

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS ONDELETAS

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requisitos exigidos para optar al grado de Licenciado en Educación Matemática y Computación.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO-CHILE

2006

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS ONDELETAS

RODRIGO PONCE CUBILLOS

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Carlos Lizama del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora del candidato, Dra. Verónica Poblete y Dr. Humberto Prado.

Profesor Informante

Profesor Informante

Profesor Guía

Director

Agradecimientos

Agradecer a todos resulta difícil, debido a que son muchas las personas que nos rodean, además, mi memoria no me ayuda mucho.

Fueron muchos con los que compartí durante todos estos años de estudio. Mis compañeros(as) y amigos(as), Angy, Cata, Celeste, Coté, Lore, Bizama, Venegas, y otros, con los cuales vivimos muchos momentos fáciles y difíciles.

Agradezco al profesor Carlos Lizama, por acogerme como estudiante memorista y por guiarme en este trabajo.

Agradezco también a los profesores que conocí en la universidad, de los cuales aprendí muchas cosas, en especial a la profesora Lorena Espinoza, el profesor Máximo González y Rafael Labarca, quienes me colaboraron enormemente en diversos proyectos que emprendí.

Finalmente, agradezco especialmente a mi familia, quienes son el pilar fundamental de mi vida, y también a quien hace posible que estemos vivos, a Dios.

Gracias a todos.

RODRIGO PONCE CUBILLOS

Índice General

Índice	4
Introducción	6
1. Preliminares	10
1.1. Elementos de Teoría de Medida	10
1.2. La integral de Lebesgue	12
1.3. Espacios L^p	13
1.4. Bases Ortonormales	16
1.5. Operadores en Espacios de Hilbert	18
1.6. Series y Transformada de Fourier en L^2	20
1.6.1. Series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$	20
1.6.2. La Transformada de Fourier	28
2. La Transformada de Ondeletas	31
2.1. La Transformada continua de Ondeletas en L^2	31
2.1.1. Teorema de Parseval	47
2.1.2. Transformada inversa de ondeletas	52
2.2. Caracterización de la regularidad usando ondeletas	55
2.3. La Transformada continua de Ondeletas en varias dimensiones	64

	5
2.4. La Transformada Discreta de Ondeletas en L^2	66
2.4.1. Discretizando la transformada de ondeletas	66
2.5. Frames	71
3. Aplicaciones	76
3.1. Análisis de Multiresolución	76
3.2. Caracterización de espacios de funciones usando ondeletas . . .	82
3.3. Análisis de Fourier versus Ondeletas	83
Bibliografía	85

Introducción

El análisis de señales en diversos contextos, resulta relevante para el desarrollo de tecnologías y el descubrimiento de nuevos recursos.

Representar funciones mediante partículas elementales ha sido una de las herramientas principales que han usado los científicos para examinar y transmitir señales, ya sean auditivas, visuales o extraídas a partir de algún fenómeno natural.

El sistema de monomios $\{(x - a)^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ son las partículas elementales que se usan para representar señales (funciones) mediante el desarrollo de Taylor. Los sistemas de ondas $\{1, \cos nx, \sin nx : n = 1, 2, 3, \dots\}$ son las partículas elementales de las series de Fourier, que permiten representar señales definidas en cualquier intervalo de longitud 2π . Estos son los dos modelos clásicos de *sistemas reproductores*. En general, cualquier base ortonormal para un espacio de funciones es un sistema reproductor de ese espacio, en el que las partículas elementales son los elementos de la base.

Las **ondeletas**, en inglés *wavelets*, permiten descomponer una señal (función) en sus diferentes componentes de frecuencia, utilizando traslaciones y dilataciones de una función fija, permitiendo además, construir bases ortonormales de ciertos espacios de funciones.

Las primeras apariciones del término ondeletas, fue en investigaciones del área de la sismología, donde se analizaba el disturbio resultante de un impulso sísmico o de una carga explosiva.

Sin embargo, el avance más significativo fue realizado por el geofísico Jean Morlet, quien trabajaba en la compañía petrolera francesa Elf-Aquitaine. Morlet se dedicaba a detectar capas petrolíferas al interior de la tierra enviando vibraciones o impulsos y analizar el eco recibido. En la práctica, este análisis debería ayudar a decidir dónde y de qué están compuestas las distintas capas del subsuelo. Sin embargo, el análisis de Fourier con ventanas, *windowed Fourier transform (WFT)* que desde 1960 se usaba para estudiar estos ecos no lo satisfacía.

La WFT analiza señales a partir de la base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (*sistema reproductor*):

$$\{\chi_{[n,n+1)}(t)e^{2\pi mt}, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Sin embargo, en este sistema hay discontinuidades por el hecho de usar la función característica.

Es por esto que Morlet propuso, en 1975, un nuevo sistema que consideraba traslaciones y dilataciones de una función ψ de $L^2(\mathbb{R})$:

$$\{\psi_{(m,n)}(x) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}x - n), m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Posteriormente, Alex Grossman y Morlet mostraron cómo señales arbitrarias pueden ser analizadas en términos de estas traslaciones y dilataciones de una función que denominaron *ondeleta madre*.

El matemático francés Yves Meyer y Stephane Mallat ampliaron esta noción, y desarrollaron el *análisis de multiresolución (AMR)*. En 1989, Mallat mostró cómo esta teoría se puede utilizar en el procesamiento digital de imágenes.

Desde entonces, las ondeletas han sido usadas en diversas áreas, y cuenta con aplicaciones en geología, mecánica cuántica, compresión de imágenes y sonido, análisis de imágenes y señales, desarrollo de instrumental médico, física, biología, medicina, acústica, astronomía, energía nuclear, neurofisiología, resonancia magnética, identificación de voces, reconocimiento de patrones, física solar, meteorología, entre otras. En matemática pura, sus aplicaciones están el estudio de los operadores Calderón-Zygmund, análisis armónico, fractales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, sistemas dinámicos, entre otros.

Este Trabajo de Titulación, cuenta con tres capítulos, el primero de *Preliminares* en el cual se resumen los conceptos básicos para el estudio de la teoría de ondeletas, incluyendo teoría de medida, espacios L^p , bases ortonormales, series y transformada de Fourier, y operadores en espacios de Hilbert.

El segundo capítulo, titulado *La transformada de ondeletas* se describe la transformada continua y discreta de ondeletas en L^2 . Además, se prueban algunos resultados importantes y se muestran algunas aplicaciones. Las secciones de este capítulo son:

La transformada continua de ondeletas; se definen la ondeleta generatriz, las ondeletas asociadas a una ondeleta generatriz, y la transformada continua.

El Teorema de Parseval y la Transformada inversa de ondeletas; se prueban estos importantes teoremas en la teoría de ondeletas.

Caracterización de regularidad; se muestra cómo es posible caracterizar la regularidad de funciones de L^2 usando la transformada continua de ondeletas.

La transformada continua en varias dimensiones; se muestra brevemente cómo es posible extender la transformada continua para funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$, con $n \geq 2$.

La transformada discreta de ondeletas; se define la transformada discreta, se prueba además que ciertas ondeletas constituyen una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Se finaliza con los Frames, que se definen, y se relacionan con la transformada discreta.

Se finaliza con un breve capítulo de *Aplicaciones*, en el cual se define el análisis de Multiresolución (AMR), y se muestra cómo es posible caracterizar ciertos espacios de funciones usando la teoría de ondeletas.

Este trabajo de titulación tiene como propósito dar una visión global de la Teoría de Ondeletas, resumir sus principales propiedades, mostrar algunas aplicaciones, comenzando con los conceptos básicos necesarios para su estudio, y se basa en el texto *Ten Lectures on wavelets* de Ingrid Daubechies, quien es reconocida como una de las investigadoras que han hecho mayores avances en esta teoría.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se resumen los principales elementos de teoría de medida, espacios de Lebesgue, bases ortonormales, operadores en espacios de Hilbert, series y transformada de Fourier, necesarios para el estudio de la teoría de ondeletas.

1.1. Elementos de Teoría de Medida

A continuación se definen los principales conceptos de teoría de medida.

Consideremos una colección M de subconjuntos de un conjunto X . Diremos que M es una σ – **álgebra** en X , si M satisface las siguientes condiciones:

- $X \in M$.
- Si $A \in M$, entonces $A^c \in M$, donde A^c es el complemento de A respecto a X , es decir, $A^c = X - A$.
- Si $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ donde $A_i \in M$ para $i = 1, 2, \dots$, entonces $A \in M$.

Si M es una σ -álgebra en X , entonces, se dice que X es un **espacio medible**, y los elementos de M se llaman **conjuntos medibles en X** .

Consideremos ahora una colección T de subconjuntos de un conjunto Y . T se dice una **topología en Y** , si T satisface:

- $\emptyset \in T, Y \in T$.
- Si $V_i \in T$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $\bigcap_{i=1}^n V_i \in T$.
- Si $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección arbitraria de elementos de T entonces $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \in T$, donde I es un conjunto de índices.

Si T es una topología en Y , entonces, se dice que Y es un **espacio topológico**, y los elementos de T se denominan **conjuntos abiertos en Y** .

Si X es un espacio medible, e Y un espacio topológico, la función $f : X \rightarrow Y$ se dice **medible** si $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible en X para todo abierto V de Y .

Definición 1.1.1 Se llama **medida positiva** a una función $\mu : M \rightarrow [0, \infty]$, donde M es una σ -álgebra numerablemente aditiva, es decir, si $\{A_i\}$ es una colección numerable de elementos disjuntos de M , entonces:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\text{donde } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j).$$

El conjunto X se dice un **espacio de medida** si X es un espacio medible en el que hay definida una medida positiva $\mu : M \rightarrow [0, \infty]$, donde M es una σ -álgebra en X .

Definición 1.1.2 Una **función simple** en un espacio medible X , es una función definida de X en \mathbb{C} , cuya imagen consta de una cantidad finita de puntos.

1.2. La integral de Lebesgue

Consideremos una σ -álgebra M en un conjunto X , y $\mu : M \rightarrow [0, \infty]$ una medida positiva.

Definición 1.2.1 Si $s : X \rightarrow [0, \infty)$ es una función simple medible, de la forma:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los distintos valores de s , χ_{A_i} es la función característica de A_i . Para $E \in M$ definimos:

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Si $f : X \rightarrow [0, \infty]$ es medible, y $E \in M$, definimos:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s d\mu$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples medibles s tales que $0 \leq s \leq f$.

Llamamos a $\int_E f d\mu$ la **integral de Lebesgue** de f sobre E , respecto a la medida μ . Decimos, entonces que f es **Lebesgue integrable** sobre E respecto a la medida μ .

1.3. Espacios L^p

Sea X un espacio de medida, con una medida positiva μ .

Definición 1.3.1 Si $0 < p < \infty$, y si f es una función compleja medible en X , $f : X \rightarrow [0, \infty]$, sea:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se define el **espacio** $L^p(\mu)$ como el conjunto de todas las funciones f para las que $\|f\|_p < \infty$, es decir:

$$L^p(\mu) := \{f; \|f\|_p < \infty\}.$$

Llamamos a $\|f\|_p$ la **norma** L^p de f .

Consideremos $p = 2$. Si μ es una medida positiva, definimos en $L^2(\mu)$ el producto interior de $f, g \in L^2(\mu)$ por:

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu. \tag{1.1}$$

Note que: $\|f\| = (\langle f, f \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X f \bar{f} d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$.

Para μ una medida positiva, es fácil verificar que $L^2(\mu)$ con el producto interno definido en (1.1) es un espacio vectorial.

Proposición 1.3.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean $f, g \in L^2(\mu)$, entonces:

$$\left| \int_X f \bar{g} d\mu \right|^2 \leq \int_X |f|^2 d\mu \int_X |g|^2 d\mu.$$

Demostración: Ver [11] de las referencias.

Definición 1.3.2 Sean $f, g \in L^2(\mu)$, tales que $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ (es decir, los puntos en que f y g son distintas es un conjunto de medida cero). Entonces, decimos que f es igual a g en casi todo punto, abreviadamente $f = g$ en *ctp*[u] ó $f \sim g$.

Definición 1.3.3 Sea f_n una sucesión en $L^p(\mu)$. Si $f \in L^p(\mu)$, y si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$, entonces, decimos que f_n converge a f en $L^p(\mu)$.

Definición 1.3.4 Si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ cuando $n > N$ y $m > N$, decimos entonces, que f_n es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$.

Definición 1.3.5 Un espacio métrico es un conjunto X en el que hay definida una función distancia (o métrica) $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con las siguientes propiedades:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$.

Definición 1.3.6 Un espacio métrico M se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy definida en M converge en M .

Sean $f, g \in L^2(\mu)$, si se define $d(f, g) := \|f - g\|_2$, es sencillo verificar que $L^2(\mu)$ con d es un espacio métrico.

Proposición 1.3.2 $L^2(\mu)$ es un espacio métrico completo para toda medida positiva μ .

Demostración: Ver [11] de las referencias.

