

Variable Compleja

Teoría, problemas resueltos y propuestos

Dr. Carlos Lizama

Universidad de Santiago de Chile

Facultad de Ciencia

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Introducción

El presente texto de Variable Compleja corresponde al curso del mismo nombre (hoy Cálculo IV) impartido por el autor a la carrera de Ingeniería Matemática durante varios semestres consecutivos.

El libro esta dividido en dos partes. La primera parte, contiene los tópicos de teoría clásicos que debieran ser cubiertos en un semestre lectivo. En el primer capítulo, se incluyen propiedades básicas de los números complejos y sus propiedades algebraicas, que se revisan muy rápidamente. Luego, nos concentramos en la representación geométrica, tanto en su forma polar como cartesiana. Posteriormente, damos énfasis en la representación en variable compleja de elementos estándar de la geometría, como son el círculo y la recta. También, nos encontramos con la representación de los números complejos en la esfera de Riemann, lo que se conoce como proyección estereográfica, que admite interesantes aplicaciones en otras ramas de las ciencias. Luego, introducimos de manera estándar los elementos del análisis por medio de la noción de distancia en el plano complejo. Finalizamos el capítulo con un vistazo a varias funciones básicas como la exponencial, seno y coseno. El capítulo 2 se concentra en lo que será la parte medular de este curso: Las funciones analíticas u holomorfas. Se revisa la definición, que se presenta como la extensión natural del concepto de derivada en la recta real. Luego, varias nociones equivalentes son presentadas a lo largo del texto, lo que constituye la columna vertebral de estos apuntes. El concepto de función analítica es examinado con variados ejemplos concretos al finalizar este capítulo. El capítulo 3,

se dedica a construir la primera equivalencia práctica de función analítica por medio de series de Taylor. De paso, nos encontramos con otros conceptos importantes, como la extensión y prolongación analítica. Finalizamos enfatizando una diferencia geométrica importante, las transformaciones conformes. El capítulo 4 cambia el rumbo de la teoría para dar con otra caracterización de las funciones analíticas por medio del concepto de integración de funciones de variable compleja. Para ello, se revisa la noción de integral de línea y se procede a definir y establecer los pilares de la teoría de integración desde el teorema clásico de Stokes. Con ello, aparece de manera natural la fórmula de Cauchy que está en la base de todos los teoremas fundamentales de variable compleja. El capítulo 5, nos provee de un conjunto de herramientas que son necesarias conocer y aparecen en una variedad de lugares tanto en matemática pura como aplicada. La principal es el cálculo de integrales mediante el teorema de residuos.

La segunda parte de este libro está formada por una gran cantidad de problemas propuestos y resueltos. La mayoría de ellos fueron parte de controles de seguimiento y exámenes de semestre, y por lo tanto constituyen la experiencia de los estudiantes con el material de este curso.

Mis agradecimientos a Daniela Vilches, quien trabajó estos apuntes durante el primer y segundo semestres del 2012 y a Joselyn Pinilla, quien finalmente pudo dar forma al largo camino para concluir con estos apuntes durante el segundo semestre de 2013.

Santiago, Marzo 2015.

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Introducción	5
1.2. Propiedades algebraicas	7
1.3. Representación geométrica	10
1.4. Ecuación del círculo y de la recta	13
1.5. Proyección estereográfica	14
1.6. Topología en \mathbb{C}	16
1.7. Funciones básicas	17
2. Funciones de Variable Compleja	24
2.1. Funciones analíticas	24
2.2. Algunas funciones de variable compleja.	35
3. Series	40
3.1. Series de Taylor	40
3.2. Representaciones por series de Taylor	45
3.3. Serie geométrica	46
3.4. Extensión analítica	49

	4
3.5. Prolongación analítica	50
3.6. Transformaciones conformes	52
4. Integración	53
4.1. Definición y propiedades	53
4.2. Fórmula de Cauchy	55
4.3. Teoría del índice y homotopía	58
4.4. Teoremas fundamentales	59
5. Métodos de integración	70
5.1. Desarrollo en serie de Laurent	70
5.2. Residuos	76
5.3. Cálculo de integrales	84
5.4. Aplicación del teorema de residuos	85
5.5. Fórmula de Poisson	93
5.6. Fórmula de Jensen	98
5.7. Automorfismos del disco unitario	101
6. Ejercicios	106
6.1. Ejercicios resueltos	106
6.2. Ejercicios propuestos	154

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

La primera noción de un número complejo fue descubierta en conexión con resolver ecuaciones cuadráticas.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación $z^2 + 1$. Obviamente, esta no tiene soluciones reales, ya que para cualquier real x , $x^2 \geq 0$ y $x^2 + 1 > 0$.

La idea es escribir, formalmente, $z = \pm\sqrt{-1}$; pero no existe número real cuyo cuadrado de -1 . Luego, si la ecuación tiene una solución, debe ser en un sistema de números mayor que el conjunto de los números reales.

Este fue el problema planteado a matemáticos por alrededor de 700 años: Extender los reales a un sistema mayor de números en el cual la ecuación $z^2 + 1$ puede tener una solución.

C. Gauss (1780–1840) fue el primer matemático en usar sistemáticamente números complejos. La serie Hipergeométrica

$$1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1) \cdot 1 \cdot 2}x^2 + \dots$$

Se comprende mejor al analizar los complejos $|x| < 1$. (Note que si $b = c$ y $a = 1$ se obtiene la serie geométrica).

Gauss Demostró:

"Toda ecuación $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ tiene n -soluciones en \mathbb{C} ".

A. L. Cauchy dio la estructura central al desarrollo de variable compleja a través de la idea de la integral de línea:

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

la cual da sentido a la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

1.2. Propiedades algebraicas

El conjunto de los números complejos \mathbb{C} es un cuerpo con la suma y el producto definido de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, bc - ad)\}$$

Las unidades aditivas y multiplicativas son $(0, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente.

Veamos:

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

y

$$(a, b)(1, 0) = (a, b).$$

Además, cada elemento no nulo, tiene inverso. Para (a, b) , su inverso es $(-a, -b)$.

Definimos $i = (0, 1)$, entonces podemos escribir el par (a, b) de la siguiente forma:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib.$$

Esta es la notación que se ocupará desde ahora.

Bajo la suma y producto, \mathbb{C} es un cuerpo conmutativo.

Observación 1 Consideremos $i = (0, 1)$, entonces:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Luego, $i^2 = -1$.

Otra forma de definir el conjunto de los números complejos:

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Como $i^2 = -1$, la ecuación $z^2 + 1$ tiene al menos una raíz en \mathbb{C} . En efecto:

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i).$$

Más generalmente:

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

Si $z = a \in \mathbb{R}$ y $w = b \in \mathbb{R}$, entonces (para $a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

con lo cual se tiene una fórmula para el recíproco de un número complejo.

Notación 2

$\bar{z} = a - ib$ es el *conjugado* de $z = a + ib$.

$|z| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ es el *valor absoluto* de z .

Con las notaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \text{si } z \neq 0$$

Definición 3 Si $z = a + ib$, diremos que a es la parte real de z y escribimos: $a = \operatorname{Re}(z)$. Análogamente, diremos que b es la parte imaginaria de z y escribimos: $b = \operatorname{Im}(z)$.

En consecuencia, $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$. Del mismo modo, podemos escribir el conjugado de z en función de su parte real e imaginaria, es decir, $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$.

Además, podemos escribir la parte real e imaginaria en función de z y \bar{z} . Sumando, se obtiene: $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

Por otro lado, restando, se tiene: $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Note además que $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ y $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$.

Propiedades Básicas

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

2. $\overline{\bar{z}} = z$

3. $\overline{wz} = \bar{w}\bar{z}$

4. $|zw| = |z| |w|$

5. $|\bar{z}| = |z|$

Proposición 4 (*Desigualdad Triangular*)

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\
 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\
 &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\
 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
 &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
 &= (|z| + |w|)^2
 \end{aligned}$$

■

1.3. Representación geométrica

Para la forma polar tenemos que $\cos \theta = \frac{a}{r}$ y $\sin \theta = \frac{b}{r}$, de donde, $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$. Se observa que $r = |z|$. Y definimos $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. El problema en general es que $\operatorname{Arg}(z)$ es una función multivariable. De esta forma, tendremos que elegir un rango de valores admisibles para θ .

Propiedad: $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$.

Demostración.

Sea

$$z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Entonces, consideramos

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

y

$$w = |w| (\cos \phi + i \sin \phi).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 zw &= |z| |w| (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\
 &= |z| |w| (\cos \theta \cos \phi + i \sin \phi \cos \theta + i \sin \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) \\
 &= |z| |w| [(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i (\sin \phi \cos \theta + \sin \theta \cos \phi)] \\
 &= |z| |w| (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\
 &= |z| |w| [\cos (\theta + \phi) + i \sin (\theta + \phi)]
 \end{aligned}$$

Entonces: $Arg(zw) = \theta + \phi = Arg(z) + Arg(w)$. ■

Consideremos las siguientes figuras:

Definición 5 *Definimos la ecuación exponencial como*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

También se puede escribir como $cis(\theta)$ o $exp(\theta)$.

Consideremos $f(\theta) := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Sea $\theta = 0$, entonces, $f(0) = \cos(0) + i \sin(0) = 1$.

Además

$$\begin{aligned}
 f(\theta)f(\phi) &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \\
 &= \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi) \\
 &= f(\theta + \phi).
 \end{aligned}$$

Entonces, cualquier función que cumpla estas dos propiedades se llama ecuación de Abel y se escribe como:

$$f(x) = e^{kx}.$$

Propiedades de la función exponencial

$$1. e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} e^{i\phi}$$

$$2. e^{(i\theta)\alpha} = e^{i\theta\alpha}$$

$$3. e^{(i\theta)\frac{1}{n}} = e^{i\theta\frac{1}{n}}$$

$$4. e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$5. e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$$

Si analizamos el comportamiento de la función exponencial podemos observar que:

$$e^{2ki\pi} = 1 \quad , \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, si queremos de resolver la ecuación $z^n = 1$, podemos reescribirla como:

$$z^n = e^{2ki\pi}.$$

Por lo tanto

$$z = e^{\frac{2ki\pi}{n}}.$$

Más generalmente tenemos:

$$\begin{aligned} z^n &= w \\ &= |w| e^{i\text{Arg}(w)} \\ &= |w| e^{i\text{Arg}(w)e^{2ki\pi}} \\ &= |w| e^{i(\text{Arg}(w)+2k\pi)}. \end{aligned}$$

Luego:

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\text{Arg}(w)+2k\pi)}{n}}.$$

1.4. Ecuación del círculo y de la recta

$$\begin{aligned}
 |z - z_0| = r &\Leftrightarrow |z - z_0|^2 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2 \\
 &\Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + (|z|^2 - r^2) = 0
 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de un círculo en el plano complejo es:

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora la ecuación de una recta. Sabemos que la ecuación de una recta es: $y = mx + n$. Si consideramos $x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Y reemplazando estos valores en la ecuación nos queda:

$$\begin{aligned}
 \frac{z - \bar{z}}{2i} &= m\frac{z + \bar{z}}{2} + n \\
 \Leftrightarrow z - \bar{z} &= im(z + \bar{z}) + 2in \\
 \Leftrightarrow z - \bar{z} &= imz + im\bar{z} + 2in \\
 \Leftrightarrow z - imz - \bar{z}im - \bar{z} - 2in &= 0 \\
 \Leftrightarrow z(1 - im) - \bar{z}(1 + im) - 2in &= 0 \\
 \Leftrightarrow z(m + i) + \bar{z}(m - i) + 2n &= 0
 \end{aligned}$$

Si hacemos $z_0 = m - i$, $\bar{z}_0 = m + i$ y $\beta = 2n$, lo que se obtiene es la ecuación de la recta:

$$z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 + \beta = 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

1.5. Proyección estereográfica

Si consideramos $f(z) = \frac{1}{z}$ y con $z = 0$, se obtiene $f(0) = \infty$. Con esto se define el siguiente conjunto: $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ecuaciones de la proyección

1. Dado B en la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, determinar $Q = \pi(B)$.

Sea $L : t(0, 0, 1) + (1 - t)(u, v, w)$, tratemos de encontrar t_0 tal que la recta anterior, L , intersecta al plano complejo. La recta la podemos reescribir como:

$$L : ((1 - t)u, (1 - t)v, t + (1 - t)w).$$

Buscamos t_0 tal que:

$$\begin{aligned} t_0 + (1 - t_0)w &= 0 \Leftrightarrow t_0 + w - wt_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow t_0 = \frac{-w}{1 - w} = \frac{w}{w - 1}, \quad w \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - t_0 = 1 - \frac{w}{w - 1} = \frac{1}{1 - w} \end{aligned}$$

Por lo tanto $Q = \pi(B)$ es :

$$Q = \left(\frac{1}{1 - w}u, \frac{1}{1 - w}v, 0 \right).$$

2. Dado A en el plano $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, determinar $P(A)$ en la esfera \mathbb{S}^2 :

$$L : t(0, 0, 1) + (1 - t)(x, y, 0).$$

ó

$$L = ((1 - t)x, (1 - t)y, t)$$

Encontremos t_0 tal que la recta L interseca a la esfera. Es decir:

$$[(1-t)x]^2 + [(1-t)y]^2 + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^2 x^2 + (1-t)^2 y^2 = 1 - t^2 = (1-t)(1+t) \quad / \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)(x^2 + y^2) = 1+t$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - t(x^2 + y^2) = 1+t$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = t(1 + x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Luego:

$$1 - t_0 = 1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Por lo tanto $P(A)$ es:

$$\begin{aligned} P(A) &= ((1-t_0)x, (1-t_0)y, t_0) \\ &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Si hacemos $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$, se tiene:

$$\begin{aligned} 2x &= z + \bar{z} \\ 2y &= \frac{z - \bar{z}}{i} = -i(z - \bar{z}) = i(\bar{z} - z) \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= |z|^2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(A) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{i(\bar{z} - z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

1.6. Topología en \mathbb{C}

La forma común de calcular la distancia en \mathbb{C} es:

$$(\mathbb{C}, d), \text{ con } d = \text{distancia, que es } d(z, w) = |z - w|.$$

Otras formas son:

$$d_1(z, w) = \frac{|z - w|}{1 + |z - w|}$$

y

$$d_1(z, w) \leq 1$$

$$d_2(z, w) = \frac{2|z - w|}{[(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

Conceptos

- 1. Convergencia de una sucesión:** Dada $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$, entonces $z_n \rightarrow L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - L| < \varepsilon$.
- 2. \mathbb{C} es completo** (Toda sucesión de Cauchy converge).

