordemos que, para  $n \in \mathbb{N}_0$ , las funciones de Gauss–Hermite se definen como:

$$\psi_n(u) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi}u) e^{-\pi u^2},$$

donde  $H_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Hermite. Además recordemos que las funciones de Gauss–Hermite forman un sistema ortonormal en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Definición 5.2.1.** Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos los operadores  $P_n: L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  como:

$$(P_n f)(u) := \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(u).$$

**Definición 5.2.2.** Definimos el operador lineal no acotado  $\mathcal{H}: D(\mathcal{H}) \subset L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  como sigue:

$$\mathcal{H}f(u) := \frac{i}{2} \left( \frac{1}{4} f''(u) - \pi^2 u^2 f(u) + \frac{\pi}{2} f(u) \right), \quad (5.2.20)$$

con dominio (maximal) dado por:

$$D(\mathcal{H}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f'' \in L^2(\mathbb{R}) \text{ y } M_{u^2} f \in L^2(\mathbb{R})\},$$

donde  $M_{u^2}$  denota el operador multiplicación por  $u^2$ , esto es  $M_{u^2} f(u) := u^2 f(u)$ .

Comenzamos nuestras consideraciones con el siguiente resumen de algunas propiedades importantes de la sucesión de operadores  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  que utilizaremos en esta sección.

**Proposición 5.2.3.** Las siguientes afirmaciones son válidas:

- I.  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de proyecciones lineales y acotadas en  $L^2(\mathbb{R})$ , esto es  $P_n P_m = 0$  si  $m \neq n$  y  $P_n^2 = P_n$ .
- II. Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\|P_n\| \leq 1$ .

III. Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $P_n \mathcal{H} = \mathcal{H} P_n = -in \frac{\pi}{2} P_n$ .

IV.  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n f = f$  para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

V. El dominio de  $\mathcal{H}$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* En efecto,

I. Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Ya que claramente de  $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$  se sigue que  $P_n f \in L^2(\mathbb{R})$ , se obtiene  $P_m(P_n f) = \langle P_n f, \psi_m \rangle \psi_m = \langle f, \psi_n \rangle \langle \psi_n, \psi_m \rangle \psi_m$ , y

$$P_m(P_n f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \langle f, \psi_n \rangle \psi_n & \text{si } n = m. \end{cases}$$

II. Usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, tenemos que

$$\|P_n f\|^2 = \|\langle f, \psi_n \rangle \psi_n\|^2 = |\langle f, \psi_n \rangle|^2 \|\psi_n\|^2 \leq \|f\|^2 \|\psi_n\|^2 \|\psi_n\|^2 = \|f\|^2.$$

III. Usando la identidad ( 2.5.5):

$$\begin{aligned} \psi_n''(u) + 4\pi^2 \left( \frac{2n+1}{2\pi} - u^2 \right) \psi_n(u) &= 0 \\ \psi_n''(u) + 2\pi(2n+1)\psi_n(u) - 4\pi^2 u^2 \psi_n(u) &= 0 \\ \psi_n''(u) + 2\pi\psi_n(u) - 4\pi^2 u^2 \psi_n(u) &= -4n\pi\psi_n(u) \\ \frac{i}{2} \left( \frac{1}{4}\psi_n''(u) - \pi^2 u^2 \psi_n(u) + \frac{\pi}{2}\psi_n(u) \right) &= -in \frac{\pi}{2} \psi_n(u) \end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$-in \frac{\pi}{2} \psi_n(u) = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{4}\psi_n''(u) - \pi^2 u^2 \psi_n(u) + \frac{\pi}{2}\psi_n(u) \right) = \mathcal{H}\psi_n(u).$$

Entonces,

$$P_n \mathcal{H} f = \langle \mathcal{H} f, \psi_n \rangle \psi_n = \langle f, -\mathcal{H}\psi_n \rangle \psi_n = \left\langle f, in \frac{\pi}{2} \psi_n \right\rangle \psi_n = -in \frac{\pi}{2} P_n f,$$

y

$$\mathcal{H} P_n f = \langle f, \psi_n \rangle \mathcal{H}\psi_n = -in \frac{\pi}{2} P_n f.$$

IV. Es directo del hecho que  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  es un sistema ortogonal completo en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ .

v. En el teorema 5.2.9 veremos que  $\mathcal{H}$  es el generador infinitesimal de un grupo fuertemente continuo, luego por la proposición 2.4.5, el dominio de  $\mathcal{H}$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .

□

**Proposición 5.2.4.** *La siguiente igualdad es válida para  $u \in [0, 2\pi]$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi u}{2} + \frac{u^2}{4}. \quad (5.2.21)$$

*Demostración.* Calculemos la serie de cosenos de la función  $f(x) = x(\pi - x)$  con  $x \in [0, \pi]$ , recordemos su forma:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos(kx),$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Luego, ya que  $f(x)$  es continua y  $f'$  está en  $L^2([0, \pi])$ , la serie converge uniformemente a  $f(x)$  (ver [13, página 88]),

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2kx),$$

finalmente, reemplazando  $u = 2x$ , obtenemos el resultado pedido.

□

El siguiente resultado es el principal de esta sección.

**Teorema 5.2.5.** *Para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  la familia  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  dada por:*

$$T(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\frac{\pi}{2}t} P_n f,$$

*define un grupo fuertemente continuo en  $L^2(\mathbb{R})$ . Más aún:*

- $T(t)$  es periódico con período 4.
- $T(1) = \mathcal{F}$ , donde  $\mathcal{F}$  denota la transformada de Fourier.

*Demostración.* Primero mostraremos que para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , tenemos  $T(t)f \in$

$L^2(\mathbb{R})$ . En efecto, para  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\|T(t)f\|^2 &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\frac{\pi}{2}t} P_n f, \sum_{m=0}^{\infty} e^{-im\frac{\pi}{2}t} P_m f \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i(n-m)\frac{\pi}{2}t} \langle P_m P_n f, f \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n f, f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \psi_n, f \rangle|^2 = \|f\|^2. \tag{5.2.22}
\end{aligned}$$

Además, la identidad anterior implica que

$$\|T(t)\| \leq 1, \tag{5.2.23}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De I y IV de la proposición 5.2.3 se deduce la propiedad de grupos  $T(t+s) = T(t)T(s)$  y  $T(0) = I$ . En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned}
T(t)T(s)f &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-in\frac{\pi}{2}t} e^{-im\frac{\pi}{2}s} P_n P_m f \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\frac{\pi}{2}(t+s)} P_n f = T(t+s)f. \tag{5.2.24}
\end{aligned}$$

Por último, debemos mostrar que  $T(t)f \rightarrow f$  cuando  $t \rightarrow 0$ , lo que implicaría que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es fuertemente continuo. En efecto, ya que el dominio de  $\mathcal{H}$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ , es suficiente probar que se cumple para  $f \in D(\mathcal{H})$ . Sea  $g = \mathcal{H}f$ . Por II y IV de la Proposición 5.2.3 tenemos:

$$\begin{aligned}
\|T(t)f - f\|^2 &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-in\frac{\pi}{2}t} - 1) P_n f \right\|^2 \\
&= \left\| \frac{2i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-in\frac{\pi}{2}t} - 1) \frac{1}{n} P_n g \right\|^2 \\
&= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-in\frac{\pi}{2}t} - 1|^2 \frac{1}{n^2} \|P_n g\|^2 \\
&\leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n^2} - 2 \frac{\cos(n\pi t/2)}{n^2} \right) \|g\|^2 \\
&= \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2 t}{2} - \frac{\pi^2 t^2}{8} \right) \|g\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \tag{5.2.25}
\end{aligned}$$

donde en la última ecuación se usó la identidad (5.2.21). Esto prueba que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es fuertemente continuo. Finalmente, es claro de la definición que  $T(t)$  tiene periodo 4. El

que  $T(1)$  es la transformada de Fourier de  $f$  se sigue de su representación en términos de las funciones de Gauss–Hermite (ver [5, sección 2.5]).  $\square$

Introduciremos la FrFT por medio de la siguiente definición.

**Definición 5.2.6.** *Definimos la transformada de Fourier fraccionaria de orden  $a \in \mathbb{R}$  de la función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  como:*

$$\mathcal{F}^a(f)(\rho) := [T(a)f](\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

El grupo  $\{T(a)\}_{a \in \mathbb{R}}$  también es llamado grupo de Fourier.

El siguiente lema es la clave para mostrar rigurosamente que  $\{T(a)\}_{a \in \mathbb{R}}$  es, en efecto, igual a la definición usual de FrFT de orden  $a$  dada por medio de la fórmula integral.

**Lema 5.2.7.** *Para todo  $\rho, u \in \mathbb{R}$  y todo  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  tenemos que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\rho) e^{-in\alpha} \psi_n(u) = \sqrt{1 - i \cot \alpha} e^{i\pi(\rho^2 \cot \alpha - 2\rho u \csc \alpha + u^2 \cot \alpha)}.$$

*Demostración.* Todas las integrales de la demostración son tomadas sobre  $\mathbb{R}$ .