Observación 1.3.1 La Proposición 1.3.2 es también válida para $L^p(\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Ahora enunciamos un importante teorema que será utilizado en algunos resultados sobre la transformada de ondeletas.

Proposición 1.3.3 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)

Sea $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones tales que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, para todo $x \in M$. Si existe una función $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para $n = 1, 2, \dots; x \in M$, entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Demostración: Ver [11] de las referencias.

1.4. Bases Ortonormales

En esta sección se estudiarán brevemente las bases ortonormales definidas en espacios de dimensión infinita.

En un espacio de dimensión finita n , cualquier conjunto ortonormal de n vectores forma una base. De esta manera, se puede obtener cualquier vector de dicho espacio haciendo combinaciones lineales finitas con los elementos de la base. En cambio, en los espacios de dimensión infinita se requiere de otros conceptos para que cada vector de él se pueda representar como *combinación lineal* de los elementos de la base. De aquí en adelante se considerarán sólo espacios de dimensión infinita.

Definición 1.4.1 Sea \mathcal{H} un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el que ha sido definida una métrica d , tal que para $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene $d(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}$. Si \mathcal{H} con la métrica d es completo, entonces decimos que \mathcal{H} es un *espacio de Hilbert*.

Observación 1.4.1 Como el espacio $L^2(\mu)$ es completo, entonces, con el producto interno definido en (1.1), y la métrica definida por $d(f, g) := \|f - g\|_2$, $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 1.4.2 Un conjunto de vectores $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} se dice ortonormal si:

$$\langle x_m, x_n \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dada una sucesión ortonormal $\{e_k\}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , se puede considerar una serie de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \quad (1.2)$$

donde, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ son escalares. Si consideramos las sumas parciales $s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, y existe algún $s \in \mathcal{H}$ tal que estas sumas parciales convergen a s , esto es: $\|s_n - s\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces diremos que la serie (1.2) converge a $s \in \mathcal{H}$.

Proposición 1.4.1 (Convergencia) Sea $\{e_k\}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces:

(a) La serie (1.2) converge si y sólo si converge la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

(b) Si (1.2) converge, entonces los coeficientes α_k son los coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$, donde x denota la suma de (1.2). En este caso podemos escribir:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Demostración: (a) Sea $s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ y $\sigma_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$. Entonces por la ortonormalidad, para cualquier m, n con $n > m$, se tiene (usando el teorema de Pitágoras):

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_{m+1}|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m$$

Luego, $\{s_k\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{H} sí y sólo sí $\{\sigma_n\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . Esto prueba (a) ya que \mathcal{H} es completo.

(b) Tomando el producto de s_n y e_j y usando la ortonormalidad, tenemos:
 $\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j$ para $j = 1, \dots, k$ con ($k \leq n$ fijo). Además:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N.$$

Pero, $\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j$, luego:

$$\alpha_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle s_N, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle.$$

Así, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$. □

Observación 1.4.2 Nótese que el sistema $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$, donde el producto interno para $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ está dado por $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$. En efecto,

$$\langle e^{in\theta}, e^{im\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

Ahora, si $n = m$, entonces $\langle e^{in\theta}, e^{im\theta} \rangle = 1$. Si $n \neq m$, entonces, existe $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $n - m = k$, luego,

$$\langle e^{in\theta}, e^{im\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{i}{k} e^{ik\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

1.5. Operadores en Espacios de Hilbert

Consideremos un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Un *operador* es una función lineal de \mathcal{H} en \mathcal{H} .

Luego, si A es un operador en \mathcal{H} , entonces:

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2.$$

Si $\frac{\|Aw\|}{\|w\|}$ ($w \neq 0$) es acotado, entonces el operador A se dice acotado. La norma de A está definida por:

$$\|A\| = \sup_{u \in \mathcal{H}, \|u\| \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|.$$

El adjunto A^* de un operador acotado A en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un operador definido por:

$$\langle u_1, A^*u_2 \rangle = \langle Au_1, u_2 \rangle, \quad \text{donde } u_1, u_2 \in \mathcal{H}.$$

Si $A^* = A$, entonces A se dice autoadjunto.

Si un operador autoadjunto A satisface $\langle Au, u \rangle \geq 0$, para todo $u \in \mathcal{H}$, entonces se dice que A es un *operador positivo*.

1.6. Series y Transformada de Fourier en L^2

En este capítulo se estudian brevemente las series y la transformada de Fourier definidas en $L^2(\mathbb{T})$ y $L^2(\mathbb{R})$ respectivamente. Además se enuncian y demuestran algunos resultados importantes como el Teorema de Parseval (que será estudiado también para las ondeletas) y el de Riesz-Fischer.

1.6.1. Series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$

Definición 1.6.1 Sean $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Se define el producto interno de f con g como:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta. \quad (1.3)$$

Para una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ se definen los coeficientes de Fourier de f como:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

La distancia media cuadrática de $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ está dada por $\|f - g\|_2^2 = \langle f - g, f - g \rangle$.

En particular, si consideramos el polinomio trigonométrico $g(\theta) = \sum_{n=-N}^{n=N} b_n e^{in\theta}$,

entonces $\overline{g(\theta)} = \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{b_n} e^{-in\theta}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(\theta) \overline{f(\theta)} d\theta + \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{b_n} e^{-in\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=-N}^{n=N} b_n e^{in\theta} \overline{f(\theta)} d\theta + \|g\|_2^2 \end{aligned}$$

Si $A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{b_n} e^{-in\theta} d\theta$ y $A_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=-N}^{n=N} b_n e^{in\theta} \overline{f(\theta)} d\theta$, entonces:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{b_n} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{b_n} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{b_n} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=-N}^{n=N} b_n e^{in\theta} \overline{f(\theta)} d\theta \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} b_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{f(\theta)} e^{in\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-N}^{n=N} b_n \widehat{\overline{f}}(n). \end{aligned}$$

Así, tenemos:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{b_n} \hat{f}(n) - \sum_{n=-N}^{n=N} b_n \widehat{\overline{f}}(n) + \|g\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{n=N} \left[\overline{b_n} \hat{f}(n) + b_n \widehat{\overline{f}}(n) \right] + \|g\|_2^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras:

$$\left\| \sum_j \alpha_j e_j \right\|^2 = \sum_j |\alpha_j|^2$$

donde e_j es un sistema ortonormal, α_j son escalares, y j pertenece a un conjunto finito de índices,

se tiene:

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2 &= \left\| \sum_{-N}^N b_n e^{in\theta} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{-N}^N |b_n|^2.\end{aligned}$$

Así, reemplazando esta igualdad en (1.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}\|f - g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{-N}^N \left[\overline{b_n} \hat{f}(n) + b_n \overline{\hat{f}(n)} \right] + \sum_{-N}^N |b_n|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{-N}^N \left[\overline{b_n} \hat{f}(n) + b_n \overline{\hat{f}(n)} - |b_n|^2 \right] \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{-N}^N \left[|b_n - \hat{f}(n)|^2 - |\hat{f}(n)|^2 \right].\end{aligned}$$

Este último resultado se obtiene ya que:

$$\begin{aligned}\sum_{-N}^N \left[|b_n - \hat{f}(n)|^2 - |\hat{f}(n)|^2 \right] &= \sum_{-N}^N \left[(b_n - \hat{f}(n))(\overline{b_n} - \overline{\hat{f}(n)}) - |\hat{f}(n)|^2 \right] \\ &= \sum_{-N}^N \left[b_n \overline{b_n} - b_n \overline{\hat{f}(n)} - \overline{b_n} \hat{f}(n) + |\hat{f}(n)|^2 - |\hat{f}(n)|^2 \right].\end{aligned}$$

Resumiendo, si $g(\theta) = \sum_{n=-N}^{n=N} b_n e^{in\theta}$, tenemos:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{-N}^N |b_n - \hat{f}(n)|^2 - \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2. \quad (1.5)$$

Esta igualdad permite enunciar la siguiente proposición:

Proposición 1.6.1 Sea $f \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces el error medio cuadrático mínimo se alcanza cuando b_n es el coeficiente de Fourier $b_n = \hat{f}(n)$. La media distancia

cuadrática se expresa por:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2. \quad (1.6)$$

Además, para cada $N \in \mathbb{Z}$, se tiene la desigualdad:

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (1.7)$$

Y en particular, la desigualdad de Bessel:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (1.8)$$

Demostración: Por (1.5) tenemos:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{-N}^N |b_n - \hat{f}(n)|^2 - \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2.$$

Si $b_n = \hat{f}(n)$, entonces, el error medio cuadrático queda:

$$\|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2.$$

Afirmamos que este valor es mínimo para $\|f - g\|_2^2$. En efecto, debemos probar que no existe a_n , con $a_n \neq \hat{f}(n)$ tal que:

$$\|f\|_2^2 + \sum_{-N}^N |a_n - \hat{f}(n)|^2 - \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2 - \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2.$$

De esta desigualdad obtenemos:

$$\sum_{-N}^N |a_n - \hat{f}(n)|^2 \leq 0,$$

de donde, la única alternativa posible es que $\sum_{-N}^N |a_n - \hat{f}(n)|^2 = 0$, lo cual es válido sólo cuando $a_n = \hat{f}(n)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, si $b_n = \hat{f}(n)$ entonces el error medio cuadrático es mínimo, y se tiene: $\|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2$.

Además, como: $0 \leq \|f - g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2$, obtenemos:

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Finalmente, como $\|f\|_2^2 < \infty$, entonces para $N \rightarrow \infty$, la serie $\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2$ converge, y de la desigualdad anterior obtenemos: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2$. \square

Definición 1.6.2 Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Se define la serie de Fourier de f como:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

y sus sumas parciales $S_N f$ para $N = 0, 1, \dots$ como:

$$S_N f = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}.$$

Proposición 1.6.2 (Teorema de Parseval) Para $f \in L^2(\mathbb{T})$, la serie de Fourier de f converge en $L^2(\mathbb{T})$ y se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Es decir, $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$.

Demostración: Lo primero es demostrar que las sumas parciales convegen en $L^2(\mathbb{T})$. Supongamos que $M < N$, luego:

$$\begin{aligned}
\|S_N f - S_M f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |S_N f - S_M f|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int} - \sum_{n=-M}^M \hat{f}(n) e^{int} \right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{M < |n| \leq N} \hat{f}(n) e^{int} \right|^2 d\theta \\
&= \left\| \sum_{M < |n| \leq N} \hat{f}(n) e^{int} \right\|^2 \\
&= \sum_{M < |n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2 \quad (\text{por el Teorema de Pitágoras}) \\
&= \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 - \sum_{n=-M}^M |\hat{f}(n)|^2.
\end{aligned}$$

Llamando $\sigma_k = \sum_{n=-k}^k |\hat{f}(n)|^2$, la igualdad anterior queda:

$$\|S_N f - S_M f\|_2^2 = \sigma_N - \sigma_M.$$

Pero, $\sigma_N \rightarrow \sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$, por lo tanto, $\{\sigma_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y luego $\sigma_N - \sigma_M \rightarrow 0$ cuando $N, M \rightarrow \infty$.

Es decir, si $N, M \rightarrow \infty$, entonces $\|S_N f - S_M f\|_2^2 = \sum_{M < |n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2 \rightarrow 0$.

De esto, $\{S_N f\}$ es una sucesión de Cauchy, por lo que las sumas parciales convergen en $L^2(\mathbb{T})$.

Como $L^2(\mathbb{T})$ es completo, entonces existe $F \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $F = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f$.

Falta demostrar que $F \sim f$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{F}(n) &= \int_{\mathbb{T}} F(\theta)e^{-in\theta} d\theta \\
&= \int_{\mathbb{T}} [F(\theta) - S_N f(\theta)]e^{-in\theta} d\theta + \int_{\mathbb{T}} S_N f(\theta)e^{-in\theta} d\theta \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Además, para $N > |n|$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} S_N f(\theta)e^{-in\theta} d\theta &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=-N}^N \hat{f}(j)e^{ij\theta} e^{-in\theta} d\theta \\
&= 2\pi \left\langle \sum_{j=-N}^N \hat{f}(j)e^{ij\theta}, e^{in\theta} \right\rangle \\
&= 2\pi \sum_{j=-N}^N \hat{f}(j) \langle e^{ij\theta}, e^{in\theta} \rangle \\
&= 2\pi \hat{f}(n).
\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando esta última igualdad en (1.9), se obtiene:

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{F}(n) &= \int_{\mathbb{T}} [F(\theta) - S_N f(\theta)]e^{-in\theta} d\theta + \int_{\mathbb{T}} S_N f(\theta)e^{-in\theta} d\theta \\
&= \int_{\mathbb{T}} [F(\theta) - S_N f(\theta)]e^{-in\theta} d\theta + 2\pi\hat{f}(n).
\end{aligned}$$

Así, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si $N > n$:

$$|\hat{F}(n) - \hat{f}(n)| \leq \|F - S_N f\|_2.$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$ obtenemos $\hat{F}(n) = \hat{f}(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. De donde, $F \sim f$. Además $S_N f \rightarrow f$ en la norma $L^2(\mathbb{T})$. En particular, tomando la norma en los coeficientes de Fourier, se tiene:

$$\|f\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

□

Proposición 1.6.3 (Teorema de Riesz-Fischer) Sea $\{c_n\}, n \in \mathbb{Z}$ una sucesión de números complejos con $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$. Entonces, existe una única $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(n) = c_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $T_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}$. La sucesión T_n es de Cauchy en $L^2(\mathbb{T})$. En efecto, para $M < N$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|T_N - T_M\|_2^2 &= \left\| \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta} - \sum_{n=-M}^M c_n e^{in\theta} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \sum_{|n|=M+1}^N c_n e^{in\theta} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{|n|=M+1}^N |c_n|^2. \quad (\text{por el Teorema de Pitágoras}) \end{aligned}$$

Así, si $N, M \rightarrow \infty$, entonces $T_N \rightarrow T_M$, de donde $\sum_{|n|=M+1}^N |c_n|^2 \rightarrow 0$. Pero como $L^2(\mathbb{T})$ es completo, existe $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - T_N\|_2 \rightarrow 0$.