En efecto: Sea $z_n \subseteq \mathbb{C}$ sucesión de Cauchy. Entonces $|z_n - z_m| \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$.

$$|x_n| = |\operatorname{Re}(z_n)| \leq |z_n| \text{ y entonces, } |x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \rightarrow 0.$$

Además

$$|y_n| = |\operatorname{Im}(z_n)| \leq |z_n| \text{ entonces, } |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| \rightarrow 0.$$

De aquí se tiene que: $x_n \subseteq \mathbb{R}$ y $y_n \subseteq \mathbb{R}$ son sucesiones de Cauchy en \mathbb{R} que sabemos, es completo. Luego, existen $x_0, y_0 \subseteq \mathbb{R}$ tales que:

$$x_n \rightarrow x_0$$

y

$$y_n \rightarrow y_0$$

Por lo tanto:

$$z_n \rightarrow x_0 + iy_0.$$

3. **Función Continua:** $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f es continua en z_0 si:

$$z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(z_0).$$

Ejemplo 6 1. Funciones cotinuas.

2. $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, $g(z) = \operatorname{Im}(z)$.

3. $f(z) = \bar{z}$.

4. $p(z, \bar{z}) = \sum_{n,m} a_{n,m} z^n (\bar{z}^m)$.

5. $\frac{p(z, \bar{z})}{q(z, \bar{z})}$ es continua en el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / q(z, \bar{z}) \neq 0\}$.

6. Dominio: Es un abierto conexo.

1.7. Funciones básicas

1. **Traslación:** $f(z) = z + b$; $b \in \mathbb{C}$.

$$f(0) = b \quad f(t) = t + b$$

$$f(1) = 1 + b \quad f(b) = 2b$$

$$f(2) = 2 + b \quad f(1 + b) = 1 + 2b$$

2. Dilatación o Contracción: $f(z) = kz$; $k \in \mathbb{R}$; $k > 0$.

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = a$$

$$f(i) = ia$$

3. Rotación: $f(z) = e^{i\theta}z$; $\theta \in \mathbb{R}$.

$$f(i) = e^{i\theta} \quad f(0) = 0$$

$$f(1) = e^{i\theta}$$

$$f(t) = te^{i\theta}$$

4. Inversión: $f(z) = \frac{1}{z}$.

$$f(1) = 1 \quad f(it) = \frac{-i}{t}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad f(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$$

5. Transformaciones de Möbius o lineales fraccionales

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad ad - bc \neq 0; \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Esta función tiene inversa, $f^{-1}(z) = ?$ para encontrarla utilizamos la transformación de Möbius.

T. de Möbius \leftrightarrow Matrices invertibles 2×2 .

$$\frac{az + b}{cz + d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se invierte la matriz y queda como: $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{ad - bc}$.

Entonces: $f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$. Además se tiene que $(f \circ f^{-1})(z) = z$.

Proposición 7 Una transformación de Möbius es la compuesta de traslaciones, dilataciones, rotaciones e inversiones.

Demostración.

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

$$\begin{aligned} z &\rightarrow |c|z \rightarrow |c|e^{i\text{Arg}(c)}z \\ &= cz \rightarrow cz + b \rightarrow \frac{1}{cz + d} \rightarrow \left| \frac{bc - ad}{c} \right| \frac{1}{cz + d} \\ &\rightarrow \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Entonces: $S(z) = (T \circ R \circ D \circ I \circ T \circ R \circ D)(Z)$. ■

Proposición 8 Una transformación de Möbius está únicamente determinada por la imagen de tres puntos distintos.

Demostración.

- Unicidad: Sean S y T transformaciones de Möbius tales que:

$$S(z_1) = w_1 \quad T(z_1) = w_1 \rightarrow z_1 = T^{-1}(w_1)$$

$$S(z_2) = w_2 \quad T(z_2) = w_2 \rightarrow z_2 = T^{-1}(w_2)$$

$$S(z_3) = w_3 \quad T(z_3) = w_3 \rightarrow z_3 = T^{-1}(w_3)$$

Por demostrar: $S = T$.

En efecto, ya que S y T son invertibles, tenemos:

$$S(T^{-1}(w_1)) = w_1 \rightarrow (S \circ T^{-1})(w_1) = w_1$$

$$S(T^{-1}(w_2)) = w_2 \rightarrow (S \circ T^{-1})(w_2) = w_2$$

$$S(T^{-1}(w_3)) = w_3 \rightarrow (S \circ T^{-1})(w_3) = w_3$$

Por lo tanto $S \circ T^{-1}$ tiene 3 puntos fijos.

Los puntos fijos de:

$$(S \circ T^{-1})(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z$$

Son soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned} az + b = z(cz + d) &\Leftrightarrow az + b = cz^2 + dz \\ &\Leftrightarrow cz^2 + z(d - a) - b = 0 \end{aligned}$$

que son a lo más 2.

Para que tenga más de 2 puntos fijos, la Transformación de Möbius que sirve es $T(z) = z = Id(z)$. Entonces:

$$S \circ T^{-1} = Id \Rightarrow S = T.$$

- Existencia: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ distintos.

Sea:

$$S(z_1) = w_1$$

$$S(z_2) = w_2$$

$$S(z_3) = w_3$$

¿Cuánto es $S(z)$, para cualquier z ?

Comentarios previos:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \quad (c \neq 0).$$

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} \quad T^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c} \Leftrightarrow T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty.$$

Basta encontrar una Transformación que lleve z_1 en 0, z_2 en 1 y z_3 en ∞ . Así:

$$T(z) = z - z_1, \quad (a = 1, b = -z_1, c = 0, d = 1)$$

lleva z_1 en 0, mientras que

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (a = 1, b = -z_1, c = 0, d = z_2 - z_1)$$

lleva z_1 en 0 y z_2 en 1, por último

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \quad (a = z_2 - z_3, b = -z_1(z_2 - z_3), \\ c = z_2 - z_1, d = -z_3(z_2 - z_1))$$

lleva z_1 en 0, z_2 en 1 y z_3 en ∞ .

Entonces:

$$W(z) = \frac{(z - w_1)(w_2 - w_3)}{(z - w_3)(w_2 - w_1)}$$

Luego, la transformación de Möbius buscada es:

$$S(z) = (W^{-1} \circ T)(z)$$

■

Teorema 9 *Una Transformación de Möbius lleva círculos o rectas en círculos o rectas.*

Demostración. Sea C un círculo con ecuación

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + k_0 = 0; \quad k_0 \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Consideremos las funciones básicas:

1. $T(z) = z + b$
2. $T(z) = az; \quad a \in \mathbb{C}, a = re^{i\theta}$
3. $T(z) = \frac{1}{z}$

Si $z = w - b$, el círculo queda como:

$$\begin{aligned} (w - b)\overline{(w - b)} + \bar{\alpha}(w - b) + \alpha\overline{(w - b)} + k_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow w\bar{w} - w\bar{b} - b\bar{w} + b\bar{b} + \bar{\alpha}w - \bar{\alpha}b + \alpha\bar{w} - \alpha\bar{b} + k_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow w\bar{w} + (-\bar{b} + \bar{\alpha})w + (-b + \alpha)\bar{w} + b\bar{b} - (\bar{\alpha}b + \alpha\bar{b}) + k_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow w\bar{w} + (-\bar{b} + \bar{\alpha})w + (-b + \alpha)\bar{w} + b\bar{b} - 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}b) + k_0 &= 0 \end{aligned}$$

Si $w = az$, entonces la fórmula anterior queda:

$$\begin{aligned} \frac{w\bar{w}}{a} + \alpha\frac{w}{a} + \alpha\frac{\bar{w}}{a} + k_0 &= 0 \quad /a\bar{a} \\ \Leftrightarrow w\bar{w} + \bar{\alpha}aw + k_0a\bar{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow w\bar{w} + \bar{\alpha}aw + k_0 |a\bar{a}| &= 0 \end{aligned}$$

Si $w = \frac{1}{z}$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} + \bar{\alpha} \frac{1}{w} + \alpha \frac{1}{\bar{w}} + k_0 &= 0 & /w\bar{w} \\ \Leftrightarrow 1 + \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + k_0 w\bar{w} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, si $k_0 = 0$, entonces la transformación lleva el círculo a una recta. Por otro lado, si $k_0 \neq 0$, entonces lo transforma en un círculo. ■

Capítulo 2

Funciones de Variable Compleja

2.1. Funciones analíticas

Definición 1 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un abierto en el plano y $z_0 \in \Omega$. Se dice que $f(z)$ es derivable en z_0 (u holomorfa o analítica) si existe el límite:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Observación 2 Una función f se dice analítica en un abierto Ω si es analítica en cada punto de Ω .

Observación 3 Es fácil ver que si f es holomorfa en z_0 entonces f es continua en z_0 .

Ejemplo 4 1) $f(z) = a, a \in \mathbb{C}$. Calculamos el cociente

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{a - a}{z - z_0} = 0$$

Tomando el límite $z \rightarrow z_0$, se obtiene $f'(z_0) = 0$. Esta función, es la función constante.

2) $f(z) = z$. f es holomorfa en \mathbb{C} y $f'(z) = 1$.

3) $g(z) = z^n, n$ entero positivo.

Calculamos el cociente

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}$$

Tomando el límite $z \rightarrow z_0$, obtenemos $g'(z_0) = nz_0^{n-1}$.

4) Sea $h(z) = \bar{z}$, Vamos a ver que no es derivable en $z_0 = 0$. Queremos ver si

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

existe o no. Si el límite existe, debe ser el mismo, no importa como nos aproximamos a 0.

Para $z \in \mathbb{R}, z = t$, tenemos $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$.

Para z imaginario, $z = it$, tenemos $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-it}{it} = -1$.

Por lo tanto h no es analítica en $z = 0$.

Ejercicio 5 Demuestre que $f(z) = |z|^2$ es derivable sólo en $z_0 = 0$.

Sea $(\mathbb{A}\mathbb{F}, +, \cdot, \circ)$ el conjunto de las funciones analíticas con la suma, el producto y la composición.

Dadas f y g funciones analíticas, entonces:

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$$

$$(f \circ g)(z) = f(g(z))$$

Donde los resultados son también funciones analíticas. Entonces, de aquí se desprende el siguiente teorema.

Teorema 6 Si f y g son derivables, entonces:

$$1) (f + g)' = f' + g'$$

$$2) (fg)' = f'g + fg'$$

$$3) \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2} \text{ cuando } g \neq 0$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ cuando } g \neq 0$$

Demostración.

1) Tenemos

$$\frac{(f + g)(z) - (f + g)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Si tomamos el límite para $z \rightarrow z_0$ obtenemos la fórmula.

$$2) \quad \frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}g(z) + f(z_0)\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Tomamos el límite para $z \rightarrow z_0$ y usamos el hecho de que g es continua en z_0 , obteniendo

$$f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

3) Usando 2)

$$0 = \left(g \frac{1}{g}\right)' = g' \frac{1}{g} + g \left(\frac{1}{g}\right)'$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

4)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

■

Corolario 7 Toda función racional $r(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0}$ es derivable en el abierto $\Omega = \{z : b_m z^m + \dots + b_0 \neq 0\}$. En particular, la función $\frac{1}{z}$ es derivable en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 8 Sea $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$; $ad - bc = 1$. g es derivable, excepto en $z_0 = \frac{-d}{c}$, además:

$$g'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

En efecto,

$$g'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Definición 9 Diremos que $f(z)$ es derivable en $z_0 = \infty$ si la función $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, es derivable en $t_0 = 0$.

Observación. Lo anterior también se puede aplicar a funciones continuas.

Ejemplo 10

$$f(z) = \frac{z + 2}{3z^2 - 1}$$

Tenemos

$$g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t} + 2}{\frac{3}{t^2} - 1} = \frac{t + 2t^2}{3 - t^2}$$

luego $g'(t) = \frac{(1 + 4t)(3 - t^2) + 2t(t + 2t^2)}{(3 - t^2)^2}$, de donde $g'(0) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto $f'(0) = \frac{1}{3}$.

Teorema 11

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

Demostración.

$$\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

■

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se dice que f es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ si existe una transformación lineal L tal que:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = L(x - x_0, y - y_0) + e(x - x_0, y - y_0)$$

en que:

$$\frac{e(x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0$$

cuando $x \rightarrow x_0$ y $y \rightarrow y_0$, esto es, el error es pequeño comparado con la norma. Observar que $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal cuya matriz, con respecto a las bases canónicas, es:

$$[L] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

La prueba del siguiente resultado se estudia en otros cursos de cálculo, por lo que no se mostrará aquí.

Teorema 12 Si $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en (x_0, y_0) entonces f es diferenciable en ese punto.

La siguiente es una de las principales caracterizaciones de funciones analíticas.

Teorema 13 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann) Sea $f = u + iv$ una función diferenciable en $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces f es holomorfa en z_0 si y sólo si se cumplen las ecuaciones: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ en el punto (x_0, y_0) .

Demostración.

(\Rightarrow) Por definición, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + t) + iv(z_0 + t) - u(z_0) - iv(z_0)}{t} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + it) + iv(z_0 + it) - u(z_0) - iv(z_0)}{t} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{u(z_0 + t) - u(z_0)}{t} + i \frac{v(z_0 + t) - v(z_0)}{t} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{u(z_0 + it) - u(z_0)}{t} + \frac{iv(z_0 + it) - v(z_0)}{t} \right]. \end{aligned}$$

Observar que cuando $t \rightarrow 0$

$$\frac{u(z_0 + t) - u(z_0)}{t} = \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$$

y

$$\frac{u(z_0 + it) - u(z_0)}{t} = \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Reemplazando, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \right].$$

Luego

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

(\Leftarrow) Como f es diferenciable, existe

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

tal que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + e(x - x_0, y - y_0),$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} u(x, y) + iv(x, y) &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ i \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right] \\ &+ e_1(x - x_0, y - y_0) + ie_2(x - x_0, y - y_0). \end{aligned}$$

Por hipótesis

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(y - y_0) \\ &+ i \left[-\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(y - y_0) + e(x - x_0, y - y_0) \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(z) - f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(z - z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(z - z_0) + e(x - x_0, y - y_0)$$

Entonces

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{e(x - x_0, y - y_0)}{z - z_0}$$

Tomamos el límite cuando $z \rightarrow z_0$, y nos queda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e(x - x_0, y - y_0)}{z - z_0}$$

Ya que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e(x - x_0, y - y_0)}{z - z_0} = 0$, se obtiene que existe $f'(z_0)$ lo cual concluye la demostración. ■

Observación 14

De la demostración del teorema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ &= i \left[\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Otra expresión para $f'(z)$ es la siguiente:

Ya que $f(z) = u(z) + iv(z)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) + i \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad (2.2)$$

Haciendo (2.1)-i(2.2), se obtiene finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) + \frac{\partial v}{\partial y}(z)$$

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right]$$

Ejercicio 15 1) Pruebe que en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben como $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$ y $\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r}$.