Usaremos las siguientes identidades:

$$e^{2us-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{s^n}{n!}, \quad (5.2.26)$$

$$e^{-u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{2isu-s^2} ds. \quad (5.2.27)$$

La primera corresponde a la función generatriz de los polinomios de Hermite (ver ecuación (2.5.4)) que es válida para  $u, s \in \mathbb{C}$ , mientras que la segunda corresponde a la integral Gaussiana [15, Fórmulas 9.241(1) y 9.251], que es válida para  $u \in \mathbb{C}$ . Usando la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite (ver ecuación (2.5.3)) tenemos:

$$H_n(u) = \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}} e^{u^2} \int s^n e^{2iuis-s^2} ds.$$

Por la definición de  $\psi_n$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\rho) e^{-in\alpha} \psi_n(u) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha} \psi_n(u) \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi}\rho) e^{-\pi\rho^2} \\
&= 2^{1/4} e^{-\pi\rho^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha} \psi_n(u) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi}\rho) \\
&= 2^{1/4} e^{-\pi\rho^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha} \psi_n(u) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}} e^{2\pi\rho^2} \int s^n e^{2i\sqrt{2\pi}\rho s - s^2} ds \\
&= 2^{1/4} e^{-\pi\rho^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha} \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi}u) e^{-\pi u^2} \frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi} \sqrt{2^n n!}} e^{2\pi\rho^2} \int s^n e^{2i\sqrt{2\pi}\rho s - s^2} ds \\
&= 2^{1/2} e^{\pi\rho^2} e^{-\pi u^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha} \frac{(-i)^n}{n!} H_n(\sqrt{2\pi}u) \int s^n e^{2i\sqrt{2\pi}\rho s - s^2} ds \\
&= e^{\pi\rho^2} e^{-\pi u^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-is e^{-i\alpha})^n}{n!} H_n(\sqrt{2\pi}u) \right) e^{2i\sqrt{2\pi}\rho s - s^2} ds.
\end{aligned}$$

Debemos verificar el paso de la sumatoria dentro de la integral en la última igualdad. Observemos que

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} (-is e^{-i\alpha})^n \frac{1}{n!} H_n(\sqrt{2\pi}x)$$

es similar a (5.2.26). La serie en la igualdad (5.2.26) es el producto de las series de Taylor de  $e^{2xz}$  y  $e^{-z^2}$ , como funciones de  $z$ . Los coeficientes  $H_n(x)$  claramente son dominados por el producto de las expansiones de  $e^{2|x||z|}$  y  $e^{|z|^2}$ . Así, toda suma parcial de la serie de la igualdad (5.2.26) es dominada por  $e^{2|x||z|} e^{|z|^2}$ . Si aplicamos esto a  $S$ , acotamos las sumas parciales de  $S$  por una función integrable. Esto justifica el intercambio entre la sumatoria y la integral. Combinando ahora con (5.2.26) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\rho) e^{-in\alpha} \psi_n(u) &= e^{\pi\rho^2} e^{-\pi u^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-is e^{-i\alpha})^n}{n!} H_n(\sqrt{2\pi}u) \right) e^{2i\sqrt{2\pi}\rho s - s^2} ds \\
&= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int e^{2\sqrt{2\pi}u(-is e^{-i\alpha}) - (-is e^{-i\alpha})^2} e^{2i\sqrt{2\pi}\rho s - s^2} ds \\
&= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int e^{-2i\sqrt{2\pi}us e^{-i\alpha} + s^2 e^{-i2\alpha}} e^{2i\sqrt{2\pi}\rho s - s^2} ds \\
&= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int e^{-s^2(1 - e^{-i2\alpha})} e^{2i\sqrt{2\pi}s(\rho - u e^{-i\alpha})} ds.
\end{aligned}$$

Usando el siguiente cambio de variables  $\tau = s\sqrt{1 - e^{-i2\alpha}}$  en la última integral:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\rho) e^{-in\alpha} \psi_n(u) = e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi(1 - e^{-i2\alpha})}} \int e^{-\tau^2} e^{2i\sqrt{2\pi} \frac{(\rho - u e^{-i\alpha})\tau}{\sqrt{1 - e^{-i2\alpha}}}} d\tau.$$

Usando la igualdad (5.2.27) tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\rho) e^{-in\alpha} \psi_n(u) &= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{\frac{2}{1 - e^{-i2\alpha}}} e^{-2\pi \frac{(\rho - u e^{-i\alpha})^2}{1 - e^{-i2\alpha}}} \\ &= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{\frac{e^{i\alpha}}{i \sin \alpha}} e^{-\frac{\pi e^{i\alpha}}{i \sin \alpha} (\rho - u e^{-i\alpha})^2} \\ &= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{i \sin \alpha}} e^{-\frac{\pi e^{i\alpha}}{i \sin \alpha} (\rho^2 - 2\rho u e^{-i\alpha} + u^2 e^{-2i\alpha})} \\ &= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{1 - i \cot \alpha} e^{-\frac{\pi}{i \sin \alpha} (\rho^2 e^{i\alpha} - 2\rho u + u^2 e^{-i\alpha})} \\ &= e^{\pi(\rho^2 - u^2)} \sqrt{1 - i \cot \alpha} e^{-\frac{\pi}{i \sin \alpha} (\rho^2 (\cos \alpha + i \sin \alpha) - 2\rho u + u^2 (\cos \alpha - i \sin \alpha))} \\ &= \sqrt{1 - i \cot \alpha} e^{-2\pi i (-\frac{1}{2}\rho^2 \cot \alpha + \rho u \csc \alpha - \frac{1}{2}u^2 \cot \alpha)}, \end{aligned}$$

probando el lema. □

Hacemos notar que para demostrar este lema, pusimos una restricción a los valores de  $\alpha$ . Esto es porque el primer término proviene de la definición de la transformada de Fourier fraccionaria para argumentos  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , mientras que el segundo término es válido para  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Por lo tanto, ahí la ortogonalidad de las funciones de Gauss-Hermite en  $L^2(\mathbb{R})$  se pierde.

Por el lema 5.2.7 y el teorema 5.2.5 deducimos el siguiente resultado, con el cual mostramos el conocido y equivalente resultado de FrFT en términos de la integral de Riemann.

**Corolario 5.2.8.** *Dado  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  denotamos  $a := \frac{2}{\pi}\alpha$ . Tenemos para todo  $\rho \in \mathbb{R}$ ,*

$$[T(a)f](\rho) = \sqrt{1 - i \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\pi(\rho^2 \cot \alpha - 2\rho u \csc \alpha + u^2 \cot \alpha)} du. \quad (5.2.28)$$

En la práctica, la restricción en los valores de  $\alpha$  tiene ciertas consecuencias para la transformada de Fourier fraccionaria así como se define en (5.2.28). Por ejemplo, el comportamiento de la transformada de Fourier fraccionaria en los casos bordes  $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$  no es obvio. Más aún, necesitamos especificar cuál rama de  $\sqrt{1 - i \cot \alpha}$  se está considerando. Este problema fue tratado en [20], primero considerando los valores de  $\alpha$  en el intervalo  $(-\pi, \pi)$  y luego tomando los valores en el borde por separado. En contraste,

nuestro enfoque por medio de grupos fuertemente continuos produce una definición de la transformada de Fourier fraccionaria válida para todo los valores de  $a \in \mathbb{R}$ .

En el siguiente teorema, resumimos algunos de los comentarios anteriores y obtenemos nuevas propiedades e identidades usando el contexto de grupos fuertemente continuos. Como es estándar, denotaremos por  $\sigma(\mathcal{H})$  el espectro y por  $\sigma_p(\mathcal{H})$  el espectro puntual de  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 5.2.9.** *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

- I. *El generador infinitesimal del grupo de Fourier es  $\mathcal{H}$ .*
- II. *El grupo de Fourier es unitario, esto es  $T(t)^* = T(-t)$ .*
- III.  *$\sigma(\mathcal{H}) = \sigma_p(\mathcal{H}) \subset i\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ .*
- IV. *La siguiente identidad se cumple:*

$$P_n f = \frac{1}{4} \int_0^4 e^{-in\frac{\pi}{2}s} [T(s)f] ds.$$

*En otras palabras,  $P_n f$  es el  $n$ -ésimo coeficiente de la transformada de Fourier fraccionaria  $T(t)$ .*

- V. *Para todo  $\lambda \notin i\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ , tenemos:*

$$(\lambda I - \mathcal{H})^{-1} f = \frac{1}{1 - e^{-4\lambda}} \int_0^4 e^{-\lambda s} [T(s)f] ds.$$

- VI. *Para todo  $f \in D(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}f = \sum_{n=1}^{\infty} -in\frac{\pi}{2} P_n f$ .*

*Demostración.* En efecto,

- I Sea  $A_T$  el generador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Entonces, por la definición de  $A_T$ , de  $T(t)$  y III de la proposición 5.2.3 tenemos:

$$\begin{aligned} A_T \psi_m &= T'(t)|_{t=0} \psi_m = \sum_{n=0}^{\infty} -in\frac{\pi}{2} e^{-in\frac{\pi}{2}t}|_{t=0} P_n \psi_m = \sum_{n=0}^{\infty} -in\frac{\pi}{2} P_n \psi_m = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H} P_n \psi_m = \mathcal{H} \psi_m, \end{aligned}$$

lo que muestra que  $A_T = \mathcal{H}$ .