Los coeficientes de Fourier de f se obtienen al escribir:

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(n) &= \int_{\mathbb{T}} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} [f(\theta) - T_N(\theta)] e^{-in\theta} d\theta + \int_{\mathbb{T}} T_N(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Tomando valor absoluto en el primer término de (1.10) obtenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left| \int_{\mathbb{T}} [f(\theta) - T_N(\theta)] e^{-in\theta} d\theta \right| = 2\pi |\langle f - T_N, e^{in\theta} \rangle| \leq 2\pi \|f - T_N\|_2 \|e^{in\theta}\|_2.$$

Así,

$$\left| \int_{\mathbb{T}} [f(\theta) - T_N(\theta)] e^{-in\theta} d\theta \right| \leq 2\pi \|f - T_N\|_2. \quad (1.11)$$

Por otro lado, si $N > |n|$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{T}} T_N(\theta) e^{-in\theta} d\theta &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=-N}^N c_j e^{ij\theta} e^{-in\theta} d\theta \\
 &= 2\pi \sum_{j=-N}^N c_j \langle e^{ij\theta}, e^{in\theta} \rangle \\
 &= 2\pi c_n.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Reemplazando lo obtenido en (1.11) y (1.12) en (1.10) se sigue que: $2\pi \hat{f}(n) \leq 2\pi \|f - T_N\|_2 + 2\pi c_n$. Por lo tanto: $|\hat{f}(n) - c_n| \leq \|f - T_N\|_2$. Como $\|f - T_N\| \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, tenemos $|\hat{f}(n) - c_n| \rightarrow 0$, de donde $\hat{f}(n) = c_n$. Esto demuestra la existencia. La unicidad de f se debe a la unicidad de los coeficientes de Fourier en $L^1(\mathbb{T})$. \square

1.6.2. La Transformada de Fourier

A continuación se define la transformada de Fourier y enuncian algunas de sus principales propiedades.

Definición 1.6.3 Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Se define el producto interno de f y g en $L^2(\mathbb{R})$ como:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx. \tag{1.13}$$

Definición 1.6.4 La *transformada de Fourier* de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define por:

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi itx} dx.$$

Observación 1.6.1 En algunas partes del texto se utilizará, por comodidad de las expresiones resultantes, para la transformada de Fourier, la definición:

$$\hat{f}(t) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx} dx.$$

Definición 1.6.5 Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Se define el *producto de convolución de f con g* como:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy.$$

Proposición 1.6.4 Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces:

- (a) La transformada de Fourier es un operador continuo.
- (b) $(\alpha f + g)^\wedge(t) = \alpha \hat{f}(t) + \hat{g}(t)$.
- (c) $(f^{(n)})^\wedge(t) = (it)^n \hat{f}(t)$, donde $f^{(n)}$ es la n -ésima derivada de f respecto a x .
- (d) $(f * g)^\wedge(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.
- (e) $\hat{f}(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$.

Demostración: Ver [11] de las referencias.

Proposición 1.6.5 (Teorema de Parseval para la transformada de Fourier)

Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\bar{\hat{g}}(x)dx.$$

Demostración: Ver [11] de las referencias.

Definición 1.6.6 Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Se define la *transformada inversa de Fourier* denotada por ${}^\vee$ como:

$$\check{f}(t) := \hat{f}(-t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi itx} dx.$$

Proposición 1.6.6 (Fórmula de inversión de Fourier) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $(\check{f})^\wedge(t) = (\hat{f})^\vee(t)$.

Demostración: Ver [11] de las referencias.

Capítulo 2

La Transformada de Ondeletas

2.1. La Transformada continua de Ondeletas en L^2

El análisis clásico de Fourier consiste en reconstruir una función f a partir de las dilataciones de una función senoidal fija $x \rightarrow e^{2\pi ix}$, al escribir $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$.

La teoría de las ondeletas¹ se refiere a la representación de funciones en términos de una familia biparamétrica de dilataciones y traslaciones de una función fija, que en general no es senoidal. En este capítulo se estudian las ondeletas en una dimensión.

Definición 2.1.1 Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. La *función trasladada* en b de f es $f(x - b)$. Mientras que la *función dilatada* según a de f es $f(\frac{x}{a})$.

¹La palabra Ondeletas proviene del inglés *wavelets*. También se les conoce como ondículas u ondelettes.

Definición 2.1.2 Diremos que una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una **ondeleta generatriz** si satisface:

(a) $\|\psi\|_2 = 1$.

(b) $C_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} < \infty$ (Condición de admisibilidad).

Ejemplo 2.1.1 Sea ϕ una función real dada por:

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego, $\|\phi\|_2 = \left(\int_{-1}^1 x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

A partir de ϕ , definamos la ondeleta generatriz ψ dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x)}{\|\phi\|_2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego, para $x \in [-1, 1]$, tenemos $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\|\phi\|_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$. Así, tenemos que $\|\psi\|_2 = 1$. Por lo tanto, ψ satisface la condición (a) de la definición anterior.

Para verificar (b), calculamos la transformada de Fourier de ψ :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(t) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-itx} dx = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 x e^{-itx} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{2i(t \cos(t) - \sin(t))}{t^2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} = \frac{(2\pi) \cdot 4[t \cos(t) - \sin(t)]^2}{|t|^5}.$$

Por lo tanto, la condición de admisibilidad queda:

$$\begin{aligned}
 C_\psi &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt \\
 &= 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{(t \cos(t) - \sin(t))^2}{|t|^5} dt \\
 &= 16\pi^2 \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{(t \cos(t) - \sin(t))^2}{|t|^5} dt}_{\frac{1}{4}} + 16\pi^2 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(t \cos(t) - \sin(t))^2}{|t|^5} dt}_{\frac{1}{4}} \\
 &= 8\pi^2 < \infty.
 \end{aligned}$$

Por lo que la condición (b) se satisface. Así, ψ es una ondeleta generatriz.

Establecer si una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ satisface la condición (b) de admisibilidad resulta trabajoso. Sin embargo, como veremos luego, verificar que $C_\psi < \infty$ es equivalente a probar que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| dx < \infty$. Así, es fácil verificar que la función ψ del ejemplo anterior satisface estas condiciones, por lo tanto ψ es una ondeleta generatriz.

Ejemplo 2.1.2 Sean $n \in \mathbb{N}$ un número impar, $\alpha, a \in \mathbb{R}^+$, y consideremos:

$$\phi(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{Luego, } \|\phi\|_2 = \left(\int_{-a}^a \alpha^2 x^{2n} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \alpha \sqrt{2} \sqrt{\frac{a^{2n+1}}{2n+1}}.$$

Haciendo:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x)}{\|\phi\|_2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tenemos, para $x \in [-a, a]$:

$$\psi(x) = \frac{x^n}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{a^{2n+1}}{2n+1}}}.$$

Así, $\|\psi\|_2 = 1$. Por otro lado, se tiene que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \int_{-a}^a \psi(x) dx = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| dx = \int_{-a}^a |x\psi(x)| dx < \infty$. Por lo que, ψ es una ondeleta generatriz.

Ejemplo 2.1.3 Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica de período k , es decir, $\phi(x+k) = \phi(x)$, para todo x . Si $\int_{x_0}^{x_0+k} \phi(x+k) dx = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, y $\int_{x_0}^{x_0+k} |x\phi(x+k)| dx < \infty$, entonces:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x+k)}{\|\phi\|_2} & \text{si } x \in [x_0, x_0+k] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una ondeleta generatriz, si $\|\phi\|_2 \neq 0$.

De esto, podemos concluir que las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ definida en el intervalo $[0, 2\pi]$, (y en general en cualquier intervalo de longitud 2π) pueden determinar ondeletas generatrices.

Definición 2.1.3 Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una ondeleta generatriz. Las **ondeletas** asociadas a ψ son funciones dilatadas y trasladadas definidas por:

$$\psi_{(a,b)}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.1)$$

De la definición obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\psi_{(a,b)}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |a|^{-1} \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Haciendo $z = \frac{x-b}{a}$ obtenemos:

$$\|\psi_{(a,b)}\|_2^2 = |a| |a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\psi(z)|^2 dz = \int_{\mathbb{R}} |\psi(z)|^2 dz = \|\psi\|_2^2.$$

Por lo que $\|\psi_{(a,b)}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$, por la condición (a) de la definición 2.1.2.

Observación 2.1.1 El valor del exponente de $|a|^p$, en la definición de la función (2.1), $p = -\frac{1}{2}$, es irrelevante en la teoría básica de ondeletas. De hecho, algunos autores definen la función (2.1) usando $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$ e incluso $p = 0$.

Ejemplo 2.1.4 Las *ondeletas* asociadas a la ondeleta generatriz definida en el ejemplo (2.1.1) son, para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, y $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \psi_{(a,b)}(x) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} |a|^{-\frac{1}{2}} \frac{(x-b)}{a}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.5 Consideremos una función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, con $\|\phi\|_2 \neq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 0$, y $\int_{\mathbb{R}} |x\phi(x)| dx < \infty$. Si definimos:

$$\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\|\phi\|_2} \quad (\text{para } x \in \mathbb{R}).$$

Entonces, ψ es una ondeleta generatriz. Por lo que, las ondeletas asociadas a ψ son:

$$\begin{aligned} \psi_{(a,b)}(x) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= |a|^{-\frac{1}{2}} \frac{\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\|\psi\|_2}. \end{aligned}$$

La familia $\{\psi_{(a,b)}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ determina una familia de funciones, según sean los valores de a y b . A estas funciones se les llama **ondeletas generadas por ψ** , y la función generatriz ψ se le suele llamar *ondeleta madre*.

Observación 2.1.2 Para establecer que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una ondeleta generatriz, se debe probar que ψ cumple (a) y (b) de la definición (2.1.2), sin embargo, suele ser difícil verificar que $C_\psi < \infty$. La proposición siguiente, muestra que bajo ciertas condiciones, $C_\psi < \infty$ equivale a probar que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$, lo que a su vez es equivalente a $\hat{\psi}(0) = 0$.

Proposición 2.1.1 Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| < \infty$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

es equivalente a

$$\langle \psi, \psi \rangle_w := \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} < \infty \quad (2.2)$$

Demostración: Primero note que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$ equivale a $\hat{\psi}(0) = 0$, pues: $\hat{\psi}(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-2\pi i t x} dx$. Si $t = 0$, y exigimos que $\hat{\psi}(0) = 0$, entonces $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$.

Supongamos primero que $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} < \infty$. Debemos probar que $\hat{\psi}(0) = 0$. Por hipótesis tenemos que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| < \infty$. De estas hipótesis podemos concluir que $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. En efecto:

Escribamos:

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx = \int_{|x| \leq 1} |\psi(x)| dx + \int_{|x| > 1} |\psi(x)| dx.$$

La segunda integral puede ser estimada como:

$$\int_{|x| > 1} |\psi(x)| dx \leq \int_{|x| > 1} |x\psi(x)| dx < \infty, \quad (\text{por hipótesis}). \quad (2.3)$$

Por lo que, si $|x| > 1$, entonces, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

En cuanto a la primera integral tenemos:

$$\int_{|x| \leq 1} |\psi(x)| dx = \int_{\substack{|x| \leq 1 \\ \{|\psi| \leq 1\}}} |\psi(x)| dx + \int_{\substack{|x| \leq 1 \\ \{|\psi| > 1\}}} |\psi(x)| dx.$$

Notemos que: $\int_{\substack{|x| \leq 1 \\ \{|\psi| \leq 1\}}} |\psi(x)| dx \leq 2$. Además:

$$\int_{\substack{|x| \leq 1 \\ \{|\psi| > 1\}}} |\psi(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|_2^2 < \infty, \quad (\text{por hipótesis}). \quad (2.4)$$

Luego, si $|x| \leq 1$, obtenemos que $\int_{|x| \leq 1} |\psi(x)| dx < \infty$.