2) Pruebe que en notación compleja las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben como $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Definición 16 Sea $p : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, p se dice armónica si

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

Notación: $\Delta p := \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ se le llama el Laplaciano de p .

Proposición 17 Si $f = u + iv$ es analítica, entonces u y v son armónicas.

Demostración.

Debemos probar por definición que $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$. Como f es analítica, entonces: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Como $f = u + iv$, entonces: $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0$. Así, $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0$.

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

De esto se puede concluir que $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$. ■

Ejercicio 18

1) Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Demuestre que f no puede ser la parte real o imaginaria de una función analítica.

2) Pruebe que si f es analítica y u es armónica, entonces $f \circ u$ es armónica.

2.2. Algunas funciones de variable compleja.

I. **Función exponencial.** Se define como:

$$e^z := e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Propiedades

1) e^z es una función analítica en \mathbb{C} .

2) $(e^z)' = e^z$

3) $e^0 = 1, e^{2\pi in} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$

4) $e^{z+w} = e^z e^w$

5) $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$

6) $|e^{iy}| = 1, |e^z| = e^x$

Teorema 19 *La única solución de la ecuación $f' = hf$; $h \in \mathbb{C}$ y $f(0) = A \in \mathbb{C}$ es:*

$$f(z) = Ae^{hz}$$

Demostración. $f'(z) = Ahehz = hf(z)$. Demostremos la unicidad de la solución. Sea g que satisface $g' = hg$ con $g(0) = A$. Considerando:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{kfg - hgf}{g^2} = 0.$$

Entonces $\frac{f}{g}$ es constante. Pero: $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{A}{A} = 1$. Por lo tanto $f = g$. ■

II. **Funciones trigonométricas.** Se definen como:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Propiedades

- 1) $(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$
- 2) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$
- 3) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$
 $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$
- 4) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Teorema 20 *Las soluciones de la ecuación $f'' + kf = 0$; $k \in \mathbb{C}$ son de la forma: $f(z) = A \cos(\sqrt{k}z) + B \sin(\sqrt{k}z)$.*

Demostración. Calculamos la primera y la segunda derivada de f :

$$f'(z) = -A\sqrt{h} \sin z\sqrt{h} + B\sqrt{h} \cos z\sqrt{h}$$

$$f''(z) = -A\sqrt{h}\sqrt{h} \cos z\sqrt{h} - B\sqrt{h}\sqrt{h} \sin z\sqrt{h} = -hf(z)$$

Con lo que queda demostrado el teorema. ■

III. **Función raíz enésima** Se define como:

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} \right) \right)$$

en $\Omega := \{z = re^{i\theta} / -\pi < \theta < \pi, \quad r > 0 \wedge n = 1, 2, 3, \dots\}.$

Proposición 21 $\sqrt[n]{z}$ es analítica en Ω .

Demostración. Ocupando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en su forma polar, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$$

Considerando $u(r, \theta) = r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta}{n}$ y $v(r, \theta) = r^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta}{n}$. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \cos \frac{\theta}{n} \leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{\theta}{n}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{-r^{\frac{1}{n}}}{n} \sin \frac{\theta}{n} \leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \sin \frac{\theta}{n}.$$

■

IV. **Funciones hiperbólicas** Se definen las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico como sigue:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Propiedades

- 1) $(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z$
- 2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- 3) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w,$
 $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$
- 4) $\sinh(iz) = i \sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z$

Teorema 22 *Las soluciones de la ecuación $y'' = ky$; $k \in \mathbb{C}$ son de la forma: $y(z) = A \cosh(\sqrt{k}z) + B \sinh(\sqrt{k}z)$.*

V. **Función logaritmo.** Se define la función logaritmo como:

$$\ln z = \ln r + i\theta,$$

para $r > 0$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Propiedades

- 1) La función logaritmo es analítica en Ω .
- 2) $(\ln z)' = \frac{1}{z}$
- 3) $e^{\ln z} = z$, para todo $z \in \Omega$.

VI. **Función potencia.** La función potencia se define como:

$$z^w = e^{w \ln z},$$

para cada $w \in \Omega$.

Propiedades

1) La función potencia es analítica en Ω .

$$2) \frac{d(z^w)}{dz} = wz^{w-1}$$

Ejemplo: Calcular i^i .

Solución: Aplicando la definición de la función logaritmo, queda:

$$\ln i = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}$$

Entonces $i^i = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Ejercicio 23 Calcule i^i .

Capítulo 3

Series

3.1. Series de Taylor

A continuación presentamos el resultado básico en series de potencias.

Teorema 24 *Consideremos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

donde R es el radio de convergencia de la serie. Entonces:

- (a) Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < R$, la serie converge (absolutamente).
- (b) Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| > R$, la serie diverge.
- (c) La serie converge uniformemente en subconjuntos compactos (cerrado y acotado) del disco $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - z_0| < R\}$.

Teorema 25 *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente en $D(0, R)$. Entonces $f(z) =$*

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es analítica en $D(0, R)$, y además $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ la cual es también convergente en $D(0, R)$.

Demostración.

Analicemos la siguiente diferencia:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| &= \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| \\ &\leq \left| \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^n - \sum_{n=0}^N a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=1}^N n a_n z_0^{n-1} \right| \\ &+ \left| \sum_{n=0}^N n a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| \\ &+ \left| \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} \right| \end{aligned}$$

El primer término tiende a cero cuando z tiende a z_0 , ya que es la derivada del polinomio

$$p(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

El segundo término tiende a cero cuando N tiende a infinito, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge, lo que demostraremos más adelante.

Para el tercer término se tiene que:

$$\left| \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right|$$

Pero,

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \underbrace{z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \dots + z_0^{n-1}}_{n\text{-veces}}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \leq |z|^{n-1} + |z|^{n-2}|z_0| + |z|^{n-3}|z_0|^2 + \dots + |z_0|^{n-1}$$

Existe un $r < R$, tal que para $|z| < r$ se tiene:

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \leq r^{n-1} + r^{n-2}r + r^{n-3}r^2 + \dots + r^{n-1}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \leq nr^{n-1}$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ahora veamos que si $h(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, entonces $h'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$, con radio de convergencia R para ambas series.

Si $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ es el radio de convergencia de $h(r)$ y R' el radio de convergencia de $h'(r)$, entonces

$$R' = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

Veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ converge en $D(0, R)$:

$$R' = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

■

Ejemplo 26 Si $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge en \mathbb{C} , esto es $R = \infty$, entonces f es analítica en \mathbb{C} , y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

Haciendo $m = n - 1$, tenemos:

$$f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

De lo anterior se puede observar que, $f'(z) = f(z)$ y $f(0) = 1$, entonces $f(z) = e^z$ y por lo tanto,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Observación. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Sea $g(z) = f'(z)$, entonces

$$g'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$$

Sea $h(z) = g'(z)$, entonces

$$h'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(n-2)z^{n-3}$$

⋮

Detengámonos a analizar las funciones anteriores:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \implies f(0) = a_0$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \dots \implies f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 z + 4 \cdot 3a_4 z^2 + \dots \implies f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(z) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 z + \dots \implies f'''(0) = 3 \cdot 2a_3$$

⋮

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Corolario 27 Si $f^{(n)}(z)$ es analítica para todo n , entonces f es de clase C^∞ .

3.2. Representaciones por series de Taylor

1. Función exponencial:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

2. Función seno:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n - (-i)^n}{n!} \end{aligned}$$

Analicemos la expresión $(i)^n - (-i)^n$:

- Si n es par: $(i)^{2k} - (-1)^{2k}(i)^{2k} = (i)^{2k}[1 - (-1)^{2k}] = 0$
- Si n es impar: $(i)^{2k+1} - (-1)^{2k+1}(i)^{2k+1}$
 $= (i)^{2k}i[1 - (-1)^{2k}(-1)] = 2(i)^{2k}i = (i^2)^k 2i = (-1)^k 2i$

Entonces

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Función coseno:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)z^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

4. Función seno hiperbólico:

Sabemos que $\sinh iz = i \sin z$, para todo z , en particular para $w = iz$, entonces $\sinh w = i \sin -iw$

Por lo tanto

$$\sinh z = i \sin -iz = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Analícemos:

$$\begin{aligned} (-iz)^{2n+1} &= (-i)^{2n+1} z^{2n+1} = (-1)^{2n} (-1) [i^2]^n i z^{2n+1} \\ &= (-1)(-1)^n i z^{2n+1} = (-i)(-1)^n z^{2n+1} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sinh z &= -i^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

5. Función coseno hiperbólico:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)z^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

3.3. Serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$f'''(z) = \frac{3!}{(1-z)^4}$$

Por lo tanto tenemos que $f^n(0) = n!$. Luego, $a_n = \frac{f^n(0)}{n!} = 1$. Así tendremos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < R = 1$$

donde el radio de convergencia está dado por

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Otros ejemplos de series geométricas son:

i)

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1$$

ii)

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, |z| < 1$$

iii)

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Sabemos que $(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, luego integrando obtenemos:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1$$

Lo mismo ocurre con $(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, ya que si ahora integramos podemos ver que

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

3.4. Extensión analítica

Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, para $|z - z_0| < R$, tenemos

$$f^k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

Para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. Para cada k las series tienen el mismo radio de convergencia. En particular tenemos

$$f^k(z_0) = k! a_k$$

o

$$a_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}$$

La serie de potencias entonces puede escribirse como

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

y se llama serie de Taylor en torno al punto $z = z_0$. Consideremos $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función posible de ser expresada en términos de serie de Taylor, digamos

$$\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

para $|x - x_0| < R$ ($x \in \mathbb{R}$), existe entonces una función analítica (única) definida por

$$f(z) = \sum_n \geq 0 \frac{(f^n(x_0))}{n!} (z - x_0)^n$$

para $|z - x_0| < R$ ($z \in \mathbb{C}$) tal que $f(x) = \Phi(x)$ para $|x - x_0| < R$, ($x \in \mathbb{R}$). La función f se denomina extensión analítica de Φ .

Ejemplo 28 Conocemos la serie de Taylor $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Se define la extensión analítica $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Observemos que esta serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Notemos que

$$f'(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = f(z)$$

y $f(0) = 1$, luego $f(z) = e^z$.

3.5. Prolongación analítica

Sea R el radio de convergencia de la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a z_0 . Si $|z - z_0| < R$, la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a z_1 converge ciertamente para $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$. Sin embargo, puede haber un radio de convergencia mayor R_1 . Entonces tenemos definida la función analítica $f(z)$ como función analítica en un dominio mayor. Este proceso se conoce como prolongación analítica.

Ejemplo 29 Consideremos la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \tag{3.1}$$

Se ve fácilmente que su radio de convergencia es 1. De este modo $f(z)$ está definida para $|z| < 1$. Sumando las series correspondientes a $f(\frac{1}{2})$, $f'(\frac{1}{2})$... encontramos la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left\{ \frac{-2}{3} \left(z - \frac{1}{2} \right) \right\}^n$$

Su radio de convergencia es $\frac{3}{2}$, de este modo hemos prolongado $f(z)$ al círculo $|z - \frac{1}{2}| < |\frac{3}{2}|$ que es exterior al círculo original $|z| < 1$. Mediante una sucesión de círculos podemos cubrir cualquier punto del plano z distinto del $z = -1$. Queda así definida $f(z)$ como una función analítica para $z \neq -1$. De hecho $f(z) = \frac{1}{(1+z)}$.

Observación 30 El radio de convergencia R de la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a z_0 es igual a la distancia de z_0 a la singularidad más próxima de $f(z)$.

Ejemplo 31 La serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

de la función real $\frac{1}{(1+x^2)}$ converge para $|x| < 1$, pero diverge para $x = 1$,

aun cuando $\frac{1}{(1+x^2)}$ es indefinidamente derivable para todo valor de x .

En efecto, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 1^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge. La explicación radica en

la extensión de la función $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)}$ que tiene singularidades en $z = \pm i$. Luego su serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ en torno a $z = 0$ tiene radio de convergencia $|i - 0| = 1$.

Si $R = \infty$, entonces la función $f(z)$ es analítica para todo z . Una tal función se llama entera.

3.6. Transformaciones conformes

Proposición 32 *Una Transformación conforme es una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica tal que $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$.*

Observación 33 *Si f es conforme, entonces f preserva los ángulos.*

Consideremos $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $f(z) = u + iv$, luego vemos que

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Teorema 34 *Si Ω es una región simplemente conexa (sin hoyos), entonces siempre existe $f : \Omega \rightarrow D$ biyectiva y analítica, o bien analítica y conforme.*

Capítulo 4

Integración

4.1. Definición y propiedades

Definición 35 *Un camino o curva regular es una función*

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

con derivada continua y no nula.

Definición 36 *Un cambio de parámetro es una función*

$$g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$$

que es biyectiva y con derivada continua tal que $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$.

Ejemplo 37 1) $\gamma(t) = (1 - t)p + tq$, $0 \leq t \leq 1$

$\gamma'(t) = q - p$ describe una recta desde el punto p al punto q .

2) $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ describe una circunferencia de centro z_0 y radio R .

3) $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ describe una elipse.

4) $\gamma(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$ describe una hipérbola.

5) $\gamma(t) = a + b \cos(t)$, $t \in [a, b]$ describe una cardioide.

Definición 38 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se define

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un camino regular.