II Ya que  $\mathcal{H}^* = -\mathcal{H}$ , esto es,  $\mathcal{H}$  es autoadjunto. La afirmación II sigue directamente de la definición.

III Las demás afirmaciones son consecuencia de la periodicidad de  $T(t)$ , ver [7, páginas 266-267].

□

Para finalizar esta sección, aprovecharemos la variedad de fórmulas de aproximación de la teoría de semigrupos fuertemente continuos para obtener el próximo resultado. Este será la base para la descripción de una nueva fórmula para reconstruir la magnetización de la señal de MR, dada en la sección 7.3.

**Teorema 5.2.10.** *Para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tenemos en la norma de  $L^2$ :*

$$T(t)f = \lim_{q \rightarrow \infty} e^{-tq} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m q^m}{m!} T\left(\frac{m}{q}\right) f.$$

*Demostración.* Ya que  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  es un semigrupo fuertemente continuo que cumple que  $\|T(t)\| \leq 1$ , de [7, p.216] tenemos que:

$$T(t)f = \lim_{q \rightarrow \infty} e^{-tq} e^{tqT(1/q)} f, \quad t \geq 0,$$

luego mediante expansión en serie de Taylor de la función exponencial, y las propiedades de semigrupos tenemos que

$$e^{-tq} e^{tqT(1/q)} = e^{-tq} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tqT(1/q))^m}{m!} = e^{-tq} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m q^m T(1/q)^m}{m!} = e^{-tq} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m q^m T(m/q)}{m!}$$

□

### 5.3. Comentarios sobre la transformada de Fourier fraccionaria

Con el desarrollo de la transformada de Fourier fraccionaria y los conceptos relacionados, vemos que el dominio de frecuencia es simplemente un caso especial de un continuo de dominios de la transformada de Fourier fraccionaria, que está íntimamente relacionado a la representación tiempo–frecuencia (o espacio–frecuencia). Cada propiedad y aplicación de la transformada de Fourier viene de un caso especial de la transformada de Fourier fraccionaria. En cada área en que se aplican los conceptos de transformada de Fourier y dominio de frecuencia, existe una potencial generalización

mediante el uso de la transformada de Fourier fraccionaria.

La transformada de Fourier fraccionaria ha encontrado un papel importante dentro del estudio de sistemas ópticos, conocidos como *óptica de Fourier*, con aplicaciones en *procesamiento de información óptica*, permitiendo una reformulación de esta área en una forma mucho más general. También permitió una generalización de la noción de dominio de frecuencia y acrecentó la comprensión del plano de tiempo–frecuencia, dos conceptos centrales en el *análisis de señales* y *procesamiento de señales*. Se espera que tenga impacto en el entendimiento, de una forma más profunda o en nuevas aplicaciones, de las áreas en que la transformada de Fourier juega un rol importante, y que tome un lugar entre las herramientas matemáticas clásicas para la física e ingeniería.

# Capítulo 6

## Conexión entre la FrFT y MRI

Como vimos en la sección anterior, la transformada de Fourier fraccionaria ofrece un contexto que extiende la transformada de Fourier clásica a través de la transformada de orden  $a$ . Sin embargo, no siempre es claro cómo asignarle una interpretación física a esta variable. En óptica, por ejemplo, existe una interpretación natural, como se mencionó anteriormente, para el orden de la transformada, por ejemplo ver [21], [23] o [24]. En esta sección, mostraremos que en Imágenes de Resonancia Magnética, el orden está relacionado con la distorsión introducida por las inhomogeneidades cuadráticas del campo. Esta conexión muestra que la transformada de Fourier fraccionaria extiende el marco en MRI, de campos homogéneos a campos cuadráticos. Recordemos, que una de las dificultades técnicas de MRI es producir un campo magnético que simultáneamente sea alto y homogéneo.

La piedra angular de MRI es la señal de Resonancia Magnética  $s(t)$  que está relacionada con la magnetización del objeto mediante su transformada de Fourier. Para clarificar esta exposición, ignoraremos las relajaciones  $T_1$  y  $T_2$  (ver sección 3.2) y consideraremos la demodulación de la frecuencia de Larmor como se hizo en la sección 3.4. En consecuencia, la ecuación de la señal de MR generada por un objeto unidimensional en un campo magnético uniforme  $B(u) = B_0$  es:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i k(t)u} du, \quad (6.0.1)$$

donde  $k(t)$  es una función predeterminada que representa como se realizan las medidas, es decir la *trayectoria* que recorre en el dominio de Fourier. Para una discusión de algunas elecciones comunes de  $k(t)$ , ver las secciones 6.1 y 6.2. La ecuación (6.0.1) es llamada *ecuación de la señal*, y esencialmente nos dice que la transformada de Fourier de  $f$  evaluada en  $k(t)$  es igual a  $s(t)$ . Ahora consideremos un campo inhomogéneo, esto es, sea  $B(u) = B_0 + p(u)$  una función en el espacio no constante. En este caso, la

igualdad (6.0.1) será:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i(k(t)u+p(u)t)} du.$$

Si esta inhomogeneidad  $p(u)$  corresponde a un polinomio de segundo orden  $p(u) = p_2u^2 + p_1u + p_0$ , entonces la ecuación de la señal será:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i(k(t)u+(p_2u^2+p_1u+p_0)t)} du \\ &= e^{-2\pi ip_0t} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\pi(-2p_2tu^2-2(k(t)+p_1t)u)} du. \end{aligned} \quad (6.0.2)$$

Del corolario 5.2.8, la transformada de Fourier fraccionaria  $\mathcal{F}^a$  ( $0 < a < 2$ ) de la función  $f(u)$  se puede escribir como:

$$f_a(\rho) = \mathcal{F}^a\{f\}(\rho) = C_\alpha(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\pi(u^2 \cot(\alpha) - 2\rho u \csc(\alpha))} du, \quad (6.0.3)$$

donde:

$$C_\alpha(\rho) = e^{i\pi\rho^2 \cot(\alpha)} \sqrt{1 - i \cot(\alpha)}, \quad \alpha = a\pi/2. \quad (6.0.4)$$

Consideremos el siguiente cambio de variables:

$$\alpha(t) = \cot^{-1}(-2p_2t), \quad (6.0.5)$$

$$\rho(t) = \frac{k(t) + p_1t}{\csc(\alpha(t))} = \frac{k(t) + p_1t}{\sqrt{1 + 4p_2^2t^2}}. \quad (6.0.6)$$

Es claro que por medio de esta relación, podemos transformar (6.0.2) en la FrFT de  $f$  de orden variable. Se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 6.0.1.** *Para un campo de inhomogeneidad cuadrática, la señal  $s(t)$  multiplicada por un factor peso dependiente de  $t$  es el muestreo de la transformada de Fourier fraccionaria de orden variable.*

*Demostración.* Consideremos  $\alpha(t)$  y  $\rho(t)$  como se definió en (6.0.5) y (6.0.6). Si usamos la rama de la arcotangente tal que  $\alpha(t) \in [0, \pi]$ , entonces la cosecante de  $\alpha(t)$  será mayor que cero para todos los valores de  $t$  y en consecuencia podemos escribir:

$$\begin{aligned} -2p_2t &= \cot(\alpha(t)), \\ -2(k(t) + p_1t) &= -2\rho(t) \csc(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (6.0.2), tenemos

$$s(t) = e^{-i2\pi p_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\pi(u^2 \cot(\alpha) - 2\rho u \csc(\alpha))} du, \quad (6.0.7)$$

por simplicidad de notación, hemos obviado la dependencia de la variable  $t$ . Usando (6.0.3) y (6.0.4) en (6.0.7) obtenemos la relación:

$$s(t) = e^{-i2\pi p_0 t} C_\alpha(\rho)^{-1} \mathcal{F}^\alpha(f)(\rho),$$

o equivalentemente

$$\mathcal{F}^{\alpha(t)}(f)(\rho(t)) = e^{i2\pi p_0 t} C_{\alpha(t)}(\rho(t)) s(t), \quad (6.0.8)$$

probando el teorema. □

Es importante notar que normalmente  $k(t) = 0$  para  $t < 0$ , esto es, el sistema es causal. Por lo tanto, si elegimos la rama de la arcotangente tal que  $\alpha \in (0, \pi)$ , entonces  $\alpha(0) = \pi/2$  ( $a = 1$ ) y  $\csc(\alpha(t)) > 1$ . En consecuencia, para una cantidad finita de valores de  $t$  estamos lejos de  $a = 0$  o  $a = 2$ , donde eventualmente podríamos tener problemas con la definición integral de la transformada de Fourier fraccionaria en la igualdad (6.0.3).

La definición de  $\alpha$  y  $\rho$  en (6.0.5) y (6.0.6) proporciona una trayectoria paramétrica  $(\rho(t), \alpha(t))$  en el espacio que llamaremos  $\rho$ - $\alpha$  espacio. Ya que  $\alpha$  es un ángulo, este espacio es convenientemente representado en coordenadas polares. Asumiendo que  $p_2 < 0$  (ver sección 6.1) y en virtud de la discusión previa, la trayectoria en el  $\rho$ - $\alpha$  espacio comienza inmediatamente después de la excitación ( $t = 0$ ) en el *eje de frecuencia* o *eje de Fourier* ( $\alpha = \pi/2$  o  $a = 1$ ) y avanzando el tiempo se curva hacia *eje del objeto* ( $\alpha = a = 0$ ).