Así, de (2.3) y (2.4), obtenemos que $\psi \in L^1(\mathbb{R})$.

Como consecuencia de la definición de la transformada de Fourier, $\hat{\psi}$ es una función continua en toda la recta. Más aun, $\hat{\psi}$ es continuamente derivable, es decir, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, pues $\hat{\psi}'(t) = -ix\hat{\psi}(t)$.

Observe además que, siendo la derivada de $\hat{\psi}$ la transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R})$, específicamente de $-ix\hat{\psi}(t)$, ella es necesariamente acotada en toda la recta, ya que por la proposición (1.6.4), tenemos:

$$\hat{\psi}'(t) = -ix\hat{\psi}(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } |t| \rightarrow \infty.$$

Es decir, $\hat{\psi}' \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Ahora, si $\hat{\psi}(0)$ no fuese 0, entonces la integral (2.2) no podría ser finita, por lo tanto $\hat{\psi}(0) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\hat{\psi}(0) = 0$. Del teorema del valor medio, se deduce un crecimiento lineal para $\hat{\psi}$, pues:

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(0) + \frac{d}{dt}\hat{\psi}(t_0)t = \frac{d}{dt}\hat{\psi}(t_0)t, \quad \text{para } -t_0 \leq t \leq t_0.$$

Pero, observemos que $M := \|\hat{\psi}'\|_\infty < \infty$.

Por lo tanto:

$$|\hat{\psi}(t)| \leq M|t|.$$

Como:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt = \int_{|t| \leq 1} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt + \int_{|t| > 1} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt. \quad (2.5)$$

Entonces, tenemos:

$$\int_{|t|>1} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt < \int_{|t|>1} |\hat{\psi}(t)|^2 dt \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(t)|^2 dt = \|\psi\|_2^2, \quad (\text{por 1.6.5}) \quad (2.6)$$

Y además:

$$\int_{|t|\leq 1} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt \leq \int_{|t|\leq 1} \frac{M^2 t^2}{|t|} dt \leq M^2 < \infty. \quad (2.7)$$

Por lo tanto, en (2.5) tenemos por (2.6) y (2.7) que:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt < \infty.$$

□

Ahora se muestran algunos ejemplos de ondoletas:

Ejemplo 2.1.6 La *ondoleta de Haar* se define mediante la función:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

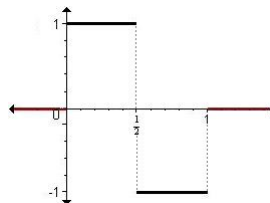


FIGURA: ONDELETA DE HAAR.

La transformada de Fourier de ψ es:

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x)e^{-2\pi i\xi x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i\xi x} dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-2\pi i\xi x} dx \\
 &= \frac{1 - 2e^{-\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i\xi} \\
 &= \frac{(1 - e^{-\pi i\xi})^2}{2\pi i\xi}
 \end{aligned}$$

Para establecer que ψ es una ondoleta generatriz sería necesario verificar que $C_\psi < \infty$, condición indicada en la definición (2.1.2). Sin embargo, en virtud de la Proposición 2.1.1 basta verificar que $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|dx < \infty$ y $\hat{\psi}(0) = 0$.

En efecto. Primero nótese que es fácil establecer $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|dx < \infty$. Por otro lado, $(1 - e^{-\pi i\xi})^2$ y $2\pi i\xi$ son diferenciables respecto a ξ , por lo que aplicando el teorema de L'Hôpital para el cálculo de límites tenemos:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \hat{\psi}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{-2\pi i(1 - e^{-\pi i\xi})}{2\pi i} = 0.$$

Además $\|\psi\|_2 = 1$, por lo que, ψ es una ondoleta generatriz.

Ejemplo 2.1.7 Una *ondoleta gaussiana* puede definirse por $\psi(x) = Cxe^{-\pi x^2}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La transformada de Fourier es $\hat{\psi}(\xi) = -iC\xi e^{-\pi \xi^2}$. Para establecer que ψ es una ondoleta generatriz basta verificar que $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|dx < \infty$, $\hat{\psi}(0) = 0$, y $\|\psi\|_2 = 1$.

Primero, es evidente que $\hat{\psi}(0) = 0$. Por otro lado, $\int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|dx = C\frac{1}{2\pi} < \infty$.

Para $\|\psi\|_2$ obsérvese que:

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |Cxe^{-\pi x^2}|^2 dx \\
&= C^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2\pi x^2} dx \\
&= C^2 \frac{\sqrt{2}}{8\pi}.
\end{aligned}$$

Si exigimos que $\|\psi\|_2^2 = 1$, entonces, $C = 2\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}$. Luego, la ondeleta gaussiana queda $\psi(x) = 2\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}xe^{-\pi x^2}$.

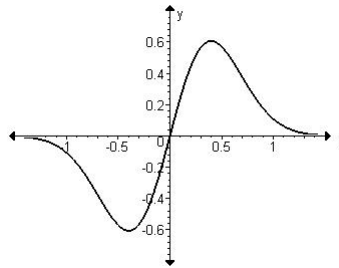


FIGURA: UNA ONDELETA GAUSSIANA.

Observación 2.1.3 En general, las ondeletas gaussianas se definen a partir de la función $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ejemplo 2.1.8 La *ondeleta del sombrero mexicano* se define a partir de la segunda derivada de la ondeleta gaussiana $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Tenemos $\frac{d^2}{dx^2}g(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Consideremos ahora la función $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{3}}g''(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{3}}(x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$, que tiene por transformada de Fourier a:

$$\hat{\psi}(\xi) = -\frac{2}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{3}}(i\xi)^2\hat{g}(\xi),$$

donde $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (una ondeleta gaussiana). La constante $\gamma := \frac{2}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{3}}$ es escogida de esta forma para garantizar la normalización. Luego, $\hat{\psi}(\xi) = \gamma\xi^2e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, de

donde, se verifica claramente que $\hat{\psi}(0) = 0$, y como $\|\psi\|_2 = 1$, entonces, ψ es una ondeleta generatriz.

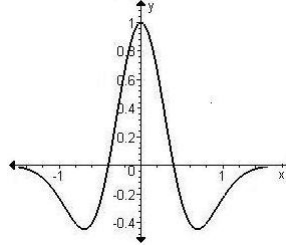


FIGURA: ONDELETA DEL SOMBRERO MEXICANO.

Definición 2.1.4 Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se define la **transformada continua de ondeletas de f** respecto a la ondeleta generatriz $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ como:

$$W_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\psi}_{(a,b)}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} f(x) \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

Ejemplo 2.1.9 Las ondeletas definidas en el ejemplo (2.1.4) están dadas para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, por:

$$\psi_{(a,b)}(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} |a|^{-\frac{1}{2}} \frac{(x-b)}{a} \quad (\text{para } x \in [-1, 1])$$

Luego, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces la transformada continua de ondeletas de f respecto a ψ está dada por:

$$\begin{aligned} W_\psi f(a, b) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_{(a,b)}(x) f(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 |a|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $f(x) = e^{2\pi i \xi x}$, entonces:

$$W_\psi f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i \xi x} \overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

Haciendo $z = \frac{x-b}{a}$, tenemos $x = az + b$ y $adz = dx$, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} W_\psi f(a, b) &= \int_{\mathbb{R}} |a|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \xi (az+b)} \overline{\psi}(z) dz \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \xi b} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i (a\xi)z} \overline{\psi}(z) dz \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \xi b} \widehat{\overline{\psi}}(a\xi). \end{aligned}$$

Consideremos el operador adjunto:

$$W_\psi * W_\psi f(x) = \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db}{\sqrt{|a|}}$$

Pero como $W_\psi f(a, b) = |a|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \xi b} \widehat{\overline{\psi}}(a\xi)$, tenemos:

$$W_\psi * W_\psi f(x) = |a|^{\frac{1}{2}} \widehat{\overline{\psi}}(a\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi b} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db}{\sqrt{|a|}}.$$

Haciendo $z = \frac{x-b}{a}$, tenemos $b = x - az$ y $db = -adz$, de donde:

$$\begin{aligned} W_\psi * W_\psi f(x) &= -|a|^{\frac{1}{2}} \widehat{\overline{\psi}}(a\xi) \int_{\infty}^{-\infty} e^{2\pi i \xi (x-az)} \psi(z) |a|^{\frac{1}{2}} dz \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \widehat{\overline{\psi}}(a\xi) e^{2\pi i \xi x} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (a\xi)z} \psi(z) dz \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \widehat{\overline{\psi}}(a\xi) e^{2\pi i \xi x} \widehat{\psi}(a\xi) \\ &= |a| |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 e^{2\pi i \xi x}. \end{aligned}$$

Integrando esta última igualdad respecto a $\frac{da}{a^2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} * W_{\psi} f(x) \frac{da}{a^2} &= e^{2\pi i \xi x} \int_{\mathbb{R}} |a| |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{a^2} \\ &= e^{2\pi i \xi x} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} W_{\psi} * W_{\psi} f(x) \frac{da}{a^2}}{\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da} = e^{2\pi i \xi x} = f(x).$$

Si se exige que $\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da = 1$, entonces:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} * W_{\psi} f(x) \frac{da}{a^2}.$$

Válida sólo para $f(x) = e^{2\pi i \xi x}$.

Observación 2.1.4 De la definición (2.1.4) se tiene:

$$W_{\psi} f(a, b) = \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle.$$

Donde \langle, \rangle indica el producto interno definido en (1.13).

Ahora se muestran algunas de las principales propiedades de la transformada de ondeletas. Nótese que son propiedades análogas a las de la transformada de Fourier.

Proposición 2.1.2 Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, ψ una ondeleta y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- (a) $W_\psi(\alpha f + g)(a, b) = \alpha W_\psi f(a, b) + W_\psi g(a, b)$.
- (b) $W_\psi f$ es una función acotada en $L^2(\mathbb{R})$.
- (c) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, y $|\psi_{(a,b)}(x)| < M$ para algún $M \in \mathbb{R}$, entonces $\|W_\psi f\|_\infty \leq M \|f\|_1$.

Demostración:

(a) De la definición de la transformada continua, tenemos:

$$\begin{aligned} W_\psi(\alpha f + g)(a, b) &= \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} (\alpha f + g)(x) \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} f(x) \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx + \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} g(x) \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= \alpha W_\psi f(a, b) + W_\psi g(a, b). \end{aligned}$$

(b) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos:

$$|W_\psi f(a, b)| = |\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| \leq \|f\|_2 \|\psi_{(a,b)}\|_2$$

Y como $f, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, entonces, $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = M < \infty$, y $\|\psi\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = N < \infty$, por lo que:

$$|W_\psi f(a, b)| \leq \|f\|_2 \|\psi_{(a,b)}\|_2 = M \cdot N < \infty$$

(c)

$$\begin{aligned} |W_\psi f(a, b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \left| \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| |f(x)| dx \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \end{aligned}$$

Así, tenemos $|W_\psi f(a, b)| \leq M \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$, es decir, $|W_\psi f(a, b)| \leq M \|f\|_1$.

Luego:

$$\|W_\psi f\|_\infty = \sup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} |W_\psi f(a, b)| \leq M \|f\|_1.$$

Por lo tanto, $\|W_\psi f\|_\infty \leq M \|f\|_1$.

□

2.1.1. Teorema de Parseval

Probaremos ahora una importante proposición, que será utilizada en varias ocasiones en el desarrollo de la teoría de las ondeletas.

Proposición 2.1.3 (Teorema de Parseval para Ondeletas) Sea ψ una ondeleta generatriz, entonces, para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = C_{\psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(a, b)\overline{W_{\psi} g(a, b)} \frac{dad b}{a^2}.$$

Demostración: Primero, note que la transformada de Fourier de $\psi_{(a,b)}$ es:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{(a,b)}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi_{(a,b)}(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)e^{-i\xi x} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(z)e^{-i\xi(az+b)} dz \quad (\text{haciendo } z = \frac{x-b}{a}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi b} \int_{\mathbb{R}} \psi(z)e^{-i(a\xi)z} dz \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi b} \hat{\psi}(a\xi). \end{aligned}$$

Luego, $\hat{\psi}(a\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_{(a,b)}(\xi) |a|^{-\frac{1}{2}} e^{i\xi b}$.