Proposición 39 Si existe F tal que $F' = f$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

■

Corolario 40 Si existe F tal que $F' = f$ y γ es una curva cerrada, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

4.2. Fórmula de Cauchy

Teorema 41 (*De Green*)

Sea Ω un dominio abierto y conexo, cuya frontera es regular, entonces

$$\int_{\gamma=\partial\Omega} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} \left(\underbrace{f}_{P} dx + \underbrace{if}_{Q} dy \right) = \iint_{\Omega} \left(i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy \\ &= 2i \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = 2i \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy \end{aligned}$$

Por lo cual, en notación compleja, el Teorema de Green puede ser expresado como

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy.$$

Ejemplo 42

$$\int_{\gamma} \bar{z}dz = 2i \iint_{\Omega} dxdy = \text{area}(\Omega)$$

Teorema 43 (*De Cauchy*) Sea f analítica en Ω , entonces:

$$\int_{\gamma=\partial\Omega} f(z) dz = 0.$$

Proposición 44 (*Fórmula de Cauchy*) Sea f analítica en Ω con frontera regular, entonces

$$\int_{\gamma=\partial\Omega} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{D}(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\
 &= \int_{\mathbb{D}(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta} + z_0)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\
 &= i \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta} + z_0) d\theta \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 2\pi i f(z_0)
 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 45 1) Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz$, donde γ es la región de la figura:

Podemos escribir la integral como

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 1} dz$$

con $f(z) = \frac{1}{z - 1}$ analítica en γ y en su interior. Considerando $z_0 = -1$, la integral toma el valor

$$2\pi i f(-1) = 2i\pi \left(\frac{-1}{2}\right) = -\pi i$$

2) Si consideramos la integral anterior, pero con la región β , entonces podemos escribir

$$\int_{\beta} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \frac{1}{2} \left(\int_{\beta} \frac{1}{z - 1} dz - \int_{\beta} \frac{1}{z + 1} dz \right)$$

con $f(z) = 1$ analítica en β la integral toma el valor

$$\frac{1}{2}((2\pi i f(1)) - (2\pi i f(-1))) = 0$$

Teorema 46 *Una función f es analítica en Ω si y sólo si para todo z_0 en Ω existe una serie de potencias tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R$$

Demostración. (\Leftarrow) Queda demostrado por lo visto antes.

(\Rightarrow) Consideremos la fórmula de Cauchy.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad C(t) = z_0 + re^{it}$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{\left[1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right]} \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}, \quad |z - z_0| < |w - z_0| \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right]}_{a_n} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

■

Corolario 47

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

4.3. Teoría del índice y homotopía

Definición 48 Sea γ una curva cerrada, de clase C^1 , y $z \in \mathbb{C}$. Se llama \tilde{A} ndice de z con respecto a γ al número

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(w - z)}$$

La expresión anterior es la fórmula de Cauchy con $f(w) = 1$. Reescribiendo tenemos que

$$Ind_\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}, \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

Observación 49 1) El índice indica “el número de vueltas” que da la curva γ en torno a z , si $z \in Int(\gamma)$.

2) Si $z \in Ext(\gamma)$, entonces $Ind_\gamma(z) = 0$ (por teorema de Cauchy).

3) Si $Ind_\gamma(z) \neq 0$, entonces $z \in Int(\gamma)$.

4) $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z}\{0\}$ si $z \in Int(\gamma)$.

Definición 50 Dos curvas cerradas cuyas trayectorias están en un conjunto Ω se dice que son homótopas en Ω si pueden deformarse continuamente entre sí, sin que las deformaciones se salgan de Ω .

Esta última imagen muestra el caso en que no se cumple la homotopía, pues Φ impide la deformación continua.

Más precisamente, sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y γ_0 y γ_1 curvas cerradas en Ω . γ_0 es homótopa a γ_1 si existe una función continua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(a, s) = H(b, s)$ y $H(t, 1) = \gamma_1(t)$, $t \in [a, b]$, en tal caso se dice que t es una homotopía en Ω entre γ_0 y γ_1 y se denota $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Teorema 51 (*Invarianza del Índice por homotopía*) Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, γ_0 y γ_1 curvas cerradas en Ω tal que $\gamma_0 \sim \gamma_1$, entonces $\text{Ind}_{\gamma_0}(z) = \text{Ind}_{\gamma_1}(z)$.

Teorema 52 Si γ_0 y γ_1 son dos curvas cerradas en Ω y $\gamma_0 \sim \gamma_1$, entonces:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

para cada función analítica f en Ω .

Demostración. Por demostrar $\int_{\gamma_0 \setminus \gamma_1} = 0$, eso sigue del teorema de Cauchy. ■

4.4. Teoremas fundamentales

Definición 53 Un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice simplemente conexo si es conexo y cualquier camino cerrado en Ω es homotópico a un punto en Ω .

Teorema 54 Sea Ω un conjunto simplemente conexo y sea f analítica (u holomorfa) en Ω entonces existe F tal que $F' = f$.

Demostración. Sea z_0 cualquier punto en Ω . Sea $z \in \Omega$. Sea β un camino en Ω desde z_0 hasta z . Definimos $F(z) = \int_{\beta} f(s)ds \equiv \int_{z_0}^z f(s)ds$.

F está bien definida, pues si α es otro camino desde z_0 hasta z , entonces

$$\int_{\beta \circ \alpha^{-1}} f(s)ds = \int_{\beta \circ \alpha^{-1}} f(s)ds = 0$$

por lo cual

$$\int_{\alpha} f(s)ds - \int_{\beta} f(s)ds = 0$$

y calculamos para $h > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \right) - f(z) &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(s)ds - f(z) \\ &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(s) - f(z))ds \end{aligned}$$

Sea $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z+h)| < \varepsilon$ entonces

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(s) - f(z))ds \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(s) - f(z)| |ds| \leq \frac{\varepsilon}{|h|} \int_z^{z+h} |ds|$$

Afirmación

$$\frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |ds| = 1$$

En efecto, sea $\gamma(t) = z + th, t \in [0, 1]$, un camino desde z a $z+h$ entonces

$$\frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |ds| = \frac{1}{|h|} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \frac{1}{|h|} \int_0^1 |h| dt = 1$$

Esto prueba la afirmación y el teorema. ■

Corolario 55 *Sea f una función holomorfa sin ceros, definida en un abierto simplemente conexo, entonces existe una función $g(z)$ tal que*

$$e^{g(z)} = f(z)$$

o bien

$$g(z) = \ln f(z)$$

Demostración. Consideremos la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$, holomorfa por hipótesis. Definimos

$$g_1(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(s)}{f(s)} ds$$

es claro que g_1 no depende del camino, pues Ω es simplemente conexo.

Además

$$g_1'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

por teorema anterior. Sea $h(z) := e^{g_1(z)}$. Entonces

$$h' = e^{g_1} g_1' = e^{g_1} \frac{f'}{f} = h \frac{f'}{f}$$

así

$$h'f - hf' = 0$$

luego

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = 0$$

y así

$$\frac{h}{f} = c$$

con $c = \text{cte.}$

Por lo tanto $h(z) = cf(z)$. Note que $c \neq 0$ pues $h \neq 0$.

Así tendremos

$$f(z) = \frac{1}{c}e^{g_1} = e^{g_1(z)+c_1}$$

Por lo tanto si definimos

$$g(z) = g_1(z) + c_1$$

se satisface

$$e^{g(z)} = f(z).$$

■

Ejemplo 56 1) Sea $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\text{semieje real negativo}\}$. Sea $f(z) = z^2$. Entonces $f(z)$ es holomorfa y sin ceros en Ω simplemente conexo. Entonces existe $\log(z^2)$. Note que no se puede definir $\log(z^2)$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pues no es simplemente conexo.

2) $\sqrt{f(z)}$ existe. En efecto:

Definimos:

$$\sqrt{f(z)} = e^{\frac{1}{2}gz}$$

Recordemos el teorema de Cauchy:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

si f es analítica y γ el borde del camino donde f está definida.

Nos preguntamos si existen otras funciones (que no sean analíticas) con la propiedad anterior. La respuesta es no.

Teorema 57 (*recíproco del teorema de Cauchy*) Si f es una función continua definida en Ω y tal que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

sobre toda la curva en Ω tal que γ sea homotópica a un punto. Entonces f es holomorfa.

Demostración. Por hipótesis,

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw$$

está bien definida en $|z - z_0| < r \subseteq \Omega$. Además $F'(z) = f(z)$ (existe la derivada).

Luego $F(z)$ es holomorfa y por lo tanto:

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r$$

de donde

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < r$$

entonces f es holomorfa. ■

Teorema 58 (*Principio del Máximo*) Sea f analítica en Ω , entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar su máximo en Ω , a menos que $f(z)$ sea constante.

Demostración. Observemos primero que $|f(z)|$ constante implica $f(z)$ constante. En efecto. Escribamos:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y), \quad z = x + iy$$

entonces

$$|f(z)|^2 = u(x, y)^2 + v(x, y)^2$$

Por hipótesis tenemos

$$0 = \frac{\partial(|f(z)|^2)}{\partial x} = 2u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + 2v(x, y) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial(|f(z)|^2)}{\partial y} = 2u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + 2v(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}$$

Así tendremos que

$$0 = u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + v(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por las ecuaciones de Cauchy Riemman tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

luego

$$0 = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

y

$$0 = -u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

• Caso 1: $u^2 + v^2 = 0$ (determinante de la matriz).

$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = 0$, luego $f(z) = 0$.

• Caso 2: $u^2 + v^2 \neq 0$.

Entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Además por las ecuaciones de Cauchy Riemman $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Luego $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$.

Por lo tanto $f(z) = cte$.

Supongamos ahora que $|f(z)|$ alcanza su máximo en Ω y no es idénticamente constante. Entonces existe $z_0 \in \Omega$ donde $|f(z)|$ es máximo.

Sea γ la frontera de un círculo de centro z_0 y radio r contenido en Ω (abierto). Entonces $|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)|$ para cada $\theta \in (0, 2\pi)$. Luego

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z_0} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta < |f(z_0)|$$

lo cual es una contradicción. ■

Corolario 59 *Si $f(z)$ es analítica en Ω y continua en $\partial\Omega$ y si $|f(z)| \leq M$ sobre $\partial\Omega$ entonces $|f(z)| < M$ en Ω , a menos que $f(z)$ sea constante.*

Teorema 60 (*principio de reflexión de Schwartz*) *Sea $f(z)$ holomorfa en un abierto Ω con $[a, b] \subseteq \partial\Omega$, f es además continua en $\Omega \cup [a, b]$. Suponemos que $f(x)$ es real si $a \leq x \leq b$. Entonces f se extiende al dominio $\Omega^* = \Omega \cup \bar{\Omega} \cup [a, b]$ donde $\bar{\Omega} := \{z/\bar{z} \in \Omega\}$. Además, en $\bar{\Omega}$ se tiene que $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.*

Demostración. Claramente la fórmula $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ para $z \in \bar{\Omega}$, extiende $f(z)$ al dominio $\bar{\Omega}$.

Para demostrar que f es holomorfa en Ω^* calculamos $\int_{\gamma} f(z) dz$ donde γ es una curva en Ω^* homotópica a un punto. Si γ esta en Ω ó $\bar{\Omega}$ no hay problema. Luego hay que analizar el caso en que γ se encuentre en ambas.

Separamos γ en dos caminos. Puesto que la integral sobre cada uno se anula, se obtiene: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. En efecto

$$\int_{\gamma} f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{1\epsilon}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{2\epsilon}}$$

Luego por el teorema de Morera, f es holomorfa. ■

Observación 61 *Da lo mismo hacer una reflexión sobre el eje real o bien en una recta cualquiera. Por lo tanto, si f está definida por ejemplo en un rectángulo, por el principio de reflexión de Schwartz, es posible extenderla a todo el plano. Análogamente se podría hacer con un triángulo.*

Proposición 62 (*Desigualdad de Cauchy*) *Sea $f(z)$ una función analítica en \mathbb{C} (entera). Entonces*

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r)$$

donde $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Demostración. Aplicando la fórmula de Cauchy para $z_0 = 0$

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

donde C es el círculo $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Se obtiene:

$$\begin{aligned} |f^n(0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} r i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n} d\theta \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^n} M(r) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{n! M(r)}{r^n}. \end{aligned}$$

■

Teorema 63 (*de Liouville*) *Sea $f(z)$ una función analítica, entera y acotada, entonces f es constante.*

Demostración. Como f es acotada

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M$$

donde $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$.

Luego haciendo $r \rightarrow \infty$ se obtiene $f^n(0) = 0$ para $n \geq 1$.

Como f es analítica, $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n(0)}{n!} z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \dots$

Luego $f(z) = f(0)$, por lo tanto f es constante. ■

Teorema 64 (*Fundamental del Algebra*) *Todo polinomio no constante*
 $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ *con* $a_n \neq 0$ *tiene* n *raíces en* \mathbb{C} .

Demostración. Basta demostrar que tiene una raíz (luego se divide por ella y se obtiene un polinomio de grado menor donde se aplica de nuevo el resultado).

Supongamos, por absurdo, que $p(z)$ no tiene ninguna raíz. Entonces $h(z) = \frac{1}{p(z)}$ es analítica en \mathbb{C} (entera). Vamos a demostrar que $h(z)$ (y luego $p(z)$) es constante, por lo cual probamos que $h(z)$ es acotada en \mathbb{C} y usaremos el teorema de Liouville.

En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n z^n + \dots + a_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n + a_{n-1}t + \dots + a_0 t^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|z| \geq R$ luego $|h(z)| = \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \epsilon$.

Por otra parte, si $|z| \leq R$ entonces $|h(z)| \leq M$, pues h es continua y $\{z : |z| \leq R\}$ es compacto. Por lo tanto $|h(z)| \leq \epsilon + M$. Luego h es

acotada, entonces $h(z)$ es constante y así $p(z)$ es constante. Contradicción.

■

Teorema 65 (*Del Valor Medio*) Si f es Analítica en un abierto Ω y $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$ entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demostración. Usamos la fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}$$

donde C es el círculo $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Entonces

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

■

Capítulo 5

Métodos de integración y aplicaciones

5.1. Desarrollo en serie de Laurent

Teorema 66 *Sea $f(z)$ una función analítica en un anillo (o corona) $r < |z - z_0| < R$. Entonces $f(z)$ se puede representar por una serie de la forma*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

que converge uniformemente en compactos de ese anillo. Además:

- 1) *La primera serie converge en $|z - z_0| < R$.*
- 2) *La segunda serie converge en $|z - z_0| > r$.*

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 círculos de radios r' y R' respectivamente, con $r < r' < R' < R$.

Por la fórmula de Cauchy en el anillo $r' \leq |z - z_0| \leq R'$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(s)}{(s-z)} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(s)}{(s-z)} ds \end{aligned}$$

con $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$.