En las siguientes secciones analizaremos algunas trayectorias  $k(t)$  comunes cuando se distorsionan por un campo magnético cuadrático. Particularmente, analizaremos esta distorsión usando el  $\rho$ - $\alpha$  espacio de las trayectorias descritas.

## 6.1. Gradiente constante

Una trayectoria común supone que  $k(t) = 0$  para  $t < 0$  y  $k(t) = G_0 t$  para  $t \geq 0$ , con  $G_0$  constante. Físicamente, esto corresponde a un gradiente *readout* (gradiente de codificación en frecuencia) constante. Por simplicidad, supongamos que la inhomogeneidad

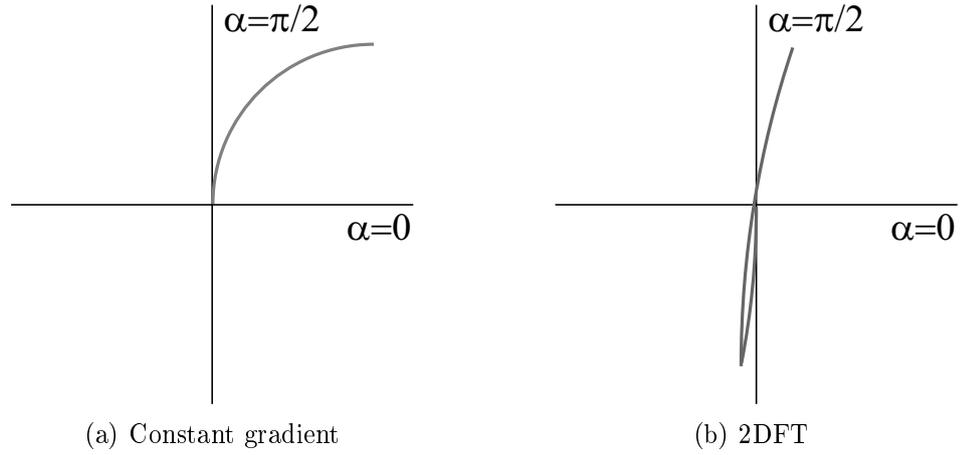


Figura 6.1: Ejemplo de trayectorias descritas en el  $\rho$ - $\alpha$  espacio.

es puramente cuadrática, esto es,  $p(u) = p_2 u^2$ . Además, supongamos que  $p_2 < 0$ , que se asemeja al típico caso en que la intensidad del campo  $B_0$  es mayor en el centro del imán. Sin pérdida de generalidad los términos lineales y constantes son ignorados, porque el primero es equivalente a un cambio en  $G_0$  y es fácilmente corregido (ver [16]) mientras que el segundo se puede corregir con una apropiada modulación de la señal MR. Entonces la trayectoria en el espacio  $\rho$ - $\alpha$  es:

$$\alpha(t) = \cot^{-1}(-2p_2 t) = \cot^{-1}(2|p_2|t),$$

$$\rho(t) = k(t) \sin \alpha(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ G_0 t \sin \alpha(t) & t \geq 0. \end{cases}$$

Notemos que:

$$G_0 t \sin \alpha(t) = \frac{G_0}{2|p_2|} \cot \alpha(t) \sin \alpha(t) = \frac{G_0}{2|p_2|} \cos \alpha(t).$$

En consecuencia, la trayectoria  $\rho$ - $\alpha$  es una circunferencia centrada en  $(G_0/4|p_2|, 0)$ . La figura 6.1(a) muestra esta trayectoria comenzando en  $t = 0$  en el origen y acercándose asintóticamente al eje del objeto cuando  $t$  crece.

Para pequeños valores de  $t$ , la trayectoria se aleja un poco del eje de frecuencia, y por lo tanto las distorsiones debidas a la variación del campo son pequeñas. Esto es consistente con el conocimiento general que readouts cortos son menos sensibles a inhomogeneidades. Más aún, cuando  $p_2$  tiende a cero las inhomogeneidades del campo se desvanecen, y en el centro de la circunferencia ubicado en  $G_0/4|p_2|$  tiende a infinito. En consecuencia, la trayectoria  $\rho$ - $\alpha$  se convierte en una línea recta en la dirección de

la frecuencia:

$$\alpha(t) \equiv \frac{\pi}{2},$$

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ G_0 t & t \geq 0. \end{cases}$$

## 6.2. Estándar 2DFT readout

Otra trayectoria comúnmente usada asume que  $k(t)$  decrece linealmente hasta que un tiempo  $t_0$  dado es alcanzado, y entonces aumenta pasando por el origen, un procedimiento estándar en 2DFT readouts (ver [4]). Concretamente:

$$k(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -G_0 t & 0 \leq t < t_0 \\ G_0(t - 2t_0) & t_0 \leq t, \end{cases}$$

donde  $G_0$  es una constante que representa la magnitud del gradiente readout y  $t_0$  es el instante donde cambia de signo. Suponiendo nuevamente que la inhomogeneidad es  $p(u) = p_2 u^2$  con  $p_2 < 0$ , la trayectoria en el espacio  $\rho$ - $\alpha$  es dada por:

$$\alpha(t) = \cot^{-1}(-2p_2 t),$$

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4p_2^2 t^2}} \times \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -G_0 t & 0 \leq t < t_0 \\ G_0(t - 2t_0) & t_0 \leq t. \end{cases}$$

No es difícil ver que:

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -G_0 t \sin \alpha(t) & 0 \leq t < t_0 \\ G_0(t - 2t_0) \sin \alpha(t) & t_0 \leq t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\frac{G_0}{2|p_2|} \cos \alpha(t) & 0 \leq t < t_0 \\ \frac{G_0}{2|p_2|} (\cos \alpha(t) - 2 \cot \alpha_0 \sin \alpha(t)) & t_0 \leq t, \end{cases}$$

donde  $\alpha_0 = \alpha(t_0)$ . Esta trayectoria es formada por dos partes de circunferencias, una para frecuencias negativas centradas en  $(-G_0/4|p_2|, 0)$  que continúa con otra centrada en  $(G_0/4|p_2|, -G_0 t_0)$ , como se muestra en la Figura 6.1(b).

Para resumir este análisis, notemos que en caso de un campo homogéneo, las medidas de la magnetización del objeto siempre se realizan en el dominio de Fourier. En contraste, el análisis en el  $\rho$ - $\alpha$  espacio muestra que campos cuadráticos inducen una especie de “tiempo–evolución” en el dominio donde las mediciones se llevan a cabo. Esto se puede estudiar observando la evolución del orden  $a$  de la transformada a través del tiempo. Esta destacable conexión muestra que la transformada de Fourier fraccionaria no sólo nos permite manejar las imágenes de resonancia magnética con campos cuadráticos, sino que además introduce una interpretación física del orden  $a$  de la transformada.

## Capítulo 7

# Reconstrucción vía transformada de Fourier fraccionaria

El problema de reconstrucción requiere conocer la pseudo frecuencia y el orden de la transformada con que se adquirieron los datos. Estos pueden determinarse usando la ecuación (6.0.6). El objeto será la solución de la inversa de (6.0.8) (ignorando la constante  $p_0$ )

$$\begin{aligned}\hat{f}(u) &= \mathcal{F}^{-a}\{f_{a(t)}(\rho(t))\}(u) \\ &= \mathcal{F}^{-a}\{C_{\alpha(t)}(\rho(t))s(t)\}(u).\end{aligned}$$

En esta expresión se ve explícitamente la dependencia de  $\alpha$ . Esta dependencia implica que el orden fraccionario cambia con el tiempo, y por lo tanto no es posible obtener la inversa de la transformada de Fourier fraccionaria.

En este capítulo analizaremos tres diferentes enfoques: Reconstrucción por transformada de Fourier inversa (ver sección 4.4), reconstrucción por transformada de Fourier fraccionaria, y reconstrucción por transformada de Fourier fraccionaria de orden variable. La diferencia entre estos métodos es la suposición que se hace de donde se ubican los datos en el  $\rho$ - $\alpha$  espacio. En la figura 7.1 se muestra la trayectoria en el  $\rho$ - $\alpha$  espacio y los esquemas de reconstrucción para un readout en 2DFT.

Además en este capítulo, presentaremos un novedoso método de reconstrucción desarrollado en [1], en el que se propone una reconstrucción en base a la transformada de Fourier fraccionaria, el cual reconstruye la magnetización del objeto bajo el supuesto que pueden existir inhomogeneidades del tipo cuadrático en el campo magnético. Este método constituye una generalización del caso de reconstrucción por medio de la transformada de Fourier.