Por lo tanto:

$$\overline{\hat{\psi}(a\xi)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}_{(a,b)}(\xi)} |a|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\xi b}. \quad (2.8)$$

Pero, por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{(a,b)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_{(a,b)}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-2\pi i \xi (az+b)} dz \quad (\text{haciendo } z = \frac{x-b}{a}) \\
&= |a|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \xi b} \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-2\pi i (a\xi)z} dz \\
&= |a|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \xi x} \hat{\psi}(a\xi).
\end{aligned}$$

Así,

$$|\hat{\psi}_{(a,b)}(\xi)|^2 = \left| |a|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \xi x} \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 = |a| |\hat{\psi}(a\xi)|^2. \quad (2.9)$$

Sea ahora, $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$. Entonces $W_{\psi}f(a, b)$ es la convolución de $\tilde{\psi}_{(a,0)}$ con f , es decir:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\psi}_{(a,0)} * f)(b) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_{(a,0)}(b-y) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_{(a,0)}(y-b) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi}\left(\frac{y-b}{a}\right) f(y) dy \\
&= W_{\psi}f(a, b).
\end{aligned}$$

La transformada de Fourier de $\tilde{\psi}$ es:

$$\begin{aligned}
\hat{\tilde{\psi}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}_{(a,0)}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}_{(a,0)}(-x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi}\left(\frac{-x}{a}\right) e^{-2\pi i x \xi} dx.
\end{aligned}$$

Haciendo $z = \frac{-x}{a}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot - \int_{\infty}^{-\infty} \overline{\psi}(z) e^{2\pi i a z \xi} |a| dz \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(z) e^{2\pi i a z \xi} dz \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}}(a\xi).\end{aligned}$$

Luego la transformada de Fourier de $W_{\psi}f(a, b)$ es:

$$\begin{aligned}\widehat{W}_{\psi}f(a, b) &= (\tilde{\psi}_{(a,0)} * f)^{\wedge}(\xi) \\ &= \hat{\tilde{\psi}}_{(a,0)}(\xi) \hat{f}(\xi) \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}}(a\xi) \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Pero, reemplazando lo obtenido en (2.8) en esta igualdad, tenemos:

$$\widehat{W}_{\psi}f(a, b) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}}_{(a,b)}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x}.$$

Observación 2.1.5 Nótese que $\hat{\psi}(-t) = \overline{\hat{\psi}}(t)$

Análogamente para g tenemos $\widehat{W}_{\psi}g(a, b) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}}_{(a,b)}(\xi) \hat{g}(\xi) e^{-i\xi x}$. Así $\overline{\widehat{W}_{\psi}g(a, b)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}_{(a,b)}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi) e^{i\xi x}$.

Luego por el teorema de Parseval para la transformada de Fourier, y por (2.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} W_{\psi}f(a, b) \overline{W_{\psi}g(a, b)} db &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{W}_{\psi}f(a, b) \overline{\widehat{W}_{\psi}g(a, b)} db \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{\psi}}_{(a,b)}(\xi) \hat{f}(\xi) \hat{\psi}_{(a,b)}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi) d\xi \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi) |\hat{\psi}_{(a,b)}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |a| \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi) |\hat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Integramos ambos miembros de la igualdad respecto a $\frac{da}{|a|^2}$ obteniendo, por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(a, b) \overline{W_{\psi} g(a, b)} \frac{dad b}{|a|^2} &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a| \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{d\xi da}{|a|^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da d\xi \\ &= C_{\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de Parseval para la transformada de Fourier obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(a, b) \overline{W_{\psi} g(a, b)} \frac{dad b}{a^2} = C_{\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = C_{\psi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

□

El teorema de Parseval para la transformada de Ondeletas nos permite probar la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4 La transformada de ondeletas es un operador continuo.

Demostración: Probaremos primero que $\|W_{\psi} f\|_2 = \|f\|_2$.

Tomando $f = g$ en la Proposición 2.1.3, tenemos:

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = C_{\psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi} f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2}.$$

Luego,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}, dx)}^2 = \|W_{\psi} f\|_{L^2(\mathbb{R}^2, d\mu)}^2,$$

donde, $d\mu$ es la medida dada por $d\mu = \frac{dad b}{C_{\psi} a^2}$.

Observación 2.1.6 Puesto que $\|W_\psi f\| = \|f\|$, entonces, $W_\psi f$ es una **isometría** de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ en $L^2(\mathbb{R}^2, \frac{dadb}{C_\psi a^2})$.

Ahora, si $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}, dx)$, tenemos por la linealidad de $W_\psi f$,

$$\begin{aligned} \|W_\psi f_n - W_\psi f\|_{L^2(\mathbb{R}^2, d\mu)} &= \|W_\psi(f_n - f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2, d\mu)} \\ &= \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}, dx)} \quad (\text{Pues } W_\psi f \text{ es una isometría}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, $W_\psi f_n \rightarrow W_\psi f$ en $L^2(\mathbb{R}^2, d\mu)$, por lo que $W_\psi f(a, b)$ es un operador continuo. \square

Observación 2.1.7 Sabemos que $W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle$, pero por el teorema (1.6.5) obtenemos:

$$W_\psi f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}_{(a,b)}}(x) dx = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{(a,b)} \rangle \quad (2.10)$$

Además:

$$\hat{\psi}_{(a,b)}(t) = |a|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi itb} \hat{\psi}(at).$$

Así, reemplazando en (2.10) tenemos:

$$\begin{aligned} W_\psi f(a, b) &= \langle \hat{f}(x), \hat{\psi}_{(a,b)}(x) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}_{(a,b)}}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) |a|^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}(ax)} e^{2\pi i x b} dx \\ &= |a|^{\frac{1}{2}} \left(\hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right)^\vee (b). \end{aligned}$$

Esto es, $W_\psi f(a, b)$ se obtiene como la transformada inversa de Fourier de la función $|a|^{\frac{1}{2}} \left(\hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)} \right)$ respecto a la variable x .

2.1.2. Transformada inversa de ondeletas

La siguiente proposición muestra que toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser representada mediante la transformada de ondeletas.

Proposición 2.1.5 (Transformada inversa de ondeletas) Sea ψ una ondeleta generatriz. Entonces, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene:

$$f = C_\psi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2}. \quad (2.11)$$

Demostración: Mostrar la igualdad anterior equivale a probar que:

$$\lim_{\substack{A_1 \rightarrow 0 \\ A_2, B \rightarrow \infty}} \left\| f - C_\psi^{-1} \int \int_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2} \right\|_2 = 0$$

Tenemos que para toda $g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & \left\| f - C_\psi^{-1} \int \int_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2} \right\|_2 = \\ & = \sup_{\|g\|_2=1} \left| \left\langle f - C_\psi^{-1} \int \int_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2}, g \right\rangle \right| \end{aligned}$$

Si se aplica el teorema de Fubini, se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\langle C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dadb}{a^2}, g \right\rangle &= \\
&= \int_{\mathbb{R}} \bar{g}(x) \left(C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)}(x) \frac{dadb}{a^2} \right) dx \\
&= C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \left(\int_{\mathbb{R}} \bar{g}(x) \psi_{(a,b)}(x) dx \right) \frac{dadb}{a^2} \\
&= C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g}(a, b) \frac{dadb}{a^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema de Parseval para ondeletas 2.1.3, por la igualdad anterior y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle f - C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2}, g \right\rangle \right| = \\
& = \left| \langle f, g \rangle - \left\langle C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2}, g \right\rangle \right| \\
& = \left| \langle f, g \rangle - C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2} \right| \\
& = \left| C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}} \iint_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2} - C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2} \right| \\
& = \left| C_\psi^{-1} \iint_{\substack{\{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B\}^c}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2} \right| \\
& \leq \left(C_\psi^{-1} \iint_{\substack{\{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B\}^c}} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}} \iint_{\mathbb{R}} |W_\psi g(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \left(C_\psi^{-1} \iint_{\substack{\{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B\}^c}} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|g\|_2 \\
& = \left(C_\psi^{-1} \iint_{\substack{\{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B\}^c}} |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Pues } \|g\|_2 = 1).
\end{aligned}$$

Ahora, si $A_1 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty$, entonces la región de integración decrece hasta un conjunto de medida nula, de donde, la integral tiende a cero por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Así,

$$\left\| f - C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2} \right\|_2 \rightarrow 0. \quad \square$$

2.2. Caracterización de la regularidad usando ondeletas

La transformada de ondeletas puede ser utilizada para caracterizar la *regularidad local* de una función.

Proposición 2.2.1 Suponga que $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|\psi(x)|dx < \infty$, y que $\hat{\psi}(0) = 0$. Si f es una función acotada Hölder continua con exponente α , $0 < \alpha \leq 1$, es decir:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

entonces, la transformada de ondeletas satisface:

$$|W_\psi f(a, b)| = |\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| \leq C'|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Demostración: Puesto que $\hat{\psi}(0) = 0$, entonces tenemos $\widehat{\bar{\psi}}(0) = 0$, es decir, $\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)dx = 0$, por lo que $\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_{(a,b)}(x)dx = 0$. Luego, para $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} W_\psi f(a, b) &= \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle - 0 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}_{(a,b)}(x)dx - f(b) \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_{(a,b)}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_{(a,b)}(x) \left(f(x) - f(b) \right) dx \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} |W_\psi f(a, b)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\bar{\psi}_{(a,b)}(x)| |f(x) - f(b)| dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\psi_{(a,b)}(x)| |x - b|^\alpha dx \\ &= C|a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| |x - b|^\alpha dx \end{aligned}$$

Haciendo $z = \frac{x-b}{a}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} |W_\psi f(a, b)| &\leq C|a|^{-\frac{1}{2}}|a| \int_{\mathbb{R}} |\psi(z)||az|^\alpha dz \\ &= C|a|^{\frac{1}{2}}|a|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |\psi(z)||z|^\alpha dz \\ &\leq C'|a|^{\frac{1}{2}+\alpha}. \end{aligned}$$

□

Observación 2.2.1 La siguiente proposición permite probar un importante teorema sobre la regularidad.

Proposición 2.2.2 Suponga que $\psi_1, \psi_2 \in L^1(\mathbb{R})$, que ψ_2 es diferenciable con $\psi_2' \in L^2(\mathbb{R})$, y que $\hat{\psi}_1(0) = 0 = \hat{\psi}_2(0)$. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ es acotada, entonces,

$$f(x) = C_{\psi_1, \psi_2}^{-1} \lim_{\substack{A_1 \rightarrow 0 \\ A_2 \rightarrow \infty}} \int_{A_1 \leq |a| \leq A_2} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{1(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x) db$$

donde, $C_{\psi_1, \psi_2} = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{\psi}_1(\xi)} \hat{\psi}_2(\xi) \frac{d\xi}{|\xi|}$.

Demostración: Ver [3] de las referencias.

Definición 2.2.1 Diremos que una función f tiene soporte compacto, si existe un intervalo cerrado y acotado I en el cual se tiene $f(x) = 0$, para todo $x \in I$.

La siguiente proposición es un recíproco del Teorema 2.2.1:

Proposición 2.2.3 Suponga que ψ tiene soporte compacto. Suponga además que $f \in L^2(\mathbb{R})$ es acotada y continua. Si para algún $\alpha \in]0, 1[$ la transformada de ondeletas de f satisface:

$$|\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| \leq C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

entonces, f es Hölder continua con exponente α .

Demostración:

1. Elijamos ψ_2 con soporte compacto y continuamente diferenciable, con $\int \psi_2(x)dx = 1$.
0. Normalice ψ_2 tal que $C_{\psi, \psi_2} = 1$. Entonces, por la proposición (2.2.2) tenemos:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x) db.$$

Dividimos la integral sobre a en dos partes, cuando $|a| \leq 1$ y $|a| \geq 1$, y llamemos a estas integrales respectivamente $f_{ss}(x)$ y f_{ls} .

2. Primero, nótese que f_{ls} está uniformemente acotada en x :

$$\begin{aligned} |f_{ls}| &= \left| \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x) db \right| \\ &\leq \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \|f\|_2 \|\psi_{(a,b)}\|_2 |\psi_{2(a,b)}(x)| db \\ &\leq C \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} |a|^{-\frac{1}{2}} \left| \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| db \\ &\leq C \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} |a|^{\frac{1}{2}} |\psi_2(z)| dz \quad (\text{haciendo } z = \frac{x-b}{a}) \\ &\leq C \|\psi_2\|_1 \int_{|a| \geq 1} |a|^{-\frac{3}{2}} dz \\ &\leq C' < \infty. \end{aligned}$$

Luego, tenemos para $|h| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
& |f_{ls}(x+h) - f_{ls}(x)| = \\
& = \left| \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x+h) - \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x) db \right| \\
& = \left| \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(|a|^{-1} f(y) \bar{\psi}\left(\frac{y-b}{a}\right) \psi_2\left(\frac{x+h-b}{a}\right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - |a|^{-1} f(y) \bar{\psi}\left(\frac{y-b}{a}\right) \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right) dy \right| db \\
& \leq \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{|a|^3} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left| \psi\left(\frac{y-b}{a}\right) \right| \left| \psi_2\left(\frac{x+h-b}{a}\right) - \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| dy db
\end{aligned}$$

Como $|\psi_2(z+t) - \psi_2(z)| \leq C|t|$, y puesto que el soporte ψ , $\text{supp}(\psi_2) \subset [-R, R]$, para algún $R < \infty$, podemos acotar lo anterior por:

$$\begin{aligned}
|f_{ls}(x+h) - f_{ls}(x)| & \leq C' \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{|a|^3} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \frac{|h|}{|a|} dy db \\
& \leq C' |h| \int_{|a| \geq 1} \frac{da}{a^4} \int_{\mathbb{R}} db \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \\
& \leq C' |h| \int_{|a| \geq 1} a^{-4} da \int_{\mathbb{R}} db \int_{\substack{|x-b| \leq |a|R+1 \\ |y-b| \leq |a|R}} |f(y)| dy \\
& \leq C'' |h| \int_{|a| \geq 1} |a|^{-3} da \int_{|y-x| \leq 2|a|R+1} |f(y)| dy \\
& \leq C''' |h| \|f\|_2 \int_{|a| \geq 1} |a|^{-3} (4|a|R+2)^{\frac{1}{2}} dy \leq C'''' |h|.
\end{aligned}$$

Esto para todo $|h| \leq 1$, y como $|f_{ls}| < C'$, podemos concluir que $|f_{ls}(x+h) - f_{ls}(x)| \leq C|h|$, para todo h , uniformemente en x .