Procedemos ahora como sigue:

• En γ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-z)} &= \frac{1}{s-z_0 + z_0 - z} \\ &= \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(s-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(s)}{(s-z)} ds = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n.$$

• En γ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{s-z_0 + z_0 - z} \\ &= \frac{1}{z_0 - z} \frac{1}{1 + \frac{s-z_0}{z_0 - z}} \\ &= \frac{1}{z_0 - z} \frac{1}{1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{-1}{z-z_0} \sum_{n \geq 0} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \\ &= \sum_{n \geq 0} (s-z_0)^n \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

para $|s - z_0| < |z - z_0|$.

Integrando término a término, lo cual es justificado por la convergencia uniforme sobre compactos de la serie, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(s)}{(s-z)} ds &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(s)(s-z_0)^n ds \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(s)(s-z_0)^{n-1} ds \right) \frac{1}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

Esto prueba el teorema.

Observación 67 De la demostración del teorema anterior se nota que:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(s)(s-z_0)^{k-1} ds$$

con $k = 1, 2, 3, \dots$

Hay tres posibilidades:

1) $b_k = 0$ para todo $k = 1, 2, 3, \dots$. En este caso, la función es analítica en $|z - z_0| < R$.

2) b_k para todo $k > m$. En este caso

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

y se dice que $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 .

Además :

$$\frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_1}{(z-z_0)}$$

se llama parte principal de f y

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|} f(s) ds = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

se llama residuo.

3) Hay infinitos $b_k \neq 0$. En este caso se dice que f tiene una singularidad esencial.

Ejemplo 68 1) Desarrollo de $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ en torno a $z_0 = 0$.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^3} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \dots$$

Luego $f(z)$ tiene un polo de orden 3 en $z_0 = 0$.

2) Desarrollo de $f(z) = e^{1/z}$ en torno a $z_0 = 0$.

$$e^u = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

Entonces

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots$$

Luego $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

Teorema 69 (Casorati-Weierstrass) Sea z_0 una singularidad esencial de $f(z)$. Entonces la imagen de cualquier vecindad de z_0 es densa en el plano complejo \mathbb{C} . Es decir, $\overline{f(D(z_0, r))} = \mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existe un $\delta > 0$ $\epsilon > 0$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$.

Consideremos

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

Claramente h es analítica en $D(z_0, \epsilon)$. Sin embargo, como h es acotada $|h(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$, se tiene que $h(z)$ es también analítica en z_0 (Tiene un desarrollo en serie de Laurent y si tuviera un número infinito de potencias negativas, entonces no podría ser acotada).

$$h(z) = \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z - z_0)} + b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$

y $|h(z)| < \frac{1}{\epsilon}$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$, luego $b_{-1} = b_{-2} = \dots = 0$. Entonces

$$h(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$

luego h es analítica en z_0 .

$$\begin{aligned} f(z) - w_0 &= \frac{1}{b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots} \\ &= c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \end{aligned}$$

Entonces $f(z) = w_0 + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$. Así f es analítica en z_0 . Contradicción.

Otro caso es que

$$\begin{aligned} f(z) - w_0 &= \frac{1}{b_n(z - z_0)^n + b_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots} \\ &= \frac{1}{b_n(z - z_0)^n} \frac{1}{(1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}(z - z_0) + \dots)} \\ &= \frac{1}{b_n(z - z_0)^n} (c_0 + c_1(z - z_0) + \dots) \end{aligned}$$

Luego $f(z) = w_0 + \frac{c_0}{b - n(z - z_0)^n} + \frac{c_1}{b_n(z - z_0)^{n-1}} + \dots$

Por lo tanto, f tiene un polo de orden n en z_0 . Contradicción. ■

Definición 70 Una función f se dice meromorfa en Ω si es el cociente de dos funciones analíticas, esto es: $f = \frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$.

Observación 71 Las singularidades de una función meromorfa, corresponden a los ceros de q (pueden ser polos o singularidades esenciales).

Note además, que los ceros de una función analítica son discretos.

En efecto: Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$, entonces existe una vecindad de z_0 tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Sea n_0 el primer entero tal que $a_{n_0} \neq 0$ entonces

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \underbrace{(a_{n_0} + a_{n_0+1}(z - z_0) + \dots)}_{g(z)}$$

Por lo tanto hay una vecindad de z_0 donde $f(z) \neq 0$ excepto por z_0 .

En efecto : Sea $z_n \rightarrow z_0$ tal que $f(z_n) = 0$. Entonces

$$0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^{n_0} g(z_n)$$

Así $g(z_n) = 0$ para todo n . Luego $g(z_n) = 0$. Contradicción.

5.2. Residuos

Teorema 72 (De residuos) *Sea f meromorfa en Ω . Sea K compacto en Ω con borde γ . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i)$$

Observación 73 *Hay solo un número finito de singularidades en K .*

En efecto, si hubiese una sucesión de singularidades, esta tendría un punto de acumulación en K y luego en Ω , digamos z^ . Pero z^* tiene una vecindad $D(z^*, R) \setminus \{z^*\}$, en la cual f es holomorfa, lo cual es una contradicción pues en esta vecindad siempre habrá puntos de la sucesión de polos y por lo tanto f no puede ser holomorfa.*

Demostración. Sean C_i pequeños círculos en torno a z_i . La función $f(z)$ es holomorfa fuera de la unión de sus discos.

Por el teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \int_{|z-z_i|} f(z) dz \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i) \end{aligned}$$

■

Proposición 74 *Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ meromorfa, es tal que $p(z_0) \neq 0$,*

$q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$. Entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Demostración.

$$q(z) = q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + \dots = q'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

Por lo tanto, z_0 es cero de orden 1. Es decir, z_0 es un polo de orden 1 de f .

Entonces

$$\begin{aligned} (z - z_0)f(z) &= \frac{(z - z_0)p(z)}{q'(z_0)(z - z_0) + \frac{q''(z_0)(z - z_0)^2}{2!} + \dots} \\ &= \frac{p(z)}{q'(z_0) + \frac{q''(z_0)(z - z_0)}{2!} + \dots} \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Por otra parte

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Así

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)a_0 + a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

Luego

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

■

Ejemplo 75 Calcular el residuo de $\tan z$ en $z_0 = \pi/2$.

Tenemos que $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, donde

$$\sin(\pi/2) = 1 \neq 0$$

$$\cos(\pi/2) = 0$$

y

$$-\sin(\pi/2) = -1$$

Así tendremos que

$$\operatorname{Res}(\tan z, \pi/2) = \frac{1}{-1} = -1$$

Observación 76 Si la función f del Teorema de Residuos es, además, analítica en todo punto del plano exterior a C entonces, en vez de calcular

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k)$$

podemos calcular

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

En efecto. Primero hacemos el desarrollo de Laurent de f en torno a $z = \infty$. Por definición esto significa que debemos hacer el desarrollo en serie de Laurent de $f\left(\frac{1}{z}\right)$, en torno a $z = 0$; digamos

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

si $|z| < R$, de manera que

$$f(w) = a_{-2}w^2 + a_{-1}w + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

si $|w| > R$, es el desarrollo en serie de Laurent de f en torno a $z = \infty$.

En particular, note que siempre el desarrollo en serie de Laurent de f en torno a $z = \infty$ tiene la forma:

$$f(w) = \dots + \frac{b_{-2}}{w^2} + \frac{b_{-1}}{w} + b_0 + b_1w + b_2w + \dots$$

si $|w| > R$. Además por definición $\text{Res}(f, \infty) = b_{-1}$.

Construyamos ahora la expresión $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$ a partir de la expresión anterior:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \dots + b_{-2}z^2 + b_{-1}z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots, \quad |z| < R$$

así

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \dots + b_{-2} + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z^3} + \dots, \quad |z| < R$$

luego

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = b_{-1} = -\text{Res}(f(z), \infty)$$

sabemos que

$$\int_C f(z)dz + \int_{-C} f(z)dz = 0$$

entonces

$$\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(z)dz$$

pero tenemos que

$$\int_{-C} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, \infty)$$

por lo tanto

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z^2}\right), 0\right)$$

que era la afirmación.

Ejemplo 77 Consideremos $f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)}$ analítica en todo z exterior a la circunferencia $|z| = 2$.

Entonces

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z(5 - 2z)}{1 - z}$$

luego

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5 - 2z}{z(1 - z)}$$

así

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz = 2\pi i(5) = 10\pi i.$$

Teorema 78 (Principio del Argumento) Sea f meromorfa en el interior de γ . Sea a_1, a_2, \dots, a_n los ceros de f y b_1, b_2, \dots, b_m los polos de f .

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n F(a_i) + \sum_{i=1}^m F(b_i)$$

Para cada función holomorfa $F(z)$.

En particular, si $F(z) = 1$ se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (n - m).$$

Demostración. Sea α uno de los puntos a_i o b_j . Tenemos

$$f(z) = a_v(z - \alpha)^v(1 + b_1(z - \alpha) + \dots)$$

donde v es el orden del cero o polo en a_i o b_j con $v \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$f'(z) = va_v(z - \alpha)^{v-1} + \dots$$

Luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{v}{z - \alpha} + \dots$$

Como f es holomorfa

$$F(z) = F(\alpha) + F'(\alpha)(z - \alpha) + \dots$$

Así

$$F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{vF(\alpha)}{z - \alpha} + vF'(\alpha) + \dots$$

Vemos que

$$\text{Res} \left(F \frac{f'(z)}{f(z)}, \alpha \right) = vF(\alpha)$$

Por el Teorema de Residuos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n F(a_i) - \sum_{i=1}^m F(b_i)$$

■

Observación 79 Como

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

Entonces

$$\text{Ind}_{\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$$

Así

$$\begin{aligned}
\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = V_{\gamma}(t)
\end{aligned}$$

y se llama el número de vueltas o número de rotación de f alrededor de γ .

Por lo tanto, el Principio del Argumento se \tilde{A} ñala que

$$\text{Ind}_{(f \circ \gamma)}(0) = n - m.$$

En particular, si f es analítica

$$\text{Ind}_{(f \circ \gamma)}(0) = n.$$

Así, el Principio del Argumento dice que cuando la componente encerrada por γ está enteramente contenida en el dominio de analiticidad de f , el número de vueltas que da f alrededor de γ coincide con el número total de ceros que pesee f en esta componente, contando cada uno de ellos tantas veces como indique su orden.

Teorema 80 (de Rouché) Sea C el borde de un dominio Ω y sean f y g analíticas en Ω tales que $|f(z)| < |g(z)|$ para $z \in C$. Entonces $f(z) + g(z)$ y $g(z)$ tienen el mismo número de ceros en Ω .

Demostración. Por el Principio del Argumento, debemos probar que

$$\int_C \frac{f'}{f} = \int_C \frac{(f+g)'}{(f+g)}.$$

Tenemos en C

$$\left| \frac{f}{g} \right| < 1$$

entonces

$$\int_C \frac{(\frac{f}{g})'}{1 + \frac{f}{g}} = 0.$$

Pero la imagen de C bajo $1 + \frac{f}{g}(z)$ está en el disco $D(1, 1)$, pues $\left| \left(1 + \frac{f}{g}\right) - 1 \right| <$

1. Luego, por el Teorema de Cauchy $1 + \frac{f}{g} \neq 0$ para todo $z \in C$ por lo que

$$\int_C \frac{f'g - fg'}{(1 + \frac{f}{g})g^2} = 0$$

esto es

$$\int_C \frac{f'g - fg'}{(g+f)g} = 0 \tag{5.1}$$

Por el Teorema anterior, basta demostrar que

$$\int_C \frac{f' + g'}{f + g} = \int_C \frac{g'}{g}$$

esto es

$$\int_C \left(\frac{f'}{f} + g'f + g - \frac{g'}{g} \right) = 0$$

o bien

$$\int_C \frac{f'g - g'f}{(f+g)g} = 0$$

que es precisamente (5,1). Esto prueba el Teorema.

5.3. Cálculo de integrales

Hemos visto que si $f(z)$ es analítica y tiene un polo simple (orden 1) en z_0 entonces

$$\phi(z) = (z - z_0)f(z)$$

tiene una singularidad removible en z_0 , luego tomando límite tenemos la existencia de

$$\phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Por otro lado, como $\phi(z)$ es analítica en el interior y sobre una curva cerrada en torno a z_0 se tiene por la fórmula de Cauchy

$$\phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \text{Res}(f, z_0)$$

Así, si $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , entonces

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)f(z))$$

Si $f(z)$ tiene un polo de orden k en z_0 , se puede definir

$$\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

y

$$\phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{nk} f(z)$$

Entonces $\phi(z)$ es analítica en una región y tenemos

$$\begin{aligned}
\phi^{(k-1)}(z_0) &= \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k} dz \\
&= \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_C f(z) dz \\
&= (k-1)! \operatorname{Res}(f, z_0)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial^{(k-1)}((z-z_0)f(z))}{\partial z^{(k-1)}}$$

de donde

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{\partial^{(k-1)}((z-z_0)^k f(z))}{\partial z^{(k-1)}} \right)$$

5.4. Aplicación del teorema de residuos

Sea $A_p(z)$ y $B_q(z)$ dos polinomios de grado p y q respectivamente. Sean (a_k) los ceros de $B_q(z)$ y sea: $f(z) = \frac{A_p(z)}{B_q(z)}$.

Sea γ_R el arco de circunferencia $\gamma_R(t) = Re^{it}$; $0 \leq t \leq \pi$.

I) Suponga que $B_q(z)$ no tiene ceros reales y $q \geq p + 2$. Si R es suficientemente grande, se tiene por el teorema de residuos que:

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_i) > 0} \operatorname{Res}(f, a_i)$$

Se sigue del Teorema de Residuos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_i) > 0} \operatorname{Res}(f, a_i)$$

Para justificar que: $\int_{\gamma_R} f(z)dz \rightarrow 0$, cuando $R \rightarrow \infty$. Ocupamos el siguiente lema.