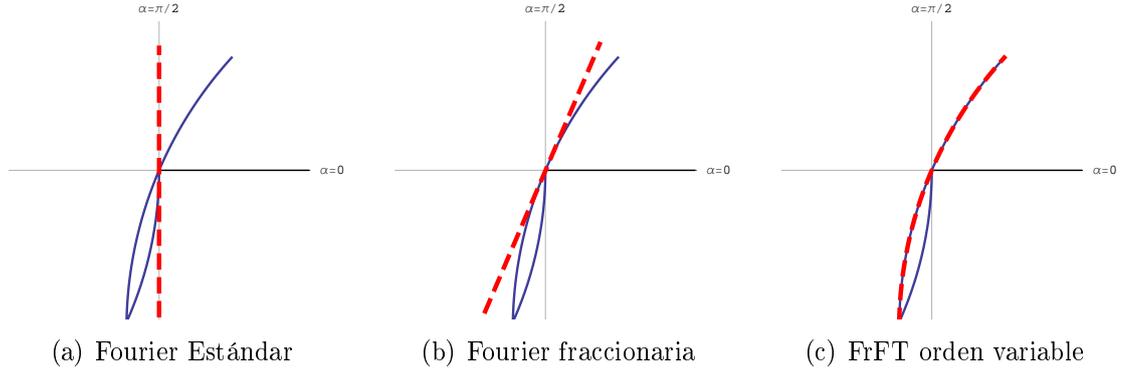


Figura 7.1: Ejemplo unidimensional de una trayectoria 2DFT (línea continua) en representación polar del espacio  $\rho$ - $\alpha$  y la interpretación de reconstrucción (línea punteada).

## 7.1. Transformada de Fourier fraccionaria inversa

Este método supone que las muestras son adquiridas a un orden constante, que puede ser interpretado como una aproximación tangente en el plano  $\rho$ - $\alpha$ . Este enfoque tiene dos ventajas:

- I. La reconstrucción y las muestras se ubican “cerca”.
- II. La expresión inversa, es exactamente la inversa de la FrFT.

$$\hat{f}_{\bar{a}}(u) = \mathcal{F}^{-\bar{a}}\{C_{\bar{a}}(\rho(t))s(t)\}(u),$$

donde  $\bar{a}$  es el orden tangente (fijo). Usando la igualdad (6.0.3) y la definición de señal bajo un campo cuadrático, podemos ver que

$$\hat{f}_{\bar{a}}(u) = e^{-i\pi u^2 \cot(\bar{\alpha})} |\csc(\bar{\alpha})| \int s(t) e^{i2\pi u \rho \csc(\bar{\alpha})} d\rho.$$

## 7.2. Transformada de Fourier fraccionaria de orden variable

Este otro método utiliza la posición original de adquisición de los datos. Para resolver el problema de orden variable podemos observar el caso discreto, que se ajusta bien con el muestreo (también discreto) y proporciona una reconstrucción continua. Cada muestra  $(\rho_n, \alpha_n)$  en el  $\rho$ - $\alpha$  espacio adquirido en el tiempo  $t_n$  corresponde a un

coeficiente de la FrFT de orden  $a_n = 2\alpha_n/\pi$ . Estos coeficientes pueden ser entendidos como la expansión del objeto representado en una base formada por funciones chirp. Estas funciones son dadas por la inversa de la FrFT de orden  $a_n$  de una función delta centrada en  $\rho = \rho_n$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{-a_n}(u) &= \mathcal{F}^{-a_n}\{\delta(\rho - \rho_n)\}(u) \\ &= C_{a_n}^*(\rho_n) e^{-i\pi(u^2 \cot(\alpha_n) - 2u\rho_n \csc(\alpha_n))},\end{aligned}$$

donde  $*$  denota el complejo conjugado. Recordemos que las muestras (ignorando la constante de desplazamiento  $p_0$ ) se define por:

$$f_{a_n}(\rho_n) = C_{\alpha_n}(\rho_n)s(t_n),$$

luego tenemos una estimación del objeto como una suma ponderada de todas las contribuciones

$$\begin{aligned}\hat{f}_\alpha(u) &= \sum_{n=1}^N f_{a_n} \Delta_{a_n}(u) \\ &= \sum_{n=1}^N |\csc(\alpha_n)| s(t_n) e^{-i\pi(u^2 \cot(\alpha_n) - 2u\rho_n \csc(\alpha_n))}.\end{aligned}$$

Aquí suponemos un muestreo equiespaciado, de no ser así sería necesario incorporar un factor extra (ver [3, sección 4.3]).

El objeto  $\hat{f}_\alpha(u)$  puede ser evaluado para cualquier valor de  $u$ . Notemos que si sustituimos  $\alpha_n$  por  $\pi/2$  obtenemos la conocida fórmula de transformada de Fourier discreta (DFT).

La extensión de esta fórmula de reconstrucción a dos dimensiones es de la forma:

$$\hat{f}(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^N |\det(\mathbf{B}_n)| s(t_n) e^{-i\pi(\mathbf{u}^\top \mathbf{A}_n \mathbf{u} - 2\mathbf{u}^\top \mathbf{B}_n \rho_n)},$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \csc(\alpha_u) & 0 \\ 0 & \csc(\alpha_v) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \cot(\alpha_u) & 0 \\ 0 & \cot(\alpha_v) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 7.3. Método propuesto

En los capítulos anteriores describimos como la transformada de Fourier fraccionaria se presta para el estudio de la ecuación de la señal resultante cuando se consideran campos cuadráticos. En este capítulo, abordamos el problema de reconstrucción de la magnetización del objeto del que se toma el muestreo. Observemos que en presencia de inhomogeneidades de campo cuadráticas, los datos de muestreo no corresponden a una frecuencia específica  $k$  como en el caso de Fourier no distorsionado, pero sí a una frecuencia fraccionaria  $u$  con orden de transformada  $a$ . Formalmente, este problema puede describirse como: Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$  la magnetización subyacente, y sea  $M$  un número entero positivo fijo. El problema es encontrar una aproximación  $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$  del muestreo

$$S^{a_m}(\rho_m) = \mathcal{F}^{a_m}(f)(\rho_m),$$

donde  $\{(\rho_m, a_m)\}_{m=-M}^M$  es una sucesión de frecuencias fraccionarias  $\rho_m$  asociadas a su orden de transformada  $a_m$ .

En esta sección usaremos el marco teórico introducido en la sección 5.2 para proponer un nuevo método para resolver este problema. Comenzaremos con el siguiente resultado:

**Teorema 7.3.1.** *Para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $a \in \mathbb{R}$  fijo, tenemos:*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathcal{F}^a(f), \psi_n \rangle e^{in\frac{\pi}{2}a} \psi_n, \quad (7.3.1)$$

donde la igualdad es entendida en norma de  $L^2$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Para todo  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tenemos por la proposición 5.2.3:

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} P_n g = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, \psi_n \rangle \psi_n.$$

Tomando  $g = \mathcal{F}^a(f)$ , obtenemos:

$$\mathcal{F}^a(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathcal{F}^a(f), \psi_n \rangle \psi_n.$$

Usando el hecho de que  $\mathcal{F}^a \equiv T(a) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ , tenemos:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathcal{F}^a(f), \psi_n \rangle \mathcal{F}^{-a}(\psi_n).$$

Ya que  $P_n \psi_m = \psi_n$  si  $n = m$  y 0 en otro caso, deducimos que  $\mathcal{F}^{-a}(\psi_n) = e^{in\frac{\pi}{2}a} \psi_n$ , y por lo tanto:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathcal{F}^a(f), \psi_n \rangle e^{in\frac{\pi}{2}a} \psi_n. \quad (7.3.2)$$

□

Es claro de la igualdad (7.3.1) que la sucesión discreta de muestreo  $\{S^{a_m}(\rho_m)\}_{m=-M}^M$  no proporciona información suficiente para reconstruir la función  $f$  usando la inversa de la FrFT. Como resultado, la reconstrucción no es única y de hecho es un problema de interpolación. El enfoque estándar es considerar que el muestreo es suficiente para aproximar los productos internos en la ecuación (7.3.1) como:

$$\langle \mathcal{F}^a(f), \psi_n \rangle \approx \sum_{m=-M}^M S^{a_m}(\rho_m) \psi_n(\rho_m) \Delta \rho_m, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (7.3.3)$$

donde hemos reemplazado las frecuencias fraccionarias  $\rho$  y el orden de la transformada  $a$  por los valores de la sucesión  $\{S^{a_m}(\rho_m)\}_{m=-M}^M$  y añadido  $\Delta \rho_m$  como una adecuada aproximación finita del diferencial  $d\rho$ . Concretamente, aproximamos la integral del producto interno por medio de las sumas de Riemann. Sin embargo, esta afirmación no tiene una interpretación formal en nuestro marco. Esto es porque la igualdad (7.3.1) ha sido entendida en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$  y por lo tanto no hay un camino consistente para interpretar puntualmente los valores de la función. Sin embargo, la expresión (7.3.3) se entenderá como una definición de aproximación del producto interno usando sumas de Riemann, que nos permite superar este problema conceptual. Por simplicidad, en lo que sigue asumiremos que  $\Delta \rho_m \equiv 1$ .

En lo que sigue, denotaremos (ver lema 5.2.7):

$$K_\rho^\alpha(u) := \sqrt{1 - i \cot \alpha} e^{i\pi(\rho^2 \cot \alpha - 2\rho u \csc \alpha + u^2 \cot \alpha)}. \quad (7.3.4)$$

Del teorema 7.3.1, deducimos la siguiente fórmula de reconstrucción:

$$f(u) \approx \tilde{f}(u) = \sum_{m=-M}^M S^{a_m}(\rho_m) K_{\rho_m}^{-\frac{\pi}{2} a_m}(u). \quad (7.3.5)$$

En efecto, reemplazando (7.3.3) en (7.3.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} f(u) &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=-M}^M S^{a_m}(\rho_m) \psi_k(\rho_m) \right) e^{in\frac{\pi}{2} a_m} \psi_n(u) \\ &= \sum_{m=-M}^M S^{a_m}(\rho_m) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\rho_m) e^{in\frac{\pi}{2} a_m} \psi_n(u) \right), \end{aligned}$$

y por lo tanto la expresión (7.3.5) se desprende del lema 5.2.7.