3. Por otro lado, tenemos que f_{ss} es también uniformemente acotada:

$$\begin{aligned}
|f_{ss}| &= \left| \int_{|a| \leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x) db \right| \\
&\leq C \int_{|a| \leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} |a|^{-\frac{1}{2}} \left| \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| db \\
&\leq C \int_{|a| \leq 1} \frac{da}{a^2} |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} \|\psi_2\|_1 \\
&= C \|\psi_2\|_1 \int_{|a| \leq 1} |a|^{-1+\alpha} da = C' < \infty.
\end{aligned}$$

4. Además, para $|h| \leq 1$, y como $|\psi_2(z+t) - \psi_2(z)| \leq C|t|$, y $\text{sop}(\psi_2) \subset [-R, R]$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|f_{ss}(x+h) - f_{ss}(x)| &= \\
&= \left| \int_{|a| \leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x+h) - \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \psi_{2(a,b)}(x) db \right| \\
&= \left| \int_{|a| \leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \left(\psi_{2(a,b)}(x+h) - \psi_{2(a,b)}(x) \right) db \right| \\
&= \left| \int_{|a| \leq |h|} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \left(\psi_{2(a,b)}(x+h) - \psi_{2(a,b)}(x) \right) db \right. \\
&\quad \left. + \int_{|h| \leq |a| \leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \left(\psi_{2(a,b)}(x+h) - \psi_{2(a,b)}(x) \right) db \right| \\
&\leq \int_{|a| \leq |h|} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} |\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| \left(|\psi_{2(a,b)}(x+h)| + |\psi_{2(a,b)}(x)| \right) db \\
&\quad + \int_{|h| \leq |a| \leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} |\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| \left| \psi_{2(a,b)}(x+h) - \psi_{2(a,b)}(x) \right| db \\
&\leq \int_{|a| \leq |h|} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} C |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(|\psi_{2(a,b)}(x+h)| + |\psi_{2(a,b)}(x)| \right) db \\
&\quad + \int_{|h| \leq |a| \leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} C |a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \left| \psi_{2(a,b)}(x+h) - \psi_{2(a,b)}(x) \right| db
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{|a|\leq|h|} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} C|a|^\alpha \left(\left| \psi_2\left(\frac{x+h-b}{a}\right) \right| + \left| \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| \right) db \\
&\quad + \int_{|h|\leq|a|\leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{|x-b|\leq|a|R+|h|} C|a|^\alpha \left| \psi_2\left(\frac{x-b}{a} + \frac{h}{a}\right) - \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| db \\
&\leq \int_{|a|\leq|h|} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} C|a|^\alpha \left(\left| \psi_2\left(\frac{x+h-b}{a}\right) \right| + \left| \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| \right) db \\
&\quad + \int_{|h|\leq|a|\leq 1} \frac{da}{a^2} \int_{|x-b|\leq|a|R+|h|} C_2|a|^\alpha \left| \frac{h}{a} \right| db \\
&\leq \int_{|a|\leq|h|} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} C|a|^{\alpha+1} \left(\left| \psi_2\left(z + \frac{h}{a}\right) \right| + \left| \psi_2(z) \right| \right) dz \\
&\quad + |h| \int_{|h|\leq|a|\leq 1} C_2|a|^{-3+\alpha} 2(|a|R + |h|) da \\
&\leq \int_{|a|\leq|h|} C|a|^{-1+\alpha} da \int_{-R}^R \left(\left| \psi_2\left(z + \frac{h}{a}\right) \right| + \left| \psi_2(z) \right| \right) dz \\
&\quad + |h| \int_{|h|\leq|a|\leq 1} C_2|a|^{-3+\alpha} 2(|a|R + |h|) da \\
&\leq \int_{|a|\leq|h|} 2C|a|^{-1+\alpha} da \left(\int_{-R}^R |\psi_2(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} + |h| \int_{|h|\leq|a|\leq 1} C_2|a|^{-3+\alpha} 2(|a|R + |h|) da \\
&\leq C_3 \left[\int_{|a|\leq|h|} |a|^{-1+\alpha} \|\psi_2\|_2 da + |h| \int_{|h|\leq|a|\leq 1} |a|^{-3+\alpha} 2(|a|R + |h|) da \right] \\
&\leq C' \left[\|\psi_2\|_2 \int_{|a|\leq|h|} |a|^{-1+\alpha} da + |h| \int_{|h|\leq|a|\leq 1} |a|^{-3+\alpha} (|a|R + |h|) da \right] \\
&= C'' |h|^\alpha.
\end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos $|f_{ts}(x+h) - f_{ts}(x)| \leq C'''|h|$, y $|f_{ss}(x+h) - f_{ss}(x)| \leq C''|h|^\alpha$.

Por lo tanto, tenemos que f es Hölder continua con exponente α . \square

Observación 2.2.2 Las Proposiciones 2.2.1, y 2.2.3 muestran que la continuidad de Hölder de una función f puede ser caracterizada por el decaimiento en a del valor absoluto de su transformada de ondeletas.

Cuando hay mayor orden de diferenciabilidad de f , y hay continuidad de Hölder, entonces f puede ser caracterizada similarmente por medio del decaimiento de los coeficientes de ondeletas si ψ tiene más de un momento cero: en orden a caracterizar $f \in C^n$ y la continuidad Hölder con exponente α de $f^{(n)}$, se requiere de una ondeleta ψ tal que $\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = 0$, para $m = 0, \dots, n$. Luego, si $\alpha \in]0, 1[$, se tiene:

$f \in C^n$, con todas las $f^{(m)}$, $m = 0, \dots, n$ acotadas y cuadrado integrables, y $f^{(n)}$ Hölder continua con exponente α , sí y sólo sí,

$$|\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| \leq C|a|^{n+\frac{1}{2}+\alpha},$$

uniformemente en a .

Proposición 2.2.4 Suponga que $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|\psi(x)|dx < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$. Si una función acotada f es Hölder continua en x_0 , con exponente $\alpha \in]0, 1[$, es decir:

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq C|h|^\alpha,$$

entonces:

$$|\langle f, \psi_{(a, x_0+b)} \rangle| \leq C|a|^{\frac{1}{2}}(|a|^\alpha + |b|^\alpha).$$

Demostración:

Por traslación, podemos asumir que $x_0 = 0$. Puesto que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(0)| |a|^{-\frac{1}{2}} \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |a|^{-\frac{1}{2}} \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| dx \\ &\leq C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left| y + \frac{b}{a} \right|^\alpha |\psi(y)| dy \\ &= C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{b}{a} \left(\frac{a}{b}y + 1 \right) \right|^\alpha |\psi(y)| dy \\ &= C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|b|^\alpha}{|a|^\alpha} \left| \frac{a}{b}y + 1 \right|^\alpha |\psi(y)| dy \\ &\leq C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{|b|^\alpha}{|a|^\alpha} \right) \left| \frac{a}{b}y + 1 \right|^\alpha |\psi(y)| dy \\ &= C|a|^{\frac{1}{2}} (|a|^\alpha + |b|^\alpha) \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{a}{b}y + 1 \right|^\alpha |\psi(y)| dy \end{aligned}$$

Afirmamos que si $0 < \alpha < 1$, entonces $\left| \frac{a}{b}y + 1 \right|^\alpha < 1 + \left| \frac{a}{b}y \right|$. En efecto, lo anterior equivale a probar:

$$\left| \frac{a}{b}y + 1 \right|^\alpha = e^{\alpha \ln \left| \frac{a}{b}y + 1 \right|} < 1 + \left| \frac{a}{b}y \right| = e^{1 \ln(1 + \left| \frac{a}{b}y \right|)}.$$

Pero, como la función exponencial es creciente, y como $\alpha < 1$, basta probar que $\left|\frac{a}{b}y + 1\right| < 1 + \left|\frac{a}{b}y\right|$, lo cual es válido por la desigualdad triangular en \mathbb{R} .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| &\leq C|a|^{\frac{1}{2}}(|a|^\alpha + |b|^\alpha) \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{a}{b}y + 1\right|^\alpha |\psi(y)| dy \\ &\leq C|a|^{\frac{1}{2}}(|a|^\alpha + |b|^\alpha) \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \left|\frac{a}{b}y\right|\right) |\psi(y)| dy \\ &\leq C'|a|^{\frac{1}{2}}(|a|^\alpha + |b|^\alpha). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.5 Suponga que ψ tiene soporte compacto. Suponga además que $f \in L^2(\mathbb{R})$ es acotada y continua. Si para algún $\gamma > 0$ y $\alpha \in]0, 1[$,

$$|\langle f, \psi_{(a,b)} \rangle| \leq C|a|^{\gamma+\frac{1}{2}} \quad \text{uniformemente en } b,$$

y

$$|\langle f, \psi_{(a,b+x_0)} \rangle| \leq C|a|^{\frac{1}{2}} \left(|a|^\alpha + \frac{|b|^\alpha}{|\log |b||} \right),$$

entonces, f es Hölder continua en x_0 con exponente α .

Demostración: Ver [3] de las referencias.

2.3. La Transformada continua de Ondeletas en varias dimensiones

En esta sección se muestra brevemente cómo es posible extender la transformada de ondeletas a funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, con $n > 1$.

Recordemos que por el Teorema 2.1.5, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, se tiene:

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2}.$$

Si consideramos solamente $a > 0$, obtenemos:

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^2},$$

donde:

$$C_\psi = 2\pi \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} = 2\pi \int_{-\infty}^0 |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} < \infty.$$

Del mismo modo en que se probó la Proposición 2.1.3, puede demostrarse que, para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$\langle f, g \rangle = C_\psi^{-1} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^{n+1}},$$

donde, $W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle$, como antes, $\psi_{(a,b)} = |a|^{-\frac{n}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y $b \in \mathbb{R}^n$, donde $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que:

$$C_\psi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|^n} < \infty.$$

La proposición (2.1.5), permite escribir $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como:

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} W_\psi f(a, b) \psi_{(a,b)} \frac{dad b}{a^{n+1}}.$$

Por ejemplo, en dos dimensiones, podemos definir la transformada de ondeletas utilizando rotaciones de la siguiente forma:

$$\psi_{a,b,\theta}(x) = a^{-1} \left(R_\theta^{-1} \left(\frac{x-b}{a} \right) \right),$$

donde, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^2$, y R_θ es la matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La condición de admisibilidad queda:

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} |\hat{\psi}(r\cos\theta, r\sin\theta)|^2 d\theta < \infty.$$

De donde,

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{\mathbb{R}^2} db \int_0^{2\pi} W_\psi f(a, b, \theta) \psi_{(a,b,\theta)} d\theta.$$

2.4. La Transformada Discreta de Ondeletas en L^2

En esta sección, se introduce la transformada discreta de Ondeletas. Tal como ocurre en la transformada continua, también se consideran translaciones y dilataciones de una función fija. Además, veremos que ciertas ondeletas generatrices forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

2.4.1. Discretizando la transformada de ondeletas

En la transformada continua de ondeletas, se considera una familia de funciones $\psi_{(a,b)}$, generadas a partir de una ondeleta madre $\psi \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\psi_{(a,b)}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.12)$$

Por conveniencia, en la discretización consideraremos sólo valores enteros para a , y b , con $a > 0$. Luego, la condición de admisibilidad queda:

$$C_\psi = 2\pi \int_0^\infty |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} = 2\pi \int_{-\infty}^0 |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} < \infty. \quad (2.13)$$

La discretización del parámetro de dilatación a , se realiza de la siguiente forma: Consideremos $a = a_0^m$, donde $m, a_0 \in \mathbb{Z}$, con $a_0 > 1$, y a_0 es un valor fijo.

Para el parámetro de traslación, tenemos:

Si $m = 0$, consideramos los múltiplos de b_0 , donde $b_0 \in \mathbb{Z}$, y $b_0 > 0$, es decir, $b = nb_0$, con $n \in \mathbb{Z}$. Ahora, si $m \neq 0$ hacemos $b = nb_0 a_0^m$.