Lema 81 Sea $g(z)$ continua en $\{z = \rho e^{i\theta}; \rho \geq R_0; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. Si ocurre que $\lim_{z \rightarrow \infty} (zg(z)) = 0$, entonces:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0.$$

Veamos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} zf(z) &= z \frac{A_p(z)}{B_q(z)} \\ &= \frac{\text{polinomio de grado } p+1}{\text{polinomio de grado } q} \\ &= \text{polinomio de grado } p+1-q \leq -1 \\ &\sim \frac{1}{z} \rightarrow 0 \text{ cuando } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Demostración. Sea el camino $\gamma_R(t) = \rho e^{it}$ con $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} g(z)dz \right| &= \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\rho e^{it}) \rho i e^{it} dt \right| \\ &\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\rho g(\rho e^{it})| dt \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 82 Demostrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Solución: Sea $z^2 = A_2(z)$ y $1+z^4 = B_4(z)$, entonces

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{A_2(z)}{B_4(z)}.$$

Las raíces de $B_4(z) = 1+z^4$ tal que, $z^4 = -1$, son:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; \quad z_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}}; \quad z_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}}.$$

Además, $f(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$. Luego, los residuos de cada singularidad (polo de orden 1) que está dentro de la semicircunferencia son:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4} \frac{1}{z_1} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

Por otro lado, el residuo de f respecto a la segunda singularidad es:

$$\text{Res}(f, z_2) = \frac{1}{4} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{2\pi i}{4} [e^{-\frac{\pi i}{4}} + e^{-\frac{3\pi i}{4}}] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

II) Suponga que $B_q(z)$ no tiene ceros reales y que $q \geq p + 1$ y $\lambda > 0$.

Entonces por el Teorema de Residuos, para R grande, se tiene:

$$\int_{-R}^R f(x)e^{i\lambda x} dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_k) > 0} \text{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, a_k)$$

Se sigue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_k) > 0} \text{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, a_k).$$

Lema 83 Sea g una función continua en un sector del semi-plano superior $\{z = \rho e^{i\theta} / \rho \geq R_0; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \text{ donde } 0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi\}$. Si

$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ y $\lambda > 0$, entonces:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z)e^{i\lambda z} dz = 0$$

Demostración. Sea $\gamma_R(t) = \rho e^{it}$, con $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| &= \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\rho e^{it}) e^{i\lambda \rho e^{it}} \rho i e^{it} dt \right| \\ &\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(\rho e^{it})| \left| e^{i\lambda \rho (\cos t + i \sin t)} \rho i e^{it} \right| dt \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(\rho e^{it})| |e^{i\lambda \rho \cos t}| |e^{-\lambda \rho \sin t}| \rho |i e^{it}| dt \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(\rho e^{it})| \rho e^{-\lambda \rho \sin t} dt \end{aligned}$$

y $\rho e^{-\lambda \rho \sin t} \rightarrow 0$, cuando $\rho \rightarrow \infty$, siempre que $\lambda \rho \sin t > 0$, pues $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset [0, \pi]$. Luego:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(\rho e^{it})| \rho e^{-\lambda \rho \sin t} dt \rightarrow 0,$$

cuando $\rho \rightarrow \infty$. ■

Ejercicio 84 Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$. Usar $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$.

III) $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$, donde $R(x, y)$ es una función racional de dos variables reales, se puede escribir como:

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}, \frac{z + \bar{z}}{2}\right) \frac{1}{iz} dz$$

y esta última se resuelve con ayuda del Teorema de Residuos.

Ejemplo 85 Calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x} dx$, con $a > 1$.

Solución: Ocupando que $\cos(x) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x} dx &= \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z+\bar{z}}{2}} \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(a + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2az + z^2 + 1} dz \end{aligned}$$

Notar que:

$$z^2 + 2az + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Donde sólo $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ queda dentro de la circunferencia $|z| < 1$, pues $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ está fuera ya que $a > 1$.

Luego:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{2az + z^2 + 1}, z_1 \right) \\ &= 4\pi \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z - z_2} = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

IV) Supongamos que $f(z) = \frac{A_p(z)}{B_q(z)}$ tiene un polo simple a_0 sobre el eje real. Sean $q \geq p + 1$ y $\lambda > 0$. Dados, $R > 0$ y $0 < \varepsilon < R$, denotamos por $\gamma_{R,\varepsilon}$ la frontera de la región limitada por el eje real y las semicircunferencias γ_R y $a_0 + \gamma_\varepsilon$ orientadas positivamente.

Para R suficientemente grande y ε suficientemente pequeño, el Teorema de Residuos proporciona:

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_k) > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\lambda z}, a_k)$$

Se sigue que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_k) > 0} \text{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) + i\pi \text{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, a_0)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Im}(a_k) > 0} \text{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) &= \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)e^{i\lambda z} dz \\ &= \int_{-R}^{a_0-\varepsilon} f(x)e^{i\lambda x} dx + \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} f(z)e^{i\lambda z} dz \\ &\quad + \int_{a_0+\varepsilon}^R f(x)e^{i\lambda x} dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z} dz \end{aligned}$$

Por el lema visto anteriormente, la última integral es 0 (ya que $\lambda > 0$ y $q \geq p + 1$).

Ahora probaremos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z) dz = -i\pi \text{Res}(g(z), a_0)$$

donde $g(z) = f(z)e^{i\lambda z}$.

En efecto, como $z = a_0$ es polo real simple de $g(z)$:

$$g(z) = \frac{b_1}{(z - a_0)} + c_0 + c_1(z - a_0) + c_2(z - a_0)^2 + \dots$$

Si consideramos:

$$h(z) \equiv g(z) - \frac{b_1}{(z - a_0)} = b_0 + b_1(z - a_0) + b_2(z - a_0)^2 + \dots$$

donde $b_1 = \text{Res}(g(z), a_0)$.

Tenemos que $h(z)$ es analítica en $z = a_0$, o sea, $z = a_0$ es singularidad reparable de $h(z)$. Por lo tanto, existe $M > 0$ tal que:

$$|h(z)| < M, \quad |z - a_0| \leq 1$$

Luego:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} h(z) dz \right| &= \left| \int_{\pi}^0 h(\gamma_{\varepsilon,0}(t)) \gamma'_{\varepsilon,0}(t) dt \right| \\ &\leq M \int_0^{\pi} |\gamma'_{\varepsilon,0}(t)| dt \\ &= M \int_0^{\pi} \varepsilon dt = M\varepsilon\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} h(z) dz = 0$.

Como queremos probar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z) dz = -i\pi \operatorname{Res}(g(z), a_0)$, obtenemos de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} h(z) dz = 0$ que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z) dz &= b_1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z - a_0} dz \\ &= \operatorname{Res}(g(z), a_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z - a_0} dz \end{aligned}$$

Donde:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z - a_0} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = -i\pi.$$

Luego, la igualdad queda demostrada. ■

Ejercicio 86 *Demostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.*

V) Consideremos

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} f(x) dx; \quad 0 < a < 1.$$

Suponemos que $f(z)$ no tiene polos en $(0, \infty)$ y que se cumple:

a) $\lim_{z \rightarrow \infty} |z^a f(z)| = 0.$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} |z^a f(z)| = 0.$

Entonces:

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{a_k \neq 0} \text{Res}(z^{a-1} f(z), a_k).$$

Siendo $z^{a-1} = e^{(a-1)\log_\pi(z)}$, donde $\log_\pi(z)$ es la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus (0, \infty)$ con $0 < \theta < 2\pi$.

Demostración. Consideremos la siguiente figura, más conocida como la cerradura:

Por el Teorema de Residuos, tenemos que :

$$\int_{\gamma_{R,r,\varepsilon}} f(z) z^{a-1} dz = 2\pi i \sum_{a_k \neq 0} \text{Res}(f(z) z^{a-1}, a_k).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{R,r,\varepsilon}} f(z) z^{a-1} dz &= \int_r^R f(x) x^{a-1} dx + \int_{\gamma_R} f(z) z^{a-1} dz \\ &+ \int_R^r f(x) (x e^{2\pi i})^{a-1} dx + \int_{\gamma_r} f(z) z^{a-1} dz \\ &= \int_r^R f(x) x^{a-1} dx - \int_r^R f(x) x^{a-1} e^{2\pi i(a-1)} dx \\ &+ \int_{\gamma_R} f(z) z^{a-1} dz + \int_{\gamma_r} f(z) z^{a-1} dz \\ &= (1 - e^{2\pi i a}) \int_r^R f(x) x^{a-1} dx \\ &+ \int_{\gamma_R} f(z) z^{a-1} dz + \int_{\gamma_r} f(z) z^{a-1} dz \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} z^{a-1} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} R^{a-1} e^{i(a-1)t} f(Re^{it}) Rie^{it} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} R^a f(Re^{it}) e^{iat} i dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |R^a f(Re^{it})| dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Esto ocurre, ocupando la primera propiedad: $\lim_{z \rightarrow \infty} |z^a f(z)| = 0$.

Análogamente, si ocupamos la segunda propiedad:

$$\int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z) dz \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

Ya que el $\lim_{z \rightarrow 0} |z^a f(z)| = 0$. ■

5.5. Fórmula de Poisson

Recordemos que $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Sabemos que si f es analítica en \mathbb{D} , entonces por fórmula de integral de Cauchy tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$

siempre que $|z| < 1$ donde $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sea $z_1 = \frac{1}{\bar{z}}$, con $z \in \mathbb{D}$. Entonces

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$

De lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_1)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{(w-z)} - \frac{1}{(w-\frac{1}{\bar{z}})} \right) f(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(|z|^2 - 1)}{(w-z)(w\bar{z} - 1)} f(w) dw \end{aligned}$$

Ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-\frac{1}{\bar{z}}} &= \frac{(w-\frac{1}{\bar{z}}) - (w-z)}{(w-z)(w-\frac{1}{\bar{z}})} \\ &= \frac{z - \frac{1}{\bar{z}}}{(w-z)(w-\frac{1}{\bar{z}})} \\ &= \frac{|z|^2 - 1}{(w-z)(w\bar{z} - 1)} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{|z|^2 - 1}{(e^{it} - z)(e^{it\bar{z}} - 1)} f(e^{it}) ie^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z|^2 - 1}{(1 - e^{-it}z)(e^{it\bar{z}} - 1)} f(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{(e^{-it}z - 1)(e^{it\bar{z}} - 1)} f(e^{it}) dt \end{aligned}$$

Si ponemos $z = re^{i\theta}$ con $r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{|e^{-it}re^{i\theta} - 1|^2} f(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{|re^{i(\theta-t)} - 1|^2} f(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \end{aligned}$$

donde $P_r(x) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{ix}|^2}$ y es llamado núcleo de Poisson.

Observemos que calculando obtenemos

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{ix}|^2} = \frac{1 - r^2}{(1 - re^{ix})(1 - re^{-ix})} = \frac{1 - r^2}{1 - r(e^{-ix} + e^{-ix}) + r^2}$$

Notemos que $P_r(x) \in \mathbb{R}$ para todo x , luego si $u = \operatorname{Re} f$, entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt$$

Además, notemos que $P_r(x) = P_r(-x)$ y periódica en x de período 2π .

También $P_r(x) \geq 0$ para $r < 1$.

Lo anterior podemos generalizarlo a un disco $\mathbb{D}(z_0, R)$.

Teorema 87 (*Fórmula integral de Poisson*) Sea f analítica en $\mathbb{D}(z_0, R)$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}(z_0, R)$. Entonces si $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $0 \leq r \leq R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

Si $u = \operatorname{Re} f$, entonces

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) u(z_0 + Re^{it}) dt.$$

La fórmula anterior, expresa que el valor de una función analítica en un punto interior de un disco, es igual al promedio ponderado (por un peso) de un valor en el borde. Dicho peso en cuestión es el núcleo de Poisson.

Tomando $f(z) = 1$ para todo z obtenemos lo siguiente

Corolario 88

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) dt = 1.$$

Una aplicación de la fórmula de Poisson es que podemos resolver el problema siguiente:

Problema de Dirichlet:

Resolver

$$\Delta u(x, y) = 0$$

en $x^2 + y^2 < 1$, con condiciones de borde dadas por

$$u(x, y) = g(x, y)$$

para $x^2 + y^2 = 1$, donde g es continua.

La respuesta a este problema es (en coordenadas polares)

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt$$

con $0 \leq r < 1$.

Demostración. Primero veremos que u es la parte real de una función analítica. Luego, $\Delta u = 0$ según sabemos.

En efecto, sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} g(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{w + z}{w - z} g(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{w}{w - z} - \frac{1}{w} \right) g(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2g(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w} dw \end{aligned}$$

donde $\gamma(t) = e^{it}$.

Luego $f(z)$ es analítica en $|z| < 1$, además

$$Re f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) g(e^{it}) dt$$

donde si $z = re^{i\theta}$, entonces tendríamos

$$Re \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\theta-t)}|^2} = P_r(\theta - t).$$

Esto prueba que $Re f(z) = u(z)$ con $z = re^{i\theta}$, luego $\Delta u = 0$.

Veamos ahora que $u(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ (se satisface la condición de borde).

Sea $0 < r < 1$, entonces veremos que

$$\lim_{r \rightarrow -1} u(re^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$.

En efecto

$$\begin{aligned} |u(re^{i\theta}) - g(e^{i\theta})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt - g(e^{i\theta}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) (g(e^{it}) - g(e^{i\theta})) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{2\pi-\theta} P_r(x) (g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) (g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(x) |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \geq \delta} P_r(x) |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

donde, dado $\epsilon < 0$ se elige $\delta > 0$ tal que $|g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| < \epsilon$ para cada θ . Si $|x| < \delta$ (por continuidad de la función g dada la hipótesis), luego

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(x) dx \leq \epsilon$$

Además notemos que

$$I_2 \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi} \int_{|x| \geq \delta} |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx$$

En efecto, notemos que $P_r(x) \leq P_r(\delta)$ si $|x| \geq \delta$ y $-\pi \leq x \leq \pi$.

Así

$$I_2 \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})| dx$$

Sea $M = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |g(e^{i(\theta+x)})|$, entonces

$$I_2 \leq 2MP_r(\delta)$$

Si hacemos $r \rightarrow 1-$

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2} = \frac{0}{2 - 2 \cos(\delta)} = 0$$

Esto prueba la afirmación. ■

5.6. Fórmula de Jensen

Sea f analítica en Ω tal que $\overline{\mathbb{D}}(0, 1) \subseteq \Omega$.

Suponga que f tiene un logaritmo en Ω , esto es $\log f(z)$ es analítica en Ω , entonces aplicando la fórmula integral de Poisson a $Re(\log f(z)) =$

$\log(|f(z)|)$, obtenemos

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \ln |f(e^{it})| dt$$

con $z = e^{i\theta}$ y $0 \leq r < 1$.

Ahora, si f tiene ceros en \mathbb{D} , $\log f(z)$ puede no ser analítica. Sin embargo, se puede modificar la fórmula anterior para tomar en cuenta los ceros de f . Esta es la llamada fórmula de Jensen-Poisson.

Teorema 89 (*Fórmula de Jensen-Poisson*) Sea f analítica en $\bar{\mathbb{D}}$ y suponga que $f(z) \neq 0$ en $\partial\mathbb{D}$.