Claramente, la reconstrucción  $\tilde{f}$  dada en (7.3.5) no es idéntica a la imagen real  $f$ . Notemos que:

$$\tilde{f}(u) = \sum_{m=-M}^M S^{a_m}(\rho_m) \sqrt{1 + i \cot \alpha_m} e^{-i\pi(\rho_m^2 \cot \alpha_m - 2\rho_m u \csc \alpha_m + u^2 \cot \alpha_m)}, \quad (7.3.6)$$

donde  $\alpha_m = \pi a_m/2$ . Observemos que la fórmula anterior coincide con el enfoque de la transformada de Fourier discreta dada en [5, sección 6.7]. Por otro lado, esto corresponde a una extensión directa del método de reconstrucción de Fourier apodizada en MRI (ver la ecuación (4.4.22)) que se recupera en el caso  $\alpha_m = \pi/2$ . En efecto, en este caso tenemos  $\rho_m = k_m$  y  $a_m \equiv 1$  de modo que:

$$f(u) \approx \tilde{f}(u) = \sum_{m=-M}^M S(k_m) e^{2\pi i k_m u}, \quad (7.3.7)$$

donde denotamos  $S(k_m) \equiv S^1(k_m)$ .

Un punto interesante ahora es que, utilizando las fórmulas de aproximación para semigrupos, podemos obtener otros métodos de reconstrucción. Entre todas las posibles fórmulas de aproximación que se pueden obtener de esta teoría, usaremos el teorema 5.2.10 para deducir el siguiente resultado.

**Teorema 7.3.2.** Para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y cualquier  $a \in \mathbb{R}$  tenemos,

$$f = \lim_{q \rightarrow \infty} e^{aq} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-aq)^n}{n!} e^{-i\frac{n}{q}m} \langle \mathcal{F}^a f, \psi_m \rangle \psi_m,$$

donde la igualdad es entendida en la norma de  $L^2$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Usando la notación de teoría de semigrupos, definimos  $g := T(a)f \in L^2(\mathbb{R})$ . Del teorema 5.2.10 y la definición 5.2.6 tenemos:

$$T(-a)g = \lim_{q \rightarrow \infty} e^{aq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-aq)^n}{n!} T\left(\frac{n}{q}\right)g.$$

Notemos que

$$T\left(\frac{n}{q}\right)g = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\frac{n}{q}m} P_m g = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i\frac{n}{q}m} \langle g, \psi_m \rangle \psi_m.$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} f = T(-a)g &= \lim_{q \rightarrow \infty} e^{aq} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-aq)^n}{n!} e^{-i\frac{n}{q}m} \langle g, \psi_m \rangle \psi_m \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} e^{aq} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-aq)^n}{n!} e^{-i\frac{n}{q}m} \langle T(a)f, \psi_m \rangle \psi_m. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando  $T(a)f = \mathcal{F}^a(f)$  obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Tomando la ecuación (7.3.3). Del teorema 7.3.2 se deduce la siguiente fórmula de reconstrucción:

$$\tilde{f}(u) = \lim_{q \rightarrow \infty} e^{a_m q} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a_m q)^n}{n!} S^{a_m}(u_m) K_{u_m}^{\frac{n}{q}}(u).$$

Observe que en el caso particular de Fourier  $a_m = 1$  y  $\rho_m = k_m$ , obtenemos una nueva fórmula de reconstrucción, sólo en términos del muestreo de la transformada de Fourier:

$$\tilde{f}(u) = \lim_{q \rightarrow \infty} e^q \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)^n}{n!} S(k_m) K_{k_m}^{\frac{n}{q}}(u), \quad (7.3.8)$$

que en forma estándar se escribe:

$$\tilde{f}(u) = \lim_{q \rightarrow \infty} e^q \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)^n}{n!} S(k_m) e^{-i\pi(k_m^2 \cot(\frac{n}{q}) - 2k_m u \csc(\frac{n}{q}) + u^2 \cot(\frac{n}{q}))}.$$

Para implementar la fórmula de reconstrucción definida en el teorema 7.3.2, debemos considerar un valor finito para  $q$ . En este caso, la aproximación tiene dos interesantes características. Primero, en la reconstrucción de Fourier apodizada, las adquisiciones son multiplicadas por un conjunto de escalares para suprimir las altas frecuencias contenidas en la reconstrucción. Este conjunto de escalares normalmente se escoge manualmente. En la aproximación propuesta estos coeficientes surgen de manera natural y son independientes del número de muestras, la frecuencia de muestreo o el contenido de frecuencia de la señal original. Segundo, en la reconstrucción de Fourier apodizada los *muestreos* son multiplicados por el conjunto de escalares, mientras que en este método las exponenciales son multiplicadas por el conjunto de escalares. También es interesante notar que las exponenciales corresponden a diferentes órdenes de la transformada que son mezclados para producir una reconstrucción adecuada que, en virtud del teorema 7.3.2, converge a la señal original. Esto sugiere que las fórmulas de aproximación que surgen en la teoría de grupos fuertemente continuos permiten explorar nuevos contextos para la reconstrucción de FrFT y reconstrucciones de Fourier apodizadas.

# Capítulo 8

## Experimentos numéricos

En este capítulo mostraremos algunos experimentos numéricos de reconstrucción de funciones matemáticas (por su simplicidad de cálculo), que sirven para ilustrar y contrastar métodos de reconstrucción. Luego, mostraremos experimentos prácticos con objetos reales, como lo es un cerebro, y datos obtenidos del resonador.

### 8.1. Experimentos teóricos

En esta sección mostraremos algunos experimentos numéricos teóricos que representan una reconstrucción genérica en resonancia magnética. Específicamente, consideraremos un objeto unidimensional de 5 cm, con una magnetización constante igual a 1, centrada en el origen. El FOV (*Field of View*, esto es, el tamaño del intervalo sobre el cual se reconstruirá la señal) es de 10 cm y se adquirirán 257 muestras, esto es  $M = 128$ . En aplicaciones estándar de MRI, esto significa que el paso de adquisición será de  $\Delta\rho_m = 5 \times 10^{-2}$  y  $\rho_M = 6,4$ . Las medidas se realizarán para  $a$  igual a 1, 2/3, 1/2 y 1/3. En cada caso, la magnetización será reconstruida usando la reconstrucción de Fourier estándar y la reconstrucción vía FrFT, utilizando métodos clásicos para simular su comportamiento (ver [14]). La comparación entre las reconstrucciones para  $a$  igual a 2/3, 1/2 y 1/3 puede verse en la figura 8.1. Notemos además que a medida que  $a$  decrece, la reconstrucción estándar de Fourier se vuelve más inexacta. Por otro lado, la reconstrucción por FrFT se vuelve más exacta cuando  $a$  decrece.

Para estudiar las ventajas del método de reconstrucción propuesto en la sección 7.3, reescribiremos la primera fórmula de reconstrucción de la forma:

$$\tilde{f}(u) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} e^{-q S^{a_m}(\rho_m)} K_{\rho_m^{-\frac{n}{q} a_m}}(u). \quad (8.1.1)$$

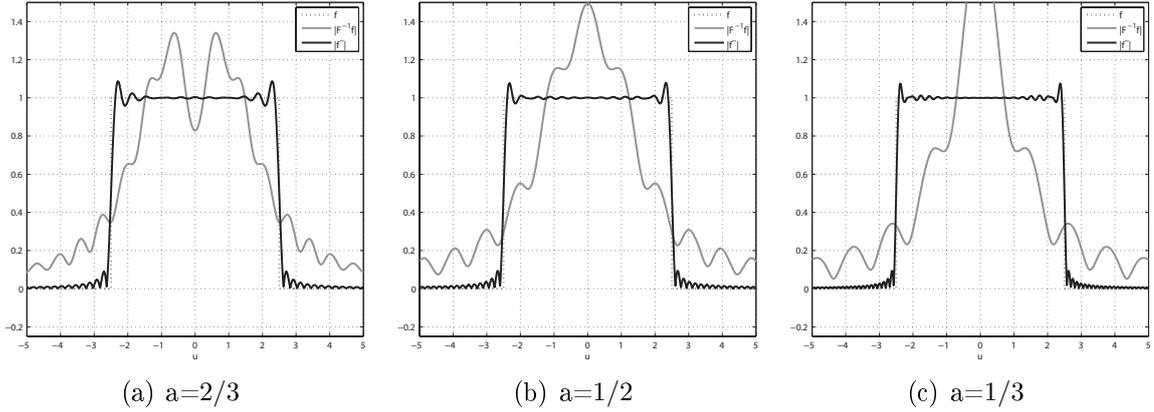


Figura 8.1: Comparación entre la función original (línea punteada), su reconstrucción por transformada de Fourier estándar (línea gris) y la reconstrucción por medio de FrFT (línea negra).