Definición 2.4.1 Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función tal que ψ satisface la condición de admisibilidad (2.13) y $\|\psi\|_2 = 1$. Si $m, n \in \mathbb{Z}$, $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ con, $a_0 > 1, b_0 > 0$ fijos, entonces las ondeletas asociadas a ψ se definen por:

$$\psi_{(m,n)}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{x - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}x - nb_0). \quad (2.14)$$

La definición de la transformada discreta es análoga a (2.1.4), sólo que ahora se considera a ψ como una función real:

Definición 2.4.2 Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, con $a_0 > 1, b_0 > 0$ fijos. Se define la **transformada discreta** de ondeletas respecto a la ondeleta real $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, como:

$$W_\psi f(m, n) := \langle f, \psi_{(m,n)} \rangle = \int_{\mathbb{R}} a_0^{-\frac{m}{2}} f(x) \psi(a_0^{-m}x - nb_0) dx.$$

En el caso discreto, no es posible, en general, escribir $f \in L^2(\mathbb{R})$ del mismo modo como en la Proposición 2.1.5 del caso continuo.

Un caso interesante de estudiar, es cuando $a_0 = 2$ y $b_0 = 1$, pues, como veremos luego, para ciertas funciones $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, la familia de funciones $\psi_{(m,n)}$ para estos valores de a_0 y b_0 forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Consideremos ahora, la función de Haar:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego, si $a_0 = 2$, y $b_0 = 1$, obtenemos para (2.14):

$$\psi_{(m,n)}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n),$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Esta familia de funciones $\psi_{(m,n)}$, se conoce como las *funciones de Haar*. Probaremos ahora, que esta familia forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Note que $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0$, y $\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^1 |\psi(x)|^2 dx = 1$.

Observación 2.4.1 La elección de los valores a_0 y b_0 , determina qué función ψ se debe elegir, para que $\psi_{(m,n)}$ forme una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Proposición 2.4.1 Sea ψ la función de Haar. Entonces, si $m, n \in \mathbb{Z}$, la familia de funciones

$$\psi_{(m,n)}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n),$$

forma una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración: Debemos probar que $\psi_{(m,n)}$ es ortonormal, y que cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser aproximada por una combinación lineal finita de $\psi_{(m,n)}$.

Probaremos primero la ortonormalidad. Debemos probar que:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{(m,n)}(x) \psi_{(m',n')}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } (m, n) = (m', n') \\ 0 & \text{si } (m, n) \neq (m', n') \end{cases}$$

Si $m = m'$ y $n = n'$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_{(m,n)}(x)\psi_{(m',n')}(x)dx &= 2^{-m} \int_{\mathbb{R}} (\psi(2^{-m}x - n))^2 dx \quad \text{Haciendo } z = (2^{-m}x - n) \\
&= 2^{-m}2^m \int_{\mathbb{R}} (\psi(z))^2 dz \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sea ahora $(m, n) \neq (m', n')$, y supongamos que $m < m'$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_{(m,n)}(x)\psi_{(m',n')}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n)2^{-\frac{m'}{2}} \psi(2^{-m'}x - n')dx \\
&= 2^{-\frac{1}{2}(m+m')} \int_{\mathbb{R}} \psi(2^{-m}x - n)\psi(2^{-m'}x - n')dx
\end{aligned}$$

Sea $y = 2^{-m}x - n$, luego $dx = 2^m dy$, y $2^m(y + n) = x$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi_{(m,n)}\psi_{(m',n')}dx &= 2^{-\frac{1}{2}(m+m')} \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\psi(2^{-m'}2^m(y + n) - n')dy \\
&= 2^{-\frac{1}{2}(m+m')} \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\psi(2^{m-m'}y + 2^{m-m'}n - n')dy \\
&= 2^{-\frac{1}{2}(m+m')} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \psi(2^{m-m'}y + m'')dy - \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(2^{m-m'}y + m'')dy \right).
\end{aligned}$$

Pero, estas dos integrales son iguales a cero, pues $\int_0^1 \psi = 0$, luego si $(m, n) \neq (m', n')$ se tiene $\int_{\mathbb{R}} \psi_{(m,n)}(x)\psi_{(m',n')}(x)dx = 0$.

Hemos probado la ortonormalidad. Entonces, tenemos que $\{\psi_{(m,n)}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, donde ψ es la función de Haar, es un sistema ortonormal.

Luego, como $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert completo, entonces, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, se tiene por la Proposición 1.4.1:

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{(m,n)} \rangle \psi_{(m,n)} \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \psi_{(m,n)} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{(m,n)}(x) dx \right). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

□

De la proposición anterior, tenemos, el teorema de Parseval para las ondeletas discretas.

Proposición 2.4.2 (Teorema de Parseval) Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, y $\psi_{(m,n)} \in L^2(\mathbb{R})$, $m, n \in \mathbb{Z}$, las funciones de Haar. Entonces:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{(m,n)} \rangle \langle g, \psi_{(m,n)} \rangle.$$

Demostración: Por (2.15) tenemos:

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{(m,n)} \rangle \psi_{(m,n)}$$

Luego, para toda $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left\langle \langle f, \psi_{(m,n)} \rangle \psi_{(m,n)}, g \right\rangle \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{(m,n)} \rangle \langle \psi_{(m,n)}, g \rangle \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{(m,n)} \rangle \langle g, \psi_{(m,n)} \rangle.
\end{aligned}$$

□

2.5. Frames

Los *Frames* fueron introducidos por Duffin y Schaeffer (1952), en el contexto de las series de Fourier no Armónicas, es decir, expansión de funciones de $L^2([0, 1])$ en exponenciales complejos $e^{i\lambda_n x}$, donde $\lambda_n \neq 2\pi n$.

En esta sección, relacionaremos los frames con la condición de admisibilidad para las ondeletas discretas.

Definición 2.5.1 Una familia de funciones $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es llamada un *frame* si existen $A > 0$, $B < \infty$, tal que, para toda $f \in \mathcal{H}$ se tiene

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Llamamos a A y B *cotas del frame*.

Si ambas cotas del frame son iguales, $A = B$, entonces, llamamos al frame, un *frame ajustado*. En el frame ajustado, tenemos, para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = A\|f\|^2. \quad (2.16)$$

Luego, usando la identidad de polarización², tenemos por (2.16):

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} [\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2] \\ &= \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{4} \sum_{j \in J} \left[|\langle f + g, \varphi_j \rangle|^2 - |\langle f - g, \varphi_j \rangle|^2 + i|\langle f + ig, \varphi_j \rangle|^2 - i|\langle f - ig, \varphi_j \rangle|^2 \right] \\ &= \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{4} \sum_{j \in J} \left[4\langle f, \varphi_j \rangle \overline{\langle g, \varphi_j \rangle} \right] \\ &= \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{4} \sum_{j \in J} \left[4\langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle \right] \end{aligned}$$

²Si $f, g \in \mathcal{H}$, entonces, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2]$

De donde se obtiene

$$A\langle f, g \rangle = \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle.$$

Así, para toda $g \in \mathcal{H}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= A^{-1} \sum_j \langle \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{H} \\ &= \left\langle A^{-1} \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, g \right\rangle. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j. \quad (2.17)$$

La expresión (2.17) es similar a la expansión de f en una base ortonormal, pero, uno de los aspectos interesantes de los frames, es que la familia φ_j no es necesariamente ortonormal. Por lo tanto, podemos escribir f usando una *base no ortonormal*.

Ejemplo 2.5.1 Tomando $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $e_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. Luego, para cualquier $v = (v_1, v_2)$ en \mathcal{H} , tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\langle v, e_j \rangle|^2 &= |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 \\ &= \frac{3}{2} [|v_1|^2 + |v_2|^2] = \frac{3}{2} \|v\|^2. \end{aligned}$$

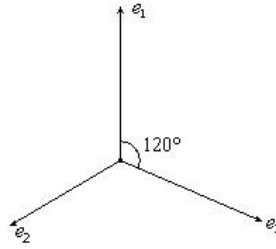


FIGURA: TRES VECTORES EN \mathbb{C}^2 QUE FORMAN UN FRAME AJUSTADO.

En este caso, tenemos que la cota del frame es $A = \frac{3}{2}$. Luego, si $v \in \mathbb{C}^2$, entonces:

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \langle v, e_j \rangle e_j.$$

Observamos que si $A = 1$, entonces, la representación anterior, es la misma que si φ_j fuese una base ortonormal. Esta afirmación es válida, lo que se señala en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.1 Si $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ es un frame ajustado en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , con $A = 1$, y si $\|\varphi_j\| = 1$ para todo $j \in J$, entonces φ_j constituye una base ortonormal de \mathcal{H} .

Demostración: Ver [3] de las referencias.

Ahora, regresamos a la definición (2.4.1),

$$\psi_{(m,n)}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}x - nb_0).$$

Mostraremos ahora, que si $\psi_{(m,n)}$, constituye un frame, entonces la condición de admisibilidad (2.13) se satisface.

Proposición 2.5.2 Si $\psi_{(m,n)}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}}\psi(a_0^{-m}x - nb_0)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ constituye un frame para $L^2(\mathbb{R})$ con cotas del frame A, B , entonces

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_0^\infty |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B$$

y

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B$$

Demostración: Ver [3] de las referencias, p.63-66.

Observación 2.5.1 Esta proposición permite construir ondeletas, a partir de un frame $\psi_{(m,n)}$, pues esto garantiza la condición de admisibilidad (2.13) que es la condición más fuerte de la definición (2.4.1).

Observación 2.5.2 Si $\psi_{(m,n)}$ es un frame ajustado, es decir, $A = B$, entonces, por la proposición anterior, tenemos:

$$A = \frac{2\pi}{b_0 \ln a_0} \int_0^\infty |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|}.$$

En particular, si $\psi_{(m,n)}$ constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (como por ejemplo la base de Haar), entonces:

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} = \int_0^\infty |\hat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|}.$$

En efecto,

Si $\psi_{(m,n)}(x) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}x - n)$, donde ψ es la función de Haar. En este caso, $a_0 = 2$, y $b_0 = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi x} dx - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{(1 - 2e^{-\frac{i\xi}{2}} + e^{-i\xi})}{i\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{(1 - e^{-\frac{i\xi}{2}})^2}{i\xi}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|\hat{\psi}(\xi)| &= \frac{|(1 - e^{-\frac{i\xi}{2}})|^2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\xi|} \\
&= \frac{1 - e^{\frac{i\xi}{2}} - e^{-\frac{i\xi}{2}} + 1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\xi|} \\
&= \frac{(2 - 2\cos\frac{\xi}{2})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\xi|}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} = \frac{(2 - 2\cos\frac{\xi}{2})^2}{(2\pi)|\xi|^3},$$

Así,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(2 - 2\cos\frac{\xi}{2})^2}{(2\pi)|\xi|^3} d\xi = \frac{\ln 2}{2\pi}.$$

Capítulo 3

Aplicaciones

En este último capítulo, se resumen algunas aplicaciones matemáticas de las ondeletas.

3.1. Análisis de Multiresolución

En esta sección se muestra una breve introducción a una de las principales aplicaciones de las ondeletas, conocido como el análisis de multiresolución, que consiste básicamente en un método para contruir bases ortonormales de ciertos espacios de funciones.

Definición 3.1.1 Una *ondeleta ortonormal* es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que la familia de funciones $\psi_{(j,k)}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$, con $j, k \in \mathbb{Z}$, es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Observación 3.1.1 Note que familia de funciones $\psi_{(j,k)}(x)$ es similar a las funciones de Haar definidas en el capítulo anterior.

Ya hemos visto, que la función de Haar proporciona un ejemplo de ondeleta ortonormal. Con el fin de proporcionar un método que permita contruir ondeletas ortonormales se introduce otro concepto, el cual permite generalizar la construcción de Haar:

Definición 3.1.2 Un *Análisis de Multiresolución* (AMR) es una sucesión creciente de subespacios cerrados $\{V_n\} \subset L^2(\mathbb{R})$ definidos para $n \in \mathbb{Z}$ por:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

junto con una función $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\text{i) } \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} V_n \text{ es denso en } L^2(\mathbb{R}), \text{ es decir, } \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} V_n} = L^2(\mathbb{R}).$$

$$\text{ii) } \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} V_n = \{0\}.$$

$$\text{iii) } f \in V_j \text{ sí y sólo sí } f(2^{-j}\cdot) \in V_0.$$

$$\text{iv) } \Phi(x - k)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ es una base ortonormal de } V_0.$$

La función Φ se llama *función escala del AMR*.

Observación 3.1.2 De la condición (iv), y la Proposición 1.4.1 se tiene, que:

$$V_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); f(x) = \sum_k c_k \Phi(x - k), \text{ donde } \sum_k |c_k| < \infty \right\},$$

por lo que V_0 está definido de manera única.