Sean a_1, a_2, \dots, a_n los ceros de f en \mathbb{D} .

Entonces

$$\log |f(z)| = \sum_{j=1}^n \log \left| \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \log |f(e^{it})| dt$$

Demostración. Sea $g(z) = f(z) \prod_{j=1}^n \frac{1 - \bar{a}_j z}{z - a_j}$ para $|z| < R$ y $R < 1$.

Recordemos que para cada a_i con $|a_i| < 1$

$$\phi_{a_i}(z) = \frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z}$$

es una Transformación de Mobius que lleva \mathbb{D} en \mathbb{D} Y $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$. Entonces

$$\phi_{a_i} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) = \frac{1 - a_i \bar{z}}{\bar{z} - \bar{a}_i}$$

y

$$\overline{\phi_{a_i} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right)} = 1$$

Haciendo el desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = a_k(z - a_i)^k + \dots$$

con $c_k \neq 0$.

Entonces

$$\frac{f(z)}{(z - a_i)^k} = c_k + c_{k+1}(z - a_i) + \dots$$

es analítica en $z = a_i$.

Por lo tanto $g(z)$ es analítica en $\mathbb{D}(0, R)$ y no tiene ceros allí.

Además $|g(e^{it})| = |f(e^{it})|$, y

$$\ln |g(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \ln |g(e^{it})| dt$$

Luego de lo anterior tenemos que

$$\ln |f(z)| + \ln \left(\left| \prod_{j=1}^n \left(\frac{1 - \bar{a}_j z}{z - a_j} \right) \right| \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \ln |g(e^{it})| dt$$

luego tenemos

$$\begin{aligned} \ln |f(z)| &= \sum_{j=1}^n \left| \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \ln |g(e^{it})| dt \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{|z - a_j|}{|1 - \bar{a}_j z|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \ln |f(e^{it})| dt \end{aligned}$$

El caso particular en que $z = 0$, se conoce como fórmula de Jensen. ■

Teorema 90 (Fórmula de Jensen) Sea f analítica en $\bar{\mathbb{D}}$ y suponga que $f(0) \neq 0$ y $f(z) \neq 0$ en $\partial\mathbb{D}$.

Sean a_1, a_2, \dots, a_n los ceros de f en \mathbb{D} , repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces

$$\ln |f(0)| = \sum_{j=1}^n \ln |a_j| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{it})| dt$$

En efecto, en este caso, $r = 0$, luego

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{ix}|^2}$$

entonces $P_0(x) = 1$, de donde sale el resultado usando el teorema anterior.

Observación 91 Las fórmulas anteriores son importantes en la teoría de funciones enteras (f analítica en \mathbb{C}).

5.7. Automorfismos del disco unitario

Denotemos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Lema 92 Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analítica tal que $f(0) = 0$.

Entonces

i) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$.

ii) $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = az$, donde $|a| = 1$.

Demostración.

i) Por la hipótesis

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)z + f''(0)z^2 + \dots \\ &= f'(0)z + f''(0)z^2 \end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{D}$.

Entonces $g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + \dots$ es analítica en \mathbb{D} .

Sea $z \in \mathbb{D}$ tal que $|z| = r < 1$, entonces en $\{z : |z| < r\}$ se tiene de acuerdo al principio del máximo para g

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \text{Sup}_{|w|=r} \left| \frac{f(w)}{w} \right| \leq \text{Sup}_{|w|=r} \frac{1}{|w|} = \frac{1}{r}$$

Haciendo ahora $r \rightarrow 1-$ se obtiene $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Por otra parte, si $g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + \dots$, es claro que

$$|f'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1.$$

ii) Supongamos ahora que $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \neq 0$ y $z_0 \in \mathbb{D}$, entonces $|g(z_0)| = 1$ con $|z_0| < 1$.

Pero $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego el máximo se alcanza en z_0 que está en el interior de \mathbb{D} . Por el principio del máximo, debe ser $g(z)$ constante, digamos $g(z) = a$ con $a \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = az$ con $a \in \mathbb{C}$. Pero $|z_0| = |f(z_0)| = |a||z_0|$. Así $|a| = 1$.

Por otra parte, supongamos que $|f'(0)| = 1$. Entonces como $g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + \dots$, tenemos que

$$|g(0)| = |f'(0)| = 1$$

Así, ya que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ concluimos otra vez que el máximo se alcanza en 0 que está en el interior de \mathbb{D} . Igual que antes llegamos a la conclusión. ■

El resultado anterior dice que si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es analítica tal que $f(0) = 0$, entonces $f(z) = az$ con $|a| < 1$.

Por ejemplo $f(z) = \frac{z}{2}$.

Se puede generalizar el resultado anterior para $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$.

Un ejemplo de tal función es el siguiente $f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ con $|a| < 1$.

En efecto, es claro que $f(a) = 0$. Veamos que $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Para esto basta ver que

$$f(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Veamos, sea z tal que $|z| = 1$, entonces $z\bar{z} = 1$ Así $z = \frac{1}{\bar{z}}$ de donde

$$|z - a| = \left| \frac{1}{\bar{z}} - a \right| = \left| \frac{1}{\bar{z}}(1 - \bar{z}a) \right| = |z(1 - \bar{z}a)| = |z||1 - \bar{z}a|$$

entonces

$$|f(z)| = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} = |z| = 1$$

Esto prueba la afirmación.

Note además que f es invertible (1-1) ya que, de hecho

$$f^{-1}(w) = \frac{w + a}{1 + \bar{a}w}$$

y es evidente que es prácticamente igual a f , excepto que a es cambiado por $-a$ de modo que $f^{-1}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Así $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{D}$ y luego $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, esto es f es además sobreyectiva.

Observación 93 Si denotamos $\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$, vemos que $\phi_a^{-1} = \phi_{-a}$.

El resultado siguiente dice que toda función bianalítica de \mathbb{D} en \mathbb{D} tal que $f(a) = 0$, tiene la forma anterior.

Teorema 94 *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analítica y biyectiva tal que $f(a) = 0$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$ y*

$$f(z) = c \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Demostración.

Note que $g = f \circ \phi_{-a}$, $g(0) = 0$ y $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Por lema de Schwarz $|g'(0)| \leq 1$.

Ahora

$$g'(z) = f'(\phi_{-a}(z))\phi'_{-a}(z)$$

entonces

$$g'(0) = f'(\phi_{-a}(0))\phi'_{-a}(0) = f'(a)(1 - |a|^2)$$

ya que

$$\phi'_{-a}(z) = \frac{(1 + \bar{a}z) - \bar{a}(z - a)}{(1 + \bar{a}z)^2} = \frac{1 - |a|^2}{(1 + \bar{a}z)^2}$$

Por lo tanto

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

Análogamente, $h = \phi_a \circ f^{-1}$, con $h(0) = 0$ y $h(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

Luego $|h'(0)| \leq 1$.

Calculamos

$$h'(z) = \phi'_a(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z)$$

entonces

$$h'(0) = \phi'_a(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0) = \phi'_a(a)(f^{-1})'(0).$$

Notemos que

$$\phi'_a(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2} \Rightarrow \phi'_a(a) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - |a|^2)^2} = \frac{1}{1 - |a|^2}$$

entonces $\left| \frac{1}{(1 - |a|^2)}(f^{-1})'(0) \right| \leq 1 \Rightarrow |(f^{-1})'(0)| \leq 1 - |a|^2.$

Ahora $f^{-1}(f(z)) = z$, entonces

$$(f^{-1})'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(a))f'(a) = 1$$

así

$$\frac{1}{1 - |a|^2} \geq |f'(a)| = \left| \frac{1}{(f^{-1})'(0)} \right| \geq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

entonces

$$|f'(a)| = \frac{1}{1 - |a|^2}$$

Con lo anterior podemos ver que

$$|g'(0)| = |f'(a)(1 - |a|^2)| = \frac{1 - |a|^2}{1 - |a|^2} = 1$$

Por lema de Schwarz $g(z) = cz$ con $|c| = 1$, entonces

$$f \circ \phi_{-a}(z) = cz$$

con $|c| = 1$ y así

$$f(z) = c\phi_a(z)$$

■

Capítulo 6

Ejercicios

6.1. Ejercicios resueltos

1. Demuestre que $Arctan(z) = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i+z}{i-z} \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$.

Solución:

Sea $w = \arctan(z)$ entonces

$$\tan(w) = z \Leftrightarrow \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = z.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} e^{iw} - e^{-iw} &= i(e^{iw} + e^{-iw})z \\ \Leftrightarrow e^{2iw} - 1 &= ie^{2iw}z + iz \\ \Leftrightarrow e^{2iw} &= \frac{1+iz}{1-iz} \\ \Leftrightarrow w &= \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) \end{aligned}$$

Note que:

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z}.$$

Entonces

$$0 = \ln \left(\left(\frac{i + z}{i - z} \right) \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) \right) = \ln \left(\frac{i + z}{i - z} \right) + \ln \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right).$$

Multiplicando por $\frac{1}{2i}$ obtenemos finalmente

$$\frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) = \frac{-1}{2i} \ln \left(\frac{i + z}{i - z} \right) = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i + z}{i - z} \right).$$

2. Sea $f(z) = \sqrt{|xy|}$ donde $z = x + iy$. Demuestre que valen las ecuaciones de Cauchy Riemann en $z = 0$ pero que $f'(0)$ no existe. Justifique.

Solución:

Sea $f(x) = \sqrt{|xy|} = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ y $v(x, y) = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = 0 = \frac{-\partial v}{\partial x}(0, 0). \end{aligned}$$

Para ver que $f'(0)$ no existe observamos que:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|xy|}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|xy|} \bar{z}}{|z|^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|xy|}(x - iy)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{x\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} - i \frac{y\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

Si $y = 0$, el límite es cero, esto es $f'(0) = 0$.

Ahora, si $x = y > 0$, obtenemos

$$\frac{x\sqrt{|x^2|}}{2x^2} - i\frac{x\sqrt{|x|^2}}{2x^2} = \frac{x^2}{2x^2} - \frac{ix^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Luego $f'(0)$ no existe.

3. ¿Existe una función analítica $f = u + iv$ tal que $u(x, y) = e^{y/x}$? Justifique.

Solución:

No, pues de lo contrario debe ser armónica, pero:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{y/x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{-y}{x^2} e^{y/x}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} e^{y/x} + \frac{y^2}{x^4} e^{y/x}.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{y/x}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} e^{y/x}.$$

Así vemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0.$$

4. Halle una transformación de Möbius que deje fijos los puntos $\frac{1}{2}$ y 2 , y que lleve el punto $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ en ∞ .

Solución:

$$w = \frac{z(1 - 4i) - 2(1 - i)}{2z(1 - i) - (4 - i)}.$$

5. Encuentre la expansión de la función $f(z) = \frac{z^2}{(z + 1)^2}$ como una serie de Taylor en torno a $z = 0$ y halle el radio de convergencia.

Solución:

Sea $g(z) = \frac{z}{z + 1}$ entonces $g'(z) = \frac{1}{(1 + z)^2}$ y así, podemos escribir

$$z^2 g'(z) = \frac{z^2}{(z + 1)^2}.$$

Recordemos ahora que para $|z| < 1$ tenemos

$$\frac{1}{1 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Entonces

$$\frac{z}{z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1}$$

y luego

$$g'(z) = \left(\frac{z}{z + 1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) z^n.$$

De esta manera obtenemos, para $|z| < 1$ la expresión

$$\frac{z^2}{(1 + z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) z^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m-2} (m - 1) z^m.$$

6. Sea $w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$. Demuestre que la preimagen de la familia $|w| = \lambda$ es una familia de círculos para cada $\lambda \neq 1$.

Solución:

Ya que $w\bar{w} = \lambda^2$, reemplazando tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) \left(\overline{\frac{z - z_1}{z - z_2}}\right) &= \lambda^2 \Leftrightarrow (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) \\
 &= \lambda^2(z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2) \\
 \Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{z}_1 - z_1\bar{z} + z_1\bar{z}_1 & \\
 &= \lambda^2(z\bar{z} - z\bar{z}_2 - z_2\bar{z} + z_2\bar{z}_2) \\
 \Leftrightarrow (1 - \lambda^2)z\bar{z} + z(\lambda^2\bar{z}_2 - \bar{z}_1) & \\
 + \bar{z}(\lambda^2 z_2 - z_1) + |z_1|^2 - \lambda^2|z_2|^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto es un círculo si $\lambda^2 \neq 1$, de lo contrario es una recta.

7. Halle una transformación de Möbius que lleve los puntos $-1, i, 1 + i$ en los puntos $0, 2i, 1 - i$ respectivamente.

Solución:

$$w = \frac{-2i(z + 1)}{4z - 1 - 5i}$$

8. Demuestre que la función $T(z) = z\operatorname{Re}(z)$ es diferenciable sólo en $z = 0$ y halle $T'(0)$.

Solución:

$$\frac{T(z) - T(0)}{z - 0} = \frac{z\operatorname{Re}(z)}{z} = \operatorname{Re}(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0.$$

Por lo tanto T diferenciable y $T'(0) = 0$.

Veamos que no lo es en otro punto

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{T(z) - T(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z \operatorname{Re}(z) - z_0 \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z(z + \bar{z}) - z_0(z_0 + \bar{z}_0)}{z - z_0}.\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2} \frac{zz + z\bar{z} - z_0z_0 - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{zz - z_0z_0 + z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)z + z_0z - z_0z_0 + (z - z_0)\bar{z} + z_0\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(z + z - 0 + \bar{z} + z_0 \frac{z - z_0}{z - z_0} \right) \\ &= \frac{1}{2} (z + z_0 + \bar{z}_0) + z_0 \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2} (z + z_0 + \bar{z}_0) + z_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}\end{aligned}$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

no existe.

Note que lo anterior ocurre exepcto si $z_0 = 0$.

9. Halle el error en el siguiente argumento: "Ya que $(-z)^2 = z^2$ se tiene $2\ln(-z) = 2\ln(z)$ y luego $\ln(-z) = \ln(z)$ (!)." Justifique su respuesta.

Solución:

Si tenemos

$$(-z)^2 = z^2$$

entonces

$$\ln(-z^2) = \ln(z^2)$$

Si $z = re^{i\theta}$ se tiene $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$, por lo cual $\ln(z^2)$ toma más de un valor. En general

$$\ln(z^2) = \ln(r^2) + 2i\theta + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Por otra parte

$$-z^2 = (-1)z^2 = e^{i\pi}r^2e^{2i\theta} = r^2e^{2\theta+i\pi}$$

luego

$$\ln(-z^2) = \ln(r^2) + (2\theta + \pi)i + 2n\pi i = \ln(r^2) + 2\theta i + (2n + 1)\pi i$$

donde $n \in \mathbb{Z}$.