Esta fórmula involucra una serie infinita y un límite. Sin embargo, el factor peso, que corresponde al coeficiente exponencial de la serie, decae rápidamente a cero y por lo que sólo una parte de los coeficientes de la serie contribuye significativamente en la reconstrucción. El inconveniente es que el peso involucra factoriales, que a medida que  $n$  aumenta, se vuelven más difíciles de calcular con exactitud. Para resolver este problema, podemos aproximar estos factores mediante la función Gaussiana.

**Lema 8.1.1.** *Para  $q$  suficientemente grande, tenemos:*

$$\frac{q^n}{n!} e^{-q} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi q}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(n-q)^2}{q}}.$$

*Demostración.* Esta aproximación es una aplicación del teorema del límite central en una variable aleatoria distribuida Poisson. Sean,  $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$  y  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Poisson con parámetro  $\lambda$ . Notemos que  $\mathbb{E}\{X_n\} = \lambda$  y  $\mathbb{V}\{X_n\} = \lambda$ . Sea  $N \in \mathbb{N}_0$ . Definamos:

$$S_N := \sum_{n=1}^N X_n.$$

El teorema del límite central nos dice que:

$$\frac{S_N - N\lambda}{\sqrt{N\lambda}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

en distribución cuando  $N \rightarrow \infty$ . Luego, para  $N$  suficientemente grande:

$$S_N \sim \mathcal{N}(N\lambda, \sqrt{N\lambda}).$$

Pero suma de variables aleatorias independientes distribuidas Poisson, se distribuye Poisson. En otras palabras,  $S_N \sim \text{Poisson}(N\lambda)$ . Tomando  $q = N\lambda$  se concluye la demostración.  $\square$

La aproximación se vuelve más exacta cuando  $q$  aumenta, que es precisamente el tipo de comportamiento que interesa. Además, la aproximación permite estimar el error que se produce por el truncamiento de la serie, por medio de la desviación estándar de dicha aproximación, que a su vez depende del valor de  $q$ . Definamos:

$$c_q(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(n-q)^2}{q}}.$$

Ya que el índice de la sumatoria depende de las muestras  $S^\alpha(\rho_m)$ , podemos intercambiar las sumatorias en la igualdad (8.1.1). Definamos la función:

$$\phi_q^\alpha(\rho, u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_q(n) K_\rho^{-\frac{n}{q}\alpha}(u).$$

Usando esta notación, podemos construir una familia uniparamétrica de reconstrucciones para  $f$  dadas por:

$$\tilde{f}_q(u) = \sum_{m=-M}^M S^{\alpha_m}(\rho_m) \phi_q^{-\alpha_m}(\rho_m, u).$$

La reconstrucción definida en (8.1.1) puede ser pensada como una adecuada suavización del conjunto de kernels  $K_\rho^a(u)$ . Esto contrasta con el enfoque estándar de suavizado de datos, esto es multiplicar las muestras  $S^{\alpha_m}(\rho_m)$  por un adecuado conjunto de escalares, y así obtener una mejor reconstrucción. Para mostrar los beneficios de la fórmula propuesta en [1], realizaremos unos experimentos numéricos para  $a = 1$  (que coincide con el caso de Fourier estándar) con  $q$  igual 250, 2500 y 25000. En este caso usaremos esencialmente las ecuaciones (7.3.7) y (7.3.8) para obtener la reconstrucción. Los resultados se pueden ver en la figura 8.2.

El parámetro  $q$  controla la suavidad de la reconstrucción. Para valores pequeños de  $q$ , la aproximación  $\tilde{f}_q$  es suave, por lo que no reconstruye las discontinuidades. Al incrementar el valor de  $q$ , las discontinuidades se hacen más evidentes, así como también lo hace el fenómeno de Gibbs.

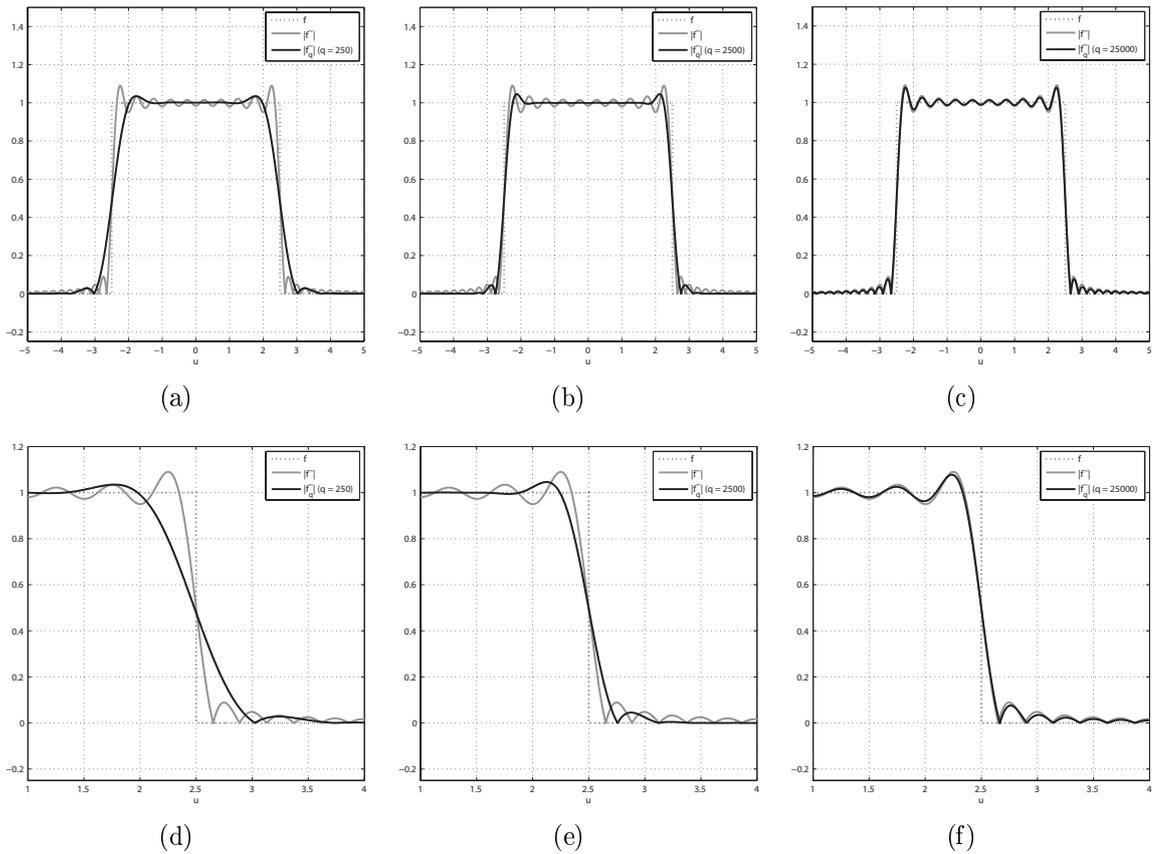


Figura 8.2: Comparación entre la función original (línea punteada), su reconstrucción por transformada de Fourier estándar (línea gris) y la reconstrucción por medio de FrFT (línea negra).

## 8.2. Experimentos prácticos

En esta sección mostraremos experimentos prácticos realizados en [2] y [3] en los que se compara el método de la transformada de Fourier de orden variable versus la transformada de Fourier estándar. Debido a la complejidad de estos cálculos, que escapan del alcance de este trabajo, nos remitiremos a mostrar los resultados a modo de presentar una aplicación más concreta y que servirá para dimensionar los alcances de la transformada de Fourier fraccionaria.

Las imágenes utilizadas en esta sección fueron adquiridas en un escáner Philips Intera 1,5 T. El cual se adecuó para simular inhomogeneidades de no muy alto orden (polinomial). Además se utilizaron las secuencias predeterminadas en el resonador, esto es, no se utilizaron parámetros especiales de adquisición.

scan matrix:	$128 \times 128$
FOV:	$24 \times 24$
slice thickness:	5 mm
flip angle:	$23^\circ$
repetition time:	650 ms
echo time:	41 ms

Cuadro 8.1: Parámetros de adquisición.

En un primer ejemplo, se escaneó un MRI Phantom<sup>1</sup> usando una secuencia EPI (echo-planar imaging) con parámetros definidos en el cuadro 8.2. Estos datos se adquirieron promediando 16 muestreos, esto es obtener 16 veces los datos de muestreo y promediarlos para obtener una mayor regularidad de estos.