Ejemplo 3.1.1 Sea V_j el subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ de las funciones constantes en intervalos de la forma $I_{jk} := [2^j k, 2^j(k+1)[$, con $k \in \mathbb{Z}$, y considérese la función $\Phi(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$, y 0 en otro caso. Veamos que los V_j junto con Φ forman un AMR. En efecto,

- a) Si $j < j'$, entonces, se tiene que $V_j \subset V_{j'}$, pues $[2^j k, 2^j(k+1)[\subset [2^{j'} k, 2^{j'}(k+1)[$, esto porque $k < k+1$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, y si consideramos $h(j) = 2^j$, vemos que h es una función creciente para todo j .
- b) Puesto que las funciones f de V_j son constantes, entonces son continuas. Luego, si $x \in \overline{I_{jk}} = [2^j k, 2^j(k+1)]$, entonces para $f : I_{jk} \rightarrow V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, se tiene $f(x) \in \overline{V_j}$ (ver [2], p.26). Luego, $\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} V_n} = L^2(\mathbb{R})$.
- c) Para la intersección, puesto que $V_j \subset V_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, y como las funciones son constantes, entonces para probar que $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} V_n = \{0\}$, basta probar que $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} [2^j k, 2^j(k+1)[= \{0\}$. En efecto, puesto que $[2^j k, 2^j(k+1)[\subset [2^{(j+1)} k, 2^{(j+1)}(k+1)[$, se sigue que $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} [2^j k, 2^j(k+1)[= \{0\}$, por lo que $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} V_n = \{0\}$.
- e) Tenemos que $V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ tal que } f_{[2^j k, 2^j(k+1))} \text{ es constante}\}$, por lo que $V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ tal que } f_{[k, (k+1))} = c, \text{ con } c \text{ constante}\}$. Debemos probar que si $f \in V_j$, entonces $f(2^{-j} \cdot) \in V_0$. Si $f \in V_j$, entonces $f(x) = c$ para todo $x \in [2^j k, 2^j(k+1))$, por que tomando $2^{-j}x$ en vez de x , obtenemos $f(2^{-j}x) = c$ para todo $x \in [k, (k+1))$, lo que equivale, $f(2^{-j} \cdot) \in V_0$.
- f) Falta probar que $\Phi(x-k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 . Para esto, nótese que $\{\Phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\} = \{\chi_{[k, k+1]} : k \in \mathbb{Z}\}$, de donde, cualquier función constante f en $[k, k+1)$ puede escribirse como combinación lineal de $\chi_{[k, k+1]}$, con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que $\Phi(x-k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 .

Por lo tanto, hemos probado que los conjuntos $V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ tal que } f_{[2^j k, 2^j(k+1))} \text{ es constante}\}$, con $j \in \mathbb{Z}$, junto con la función escala Φ forman un AMR.

Veamos ahora, cómo es posible interpretar el efecto de los espacios V_j en el análisis del gráfico de una función. Consideremos la función $f(x) = \sin(4\pi x) \sin(2\pi x)$ definida en el intervalo $[0, \frac{\pi}{3}]$.

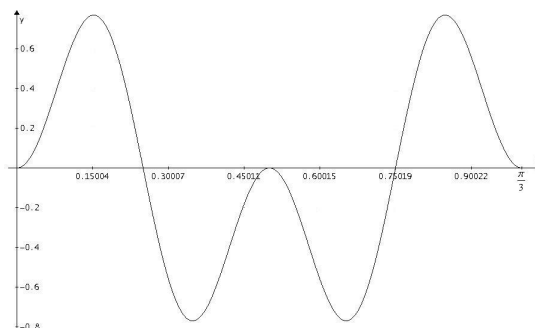


FIGURA: GRÁFICO DE $f(x) = \sin(4\pi x) \sin(2\pi x)$.

Representaremos la función f en el espacio $V_{-5} = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ tal que } f|_{[2^{-5}k, 2^{-5}(k+1))} \text{ es constante}\}$. Puesto que Φ es una base ortonormal de V_0 , entonces, podemos escribir cualquier función de V_0 haciendo combinaciones lineales de $\Phi(x - k)_{k \in \mathbb{Z}}$, o equivalentemente, combinaciones de la función $\chi_{[k, k+1]}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Realizemos una partición del intervalo $[0, \frac{\pi}{3}]$ de la forma $x_k = [2^{-5}k, 2^{-5}(k+1))$, $k = 0, \dots, m$. Entonces, podremos aproximar f en dicho intervalo haciendo el producto de la función característica en dicho intervalo con la función f evaluada en $2^{-5}k$:

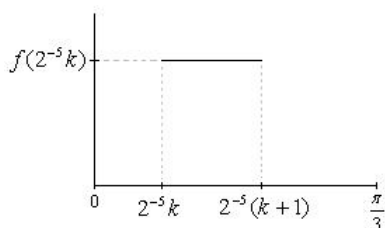


FIGURA: APROXIMACIÓN DE f EN $[2^{-5}k, 2^{-5}(k+1))$.

Luego, para aproximar f en $[0, \frac{\pi}{3}]$ basta sumar todas las aproximaciones hechas en los intervalos $[2^{-5}k, 2^{-5}(k+1))$, es decir:

$$f(x) = \sum_k f(2^{-5}k)\chi_{[2^{-5}k, 2^{-5}(k+1))}(x).$$

El gráfico de f en V_{-5} es,

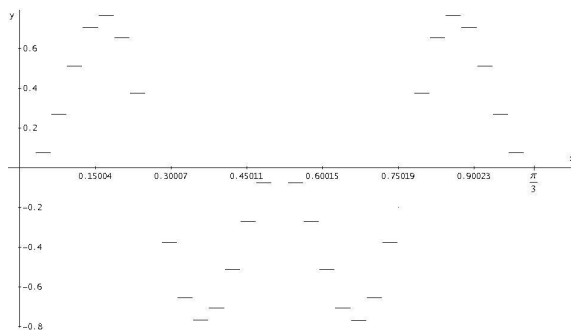


FIGURA: GRÁFICO DE $f(x) = \sin(4\pi x) \sin(2\pi x)$ EN V_{-5} .

Del mismo modo, que para V_{-5} , podemos aproximar f en V_{-7} , y V_{-9} , obteniendo, $f(x) = \sum_k f(2^{-7}k)\chi_{[2^{-7}k, 2^{-7}(k+1))}(x)$, y $f(x) = \sum_k f(2^{-9}k)\chi_{[2^{-9}k, 2^{-9}(k+1))}(x)$, respectivamente. Los gráficos correspondientes son:

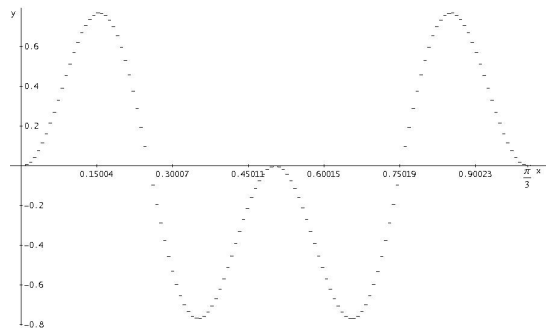


FIGURA: GRÁFICO DE $f(x) = \sin(4\pi x) \sin(2\pi x)$ EN V_{-7} .

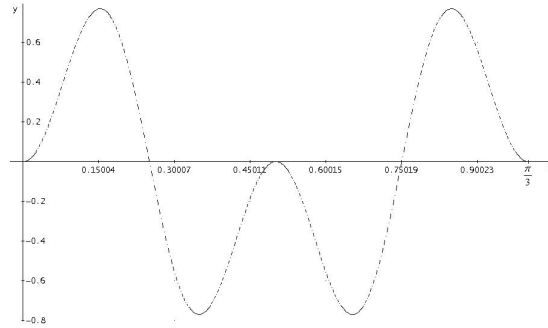


FIGURA: GRÁFICO DE $f(x) = \sin(4\pi x) \sin(2\pi x)$ EN V_{-9} .

La proposición siguiente muestra que la función escala Φ del AMR, para la cual $\Phi(x-k)$ es una base ortonormal de V_0 , permite contruir una familia de funciones que forman una base ortonormal para todos los V_j .

Proposición 3.1.1 Suponga que $\{V_j\}$ es un AMR con función escala Φ . Entonces, para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, el conjunto de funciones:

$$\{\Phi_{(j,k)}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \Phi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal para V_j .

Demostración: Para probar que $\Phi_{(j,k)}$ genera a V_j , debemos mostrar que cualquier función $f \in V_j$ puede ser escrita como combinación lineal de $\{\Phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Usando la condición (iii) de la definición del AMR, se tiene que la función $f(2^{-j}x)$ pertenece a V_0 , y por lo tanto, $f(2^{-j}x)$ es combinación lineal de $\{\Phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$. Luego, reemplazando x por $2^{-j}x$, se sigue que $f(x)$ es combinación lineal de $\{\Phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$. La ortonormalidad se prueba de manera análoga a lo realizado en la Proposición 2.4.1. \square

3.2. Caracterización de espacios de funciones usando ondeletas

En esta sección, definimos el concepto de base *incondicional*, y mostramos que la familia de funciones $\psi_{(m,n)}$ constituye una base de este tipo para $L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$, y también para otros espacios de funciones.

Definición 3.2.1 Llamamos a una familia de funciones $\{\psi_j\}_{j \in J}$ una **base incondicional** de $L^p(\mathbb{R})$, si $\{\psi_j\}_{j \in J}$ es una base para todos los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

Proposición 3.2.1 Si $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ y $|\psi(x)|, |\psi'(x)| \leq M(1 + |x|)^{-1-\epsilon}$ para algún M y $\epsilon > 0$, y si $\psi_{(m,n)}(x) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}x - n)$ constituye una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$, entonces la familia de funciones $\{\psi_{(m,n)}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ también constituye una base para todos los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$.

Demostración: Ver [3] de las referencias.

Puesto que $\psi_{(m,n)}$ constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces, podemos caracterizar cualquier función $f \in L^p(\mathbb{R})$ usando sólo el valor absoluto de los coeficientes de las ondeletas de f . Es decir, dada f , entonces podemos decidir si $f \in L^p(\mathbb{R})$, usando solamente $|\langle f, \psi_{(m,n)} \rangle|$. Explícitamente, el criterio es el siguiente:

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \iff \left[\sum_{m,n} |\langle f, \psi_{(m,n)} \rangle|^2 |\psi_{(m,n)}(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R})$$

Similarmente, las ondeletas proveen de bases incondicionales y caracterizaciones como la anterior, para diversos espacios de funciones. A continuación se muestra una caracterización para los espacios de Sobolev:

Espacios de Sobolev $W^s(\mathbb{R})$.

El espacio de Sobolev está definido como el conjunto:

$$W^s(\mathbb{R}) := \left\{ f; \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

Su caracterización por medio de los coeficientes de las ondeletas está dada por:

$$f \in W^s(\mathbb{R}) \iff \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{(m,n)} \rangle|^2 (1 + 2^{-2ms}) < \infty.$$

3.3. Análisis de Fourier versus Ondeletas

Para finalizar, se realiza una comparación entre el análisis de Fourier y el de ondeletas.

El análisis de ondeletas está especialmente indicado para señales con pulsos o intermitencias, es decir, con discontinuidades, o en otras palabras, sucesos que ocurren de manera no periódica. Para estas señales, Fourier aporta muy poca información, además Fourier es inestable frente a señales de este tipo.

La mayor ventaja de las ondeletas sobre la transformada de Fourier, es que permite analizar señales con discontinuidades.

La Transformada Discreta de ondeletas presenta además claras ventajas frente a su contrapartida de Fourier:

- Más rápida desde el punto de vista computacional.
- En muchos casos proporciona un mejor ajuste a los datos con menos coeficientes. (Permitiendo una mejor compresión de los datos que los métodos basados en Fourier).
- Las técnicas de filtrado de ruido de imágenes basadas en ondeletas dan mejores resultados.
- Una de las aplicaciones más populares es la de compresión de imágenes. Los métodos basados en las ondeletas proporcionan mejores compresiones que los basados en Fourier. Actualmente, la base de huellas dactilares del FBI, almacena las imágenes usando las ondeletas.

Bibliografía

- [1] A. Boggess y F. Narcowich, *A first course in wavelets with Fourier analysis*, Prentice Hall, 2001.
- [2] N. Bourbaki, *General Topology, Part I*, Addison-Wesley, 1966.
- [3] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. Siam, CBMS-NSF Regional conference in applied mathematics, N°61, Philadelphia, 1993.
- [4] G. Garridos y D. Speegle, *Completeness in the set of wavelest*, AMS, Volume 128, Number 4, Pages 1157 a 1166, 1999. Versión electrónica.
- [5] C. Gasquet, *Fourier analysis and applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [6] D. Guy, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [7] G. Kaiser, *A Friendly guide to wavelets*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [8] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis whith applications*. Jhon Wiley and Sons. Inc, USA, 1978.
- [9] E. Lima, *Curso de análise volume 1*, Projeto Euclides, IMPA, 1989.

- [10] M. Pinsky, *Introducción al análisis de Fourier y las ondeletas*. Thomson, México, 2003.
- [11] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*. McGraw-Hill, Madrid, 1988.