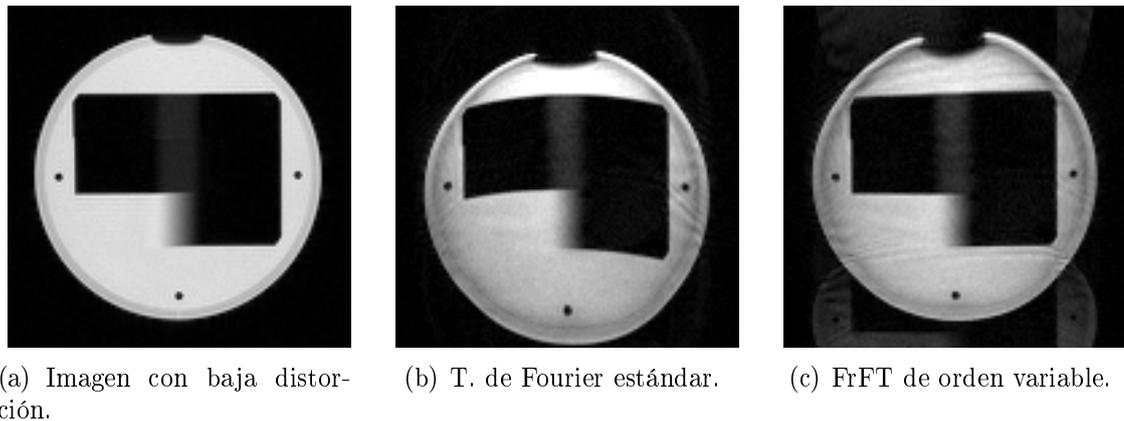


Figura 8.3: Resultados de reconstrucción para el MRI phantom bajo un campo cuadrático.

La reconstrucción por transformada de Fourier, figura 8.3(b), produce distorsiones geométricas e intensas. Además muestra que la reconstrucción por FrFT de orden variables (ver figura 8.3(c)) parcialmente corrige estas distorsiones, mejorando la geometría y la intensidad de la estimación cuando se compara con 8.3(a). El artefacto “fantasma” que aparece en 8.3(c) no se entiende completamente, pero se cree que es producto de la secuencia EPI (ver [3, sección 6.2]).

En un segundo ejemplo, en un estudio *en vivo* se escaneó el cerebro de una persona, las imágenes se adquirieron usando la misma secuencia utilizada anteriormente, con los parámetros de la tabla 8.2, pero esta vez se promediaron 8 muestreos.

<sup>1</sup>Imagen ejemplo incorporada en el resonador.

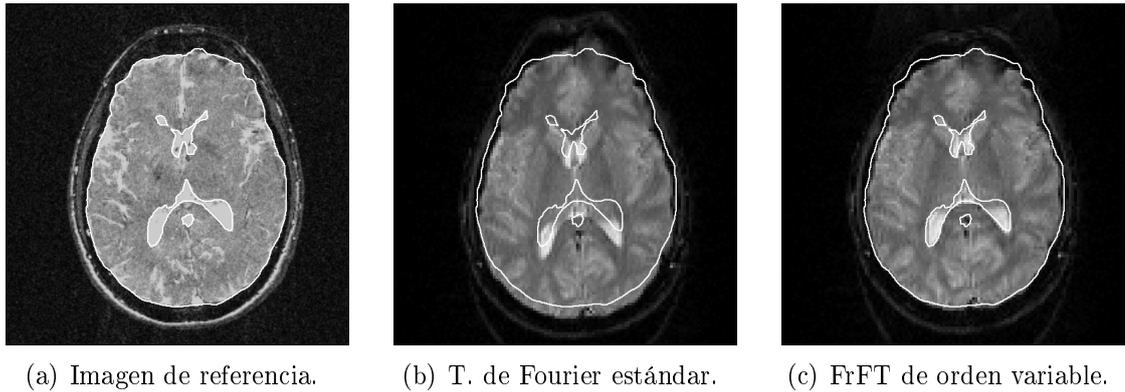


Figura 8.4: Resultados de reconstrucción para estudio *en vivo*.

Con este experimento se observó que el campo magnético varía suavemente dentro del cerebro. En la reconstrucción por FrFT de orden variable, figura 8.4(c), corrige parcialmente la mayoría de las distorsiones geométricas presentes en la reconstrucción por transformada de Fourier estándar que se pueden ver en la figura 8.4(b). Para facilitar la comparación en la figura 8.4 se marcó en contorno de la imagen de referencia 8.4(a), y se superpuso en las imágenes 8.4(b) y 8.4(c) para poder observar de mejor manera las diferencias.

# Capítulo 9

## Comentarios finales

Una de las principales ventajas de la MRI sobre otras técnicas de imágenes médicas es que producen daño celular mínimo. Los fotones asociados con las señales de radiofrecuencia usadas, para poder obtener la señal con que se realiza la reconstrucción, tienen energías aproximadas de  $10^{-7}$  eV. Ya que las intensidades de los enlaces moleculares son del orden de 1 eV, la radiación de las radiofrecuencias causa poco daño celular. En comparación, los rayos X producen energías que varían de  $10^4$  a  $10^6$  eV y pueden causar daño celular considerable.

Por esto el interés de ahondar en este tipo de Imágenes que si bien los tiempos de adquisición son mayores que en otras técnicas, como por ejemplo la tomografía axial computarizada (TAC) la cual es una técnica de visualización por rayos X, tiene la ventaja de ser más segura para las personas.

A nivel de la Transformada de Fourier fraccionaria vemos que el enfoque a través de la teoría de semigrupos proporciona una buena base para estudiar el problema de la reconstrucción, con la posibilidad de presentar nuevas fórmulas de reconstrucción e interpretaciones para estas. Tradicionalmente, en la literatura de procesamiento de señales, el orden de la transformada se ha pensado como número fijo. El contexto propuesto da una interpretación dinámica al orden, el cual puede ser interpretado como una evolución del tiempo de la función.

Probablemente el siguiente paso natural, aunque no trivial, será implementar en dos dimensiones la fórmula de reconstrucción presentada asumiendo los supuestos necesarios, y en algunos casos cierta holgura matemática, para poder conciliar el mundo teórico con el mundo práctico.

# Bibliografía

- [1] P. IRARRAZAVAL, C. LIZAMA, V. PAROT, C. SING-LONG Y C. TEJOS, *The fractional Fourier transform and quadratic-field magnetic resonance imaging*, Computers and Mathematics with Application, 62 (2011), 1576–1590.
- [2] V. PAROT, C. SING-LONG, C. LIZAMA, , C. TEJOS, S. URIBE Y P. IRARRAZAVAL, *Application of the fractional Fourier transform to image reconstruction in MRI*, Magnetic Resonance in Medicine, por aparecer.
- [3] V. PAROT, *Application of the fractional Fourier transform to image reconstruction in MRI*.
- [4] Z.-P. LIANG Y P. C. LAUTERBUR, *Principles of Magnetic Resonance Imaging: A Signal Processing Perspective*, Wiley-IEEE Press, 1999.
- [5] H. M. OZAKTAS, Z. ZALEVSKY, Y M.A. KUTAY, *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing*, Wiley Series in Pure and Applied Optics, Wiley, 2001.
- [6] F. ÁLVAREZ Y J. PEYPOUQUET, *Introducción a la teoría de semigrupos*, Apuntes para la III Escuela de Verano DIM-MECESUP-CMM, 2003.
- [7] K.-J. ENGEL Y R. NAGEL, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer.
- [8] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2 of Wiley Series on Probability and Statistics, John Wiley & Sons, 2nd ed., 1970.
- [9] J. A. GOLDSTEIN, *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, USA, 1985.
- [10] R. A. SERWAY, *Física para ciencias e ingeniería*, volumen II, quinta edición, McGRAW-HILL.
- [11] E. KREYSZIG, *Introductory functional analysis with applications*, Jhon Wiley & sons, 1978.

- [12] M. A. PINSKY, *Introducción al análisis de Fourier y las ondeletas*, Thomson, 2003.
- [13] H. F. WEINBERGER, *A first course in partial differential equations with complex variable and transform methods*.
- [14] E. SEJDIĆ, I. DJUROVIĆ Y L. STANKOVIĆ, *Fractional Fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments*, Signal processing 91 (2011), 1351–1369.
- [15] I. S. GRADSHTEYN Y I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 2nd edition ed., 1980.
- [16] P. IRARRAZAVAL, C. H. MEYER, D. G. NISHIMURA Y A. MACOVSKI, *Inhomogeneity correction using an estimated linear field map*, Magnetic Resonance in Medicine, 35 (1996), 278–282.
- [17] F. H. KERR, *Namias fractional Fourier-transforms on  $l^2$  and applications to differential-equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 136 (1988), 404–418.
- [18] K. N. KHAN, W. LAMB, Y A.C. MCBRIDE, *Fractional transformations of generalized functions*, Integral Transforms and Special Functions, 20 (2009), 471–490.
- [19] H. KOBER, *Wurzeln aus der Hankel-, Fourier-und aus anderen stetigen transformationen*, Q J Math, os-10 (1939), 45–59.
- [20] A. C. MCBRIDE Y F. H. KERR, *On namias' fractional Fourier transforms*, IMA Journal of Applied Mathematics, 39 (1987), 159–175.
- [21] D. MENDLOVIC Y H.M. OZAKTAS, *Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I*, J. Opt. Soc. Am. A, 10 (1993), 1875–1881.
- [22] V. NAMIAS, *The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics*, IMA J Appl Math, 25 (1980), 241–265.
- [23] H. M. OZAKTAS Y D. MENDLOVIC, *Fourier-transforms of fractional order and their optical interpretation*, Optics Communications, 101 (1993), 163–169.
- [24] H. M. OZAKTAS Y D. MENDLOVIC, *Fractional Fourier transforms and their optical implementation: II*, J. Opt. Soc. Am. A, 10 (1993), 2522–2531.