Así $\ln(-z^2)$ en general es diferente de $\ln(z^2)$.

10. Encuentre el valor de

$$(3 - 4i)^{1+i}.$$

Solución:

$$\text{En efecto } (3 - 4i) = \sqrt{9 + 16}e^{\arctan(-4/3)i} = 5e^{i\theta}$$

con $\theta = \arctan(-4/3) = -\arctan(4/3)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 (3 - 4i)^{1+i} &= e^{(1+i)\ln(3-4i)} \\
 &= e^{(1+i)(\ln(5)+i\theta)} \\
 &= e^{\ln(5)+i\theta+i\ln(5)-\theta} \\
 &= e^{\ln(5)-\theta} e^{i(\ln(5)+\theta)} \\
 &= 5e^{-\theta} \cos(\ln(5) + \theta) + i \sin(\ln(5) + \theta) \\
 &= 5e^{\arctan(4/3)} (\cos(\ln(5) - \arctan(4/3)) \\
 &\quad + i \sin(\ln(5) - \arctan(4/3))
 \end{aligned}$$

11. Halle todas las raíces de la ecuación:

$$\operatorname{sen}(z) = i \operatorname{senh}(z).$$

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} &\Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = e^{-z} - e^z \\
 &\Leftrightarrow \frac{e^{(1+i)z} - 1}{e^z} = \frac{1 - e^{(1+i)z}}{e^{iz}} \\
 &\Leftrightarrow e^{iz} (e^{(1+i)z} - 1) = e^z (1 - e^{(1+i)z})
 \end{aligned}$$

Haciendo $u = e^{(1+i)z} = e^z e^{iz}$ entonces

$$\frac{u - 1}{e^z} = \frac{1 - u}{e^{iz}}$$

De aquí

$$u = -e^{2iz} = e^{i\pi+2iz} = e^{i(\pi+2z)}.$$

• Caso 1: $u = 1$.

$$e^{(1+i)z} = 1 \quad \text{por lo tanto} \quad z = \frac{2k\pi i}{1+i}.$$

• Caso 2: $u = e^{i(\pi+2z)}$ por lo tanto $z = \frac{-(2k+1)\pi}{i+1}$.

12. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y sea $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ fijo.

(i) Halle la expansión de $f(z)$ como una serie de Taylor en torno a $z = a$.

(ii) Encuentre todos los valores de a para los cuales la expansión en serie de la parte (i) constituye una continuación analítica de $f(z)$.

Solución:

$$(i) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

$$f'(z) = 1(1-z)^{-2}$$

$$f''(z) = 1 \cdot 2(1-z)^{-3}$$

...

$$f^n(z) = n!(1-z)^{-(n+1)}.$$

$$\text{Por lo tanto} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}.$$

(ii) $a \in [0, 1)$.

13. Considere la función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

(i) Expanda $f(z)$ en una serie de Taylor en torno a $z = -1/2$.

(ii) Determine el dominio en el cual la función $f(z)$ es continuada analíticamente.

Solución:

$$(i) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln(1 - z).$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z + 1/2)^n \text{ con } a_n = \frac{f^{(n)}(-1/2)}{n!}$$

$$f'(z) = \frac{-1}{1-z} = -(1-z)^{-1}.$$

$$\text{Así } f^{(n)}(z) = -(n-1)!(1-z)^{-n} \text{ con } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Por lo tanto } f^{(n)}(-1/2) = -(n-1)!(3/2)^{-n}$$

$$\text{con } \frac{f^{(n)}(-1/2)}{n!} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Entonces

$$f(z) = \ln(3/2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{n} (z + 1/2)^n$$

$$(ii) (R)^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Por lo tanto } R = \frac{3}{2} \text{ y } |z + 1/2| < 3/2.$$

14. Sean $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $g(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$. Observe que ambas series de potencia no tienen dominio de convergencia en común.

Sin embargo:

Demuestre que la función $g(z)$ es continuación analítica de la función

$f(z)$.

Solución:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{ y } g(z) = c\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}.$$

15. Evalúe la integral $\int_{\gamma} |z| dz$ donde γ es el semicírculo $|z| = 1$, $-\pi/2 \leq \arg(z) \leq \pi/2$ y el punto de partida es $z = i$. (la orientación de la curva es siempre positiva, esto es, en el sentido contrario a las manecillas del reloj).

Solución:

Tenemos que $\gamma(t) = e^{it}$ y $\gamma'(t) = ie^{it}$ con $|\gamma(t)| = 1$. Entonces

$$\int_{\gamma} |z| dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\gamma(t)| \gamma'(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma'(t) dt = \gamma(\pi/2) - \gamma(-\pi/2)$$

Donde $\gamma(\pi/2) = e^{i\pi/2} = i$ y $\gamma(-\pi/2) = -i$.

Así

$$\int |z| dz = i - (-i) = 2i.$$

16. Evalúe la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ donde γ es el círculo $|z| = 1$, y $\sqrt{-1} = i$ (esto significa que el punto de partida es $z = -1$).

Solución:

Tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\sqrt{\gamma(t)}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{it/2} dt = 2(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) = 4i.$$

17. Evaluar la integral $\int_{\gamma} \ln(z) dz$ donde γ es el círculo $|z| = 1$, y $\ln(i) = \frac{\pi i}{2}$.

Solución

Tenemos

$$\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \ln(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} itie^{it} dt = - \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} te^{it} dt = -2\pi.$$

18. Evaluar $\int_{|z|=1} z^{\alpha} dz$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$ y $1^{\alpha} = 1$.

Solución:

$$\int_{|z|=1} z^{\alpha} dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^{\alpha} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} ie^{i\alpha t} e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)t} dt.$$

Así,

• si $\alpha = -1$

$$\int_{|z|=1} z^{\alpha} dz = 2\pi i.$$

• si $\alpha \neq -1$

$$\int_{|z|=1} z^{\alpha} dz = \frac{1}{(\alpha + 1)} (e^{2\pi i \alpha} - 1).$$

19. Si $|a| \neq R$, demuestre que $\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$.

Solución:

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} = \int_0^{2\pi} \frac{R dt}{|\gamma(t) - a| |\gamma(t) + a|}$$

donde $\gamma(t) = Re^{it}$ con $0 < t < 2\pi$ y $|dz| = |\gamma'(t)dt| = Rdt$.

Tenemos que

$$|\gamma(t) - a||\gamma(t) + a| = |Re^{it} - a||Re^{it} + a|$$

pero $|z - a| \geq ||z| - |a||$ y $|z + a| \geq ||z| + |a||$.

Así tenemos que

$$|\gamma(t) - a||\gamma(t) + a| = |\gamma(t)^2 - a^2| \geq ||\gamma(t)|^2 - |a|^2|$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{Rdt}{|\gamma(t) - a||\gamma(t) + a|} \leq \int_0^{2\pi} \frac{Rdt}{|R^2 - |a|^2|} = \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

20. Sea $z := re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ y γ un camino que une a 1 y z . Demuestre que $\int_1^z \frac{dw}{w} := \int_\gamma \frac{dw}{w} = \ln(r) + i\theta + 2k\pi i$, donde k es un entero que indica cuantas veces el camino de integración da vueltas alrededor del origen.

Solución:

$\gamma(t) = (z - 1)t + 1$ con $0 \leq t \leq 1$ y $\gamma'(t) = z - 1$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt &= \int_0^1 \frac{(z - 1)}{((z - 1)t + 1)} dt = \ln(z) - \ln(1) \\ &= \ln(z) = \ln(r) + i\theta + 2k\pi i. \end{aligned}$$

21. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada y suponga que $z_0 \notin \text{Traza}(\gamma)$. Demuestre que $\text{Ind}_\gamma(z_0)$ es un número entero. Ayuda: Defina

$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

y demuestre que la función $h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ es constante.

Solución:

Tenemos que

$$\text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt$$

Consideremos $g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{(\gamma(s) - z_0)} ds$; entonces si $h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ se tiene:

$$\begin{aligned} h'(t) &= -e^{-g(t)} g'(t) (\gamma(t) - z_0) + \gamma'(t) e^{-g(t)} \\ &= -e^{-g(t)} \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z_0)} (\gamma(t) - z_0) + \gamma'(t) e^{-g(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(t)$ es constante.

Por otro lado $h(0) = h(1)$ pero

$$h(0) = e^{-g(0)}(\gamma(0) - z_0) = (\gamma(0) - z_0)$$

y

$$h(1) = e^{-g(1)}(\gamma(1) - z_0) = e^{-g(1)}(\gamma(0) - z_0)$$

entonces

$$e^{-g(1)}(\gamma(0) - z_0) = (\gamma(0) - z_0)$$

y así

$$e^{-g(1)} = 1$$

luego

$$g(1) = 2k\pi i$$

Por lo tanto

$$\text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} g(1) = k.$$

22. Calcule $\int_\gamma \frac{\ln(z)}{z^n} dz$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución:

$f(z) = \frac{\ln(z)}{z^n}$ es analítica en el disco. Por lo tanto

$$\int_\gamma \frac{\ln(z)}{z^n} = 0$$

para todo $n \geq 0$.

23. Calcule $\int_\gamma \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m} dz$ donde $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $m \in \mathbb{N}$.

Solución:

Sabemos que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{(n+1)}} dw$$

entonces

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^n} dw$$

Sea $f(z) = z^{1/m}$, entonces

$$f'(z) = \frac{1}{m} z^{(1/m)-1}$$

$$f''(z) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) z^{(1/m)-2}$$

$$f'''(z) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) z^{(1/m)-3} \dots$$

$$f^k(z) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - (k-1) \right) z^{(1/m)-k}.$$

Luego

$$f^{(m-1)}(w) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - (m-2) \right) z^{(1/m)-(m-1)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m} dz &= \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(m-1)}(1) \\ &= \frac{2\pi i}{(m-1)!m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{m} - (m-2) \right) \end{aligned}$$

24. De una expansión en serie de potencias de $\ln(z)$ en torno a $z = i$ y halle su radio de convergencia.

Solución:

$$\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n \geq 0} z^n$$

si $|z| < 1$ entonces $\frac{1}{(1-iz)} = \sum_{n \geq 0} (iz)^n$ si $|z| < 1$.

Así

$$\frac{1}{i(1-iz)} = \sum_{n \geq 0} (i)^{n-1} z^n$$

si $|z| < 1$.

Entonces

$$\frac{1}{(i+z)} = \sum_{n \geq 0} (i)^{n-1} z^n$$

si $|z| < 1$.

Luego

$$\ln(i + z) = \sum_{n \geq 0} (i)^{n-1} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

si $|z| < 1$.

Por lo tanto

$$\ln(w) = \sum_{n \geq 0} (i)^{n-1} \frac{(w - i)^{n+1}}{n+1}$$

Si $|w - i| < 1$ el radio de convergencia es 1.

25. Verdadero o Falso: ¿Existe una función analítica en $z = 0$ y que toma los siguientes valores en los puntos $z = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$.

- a) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$;
- b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots?$

Si la respuesta es afirmativa, encuentre explícitamente la función. Si es negativa, justifique apropiadamente.

Solución:

a) $f(1) = 0, f(1/2) = 1, f(3/2) = 0, f(1/4) = 1, \dots$ no existe pues, $z_n = 1/n$, tal que $f(z_n) = 0$ para n impar y se tendría $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. Contradicción con el hecho de que f es analítica.

b) $f(1) = 1/2, f(2) = 2/3, f(1/3) = 3/4, \dots f(1/n) = \frac{n}{n+1}$.

Sea $f(z) = \frac{1}{1+z}$, cumple lo pedido, ya que $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{1+n}$.

26. Suponga que al menos una de las desigualdades de Cauchy es una

igualdad, esto es: $|c_k| = \frac{M(r)}{r^k}$. Demuestre que la función $f(z)$ tiene la forma $f(z) = c_k z^k$.

Solución:

Consideremos

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^{n+c} z^{n+1} + \dots$$

Por hipótesis tenemos

$$|c_k| = \frac{|f^k(0)|}{k!} = \sup_{|w|=r} |f(w)| \frac{1}{r^k}$$

Entonces

$$\sup_{|w|=r} |f(w)| = r^k \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right|$$

Así

$$|c_k| \leq \frac{M(r)}{r^n} = \frac{r^k |c_n|}{r^n} = \frac{|c_n|}{r^{n-k}} \rightarrow_{r \rightarrow \infty} 0$$

con $n \neq k$. Por lo tanto

$$f(z) = c_k z^k.$$

27. Demuestre que si f es una función no constante, analítica en un dominio Ω y $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar su máximo valor en el interior del dominio Ω .

Solución:

Sea $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, g analítica y no constante en Ω . Entonces, por el Principio del Módulo Máximo, $|g(z)|$ no puede alcanzar su máximo valor

en Ω . Pues

$$\text{Sup}_{z \in \Omega} |g(z)| = \text{Sup}_{z \in \Omega} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \text{Inf}_{z \in \Omega} |f(z)|$$

Por lo tanto $|f(z)|$ no puede alcanzar su mínimo valor en Ω .

28. Halle $\text{Res} \left(\frac{1}{\sqrt{2-z}+1}; 1 \right)$.

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{2-z}+1} = \frac{\sqrt{2-z}-1}{(2-z)-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{\sqrt{2-z}}{z-1}$$

y $\sqrt{2-z} = a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + \dots$, pues $\sqrt{2-z}$ es analítica en $z=1$ así tendremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} - \frac{\sqrt{2-z}}{z-1} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} (\pm 1 + a_1(z-1)) + \dots \\ &= \frac{1}{z-1} \pm \frac{1}{z-1} - a_1 - a_2(z-1) + \dots \\ &= \frac{1 \pm 1}{z-1} - a_1 - a_2(z-1) + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto 0 y 2 son los residuos en $z=1$.

29. Evalúe

$$\int_{|z|=3} (1+z+z^2) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz.$$

Solución:

Hay tres singularidades esenciales:

$z=0, 1, 2$ dentro de $|z|=3$.

$\text{Res}(f, 0) = \text{Res}((1 + z + z^2)e^{1/z}, 0)$ pues el resto es analítica en $z = 0$.

Además

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots$$

Entonces

$$\begin{aligned} (1 + z + z^2)e^{1/z} &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots\right) \\ &+ \left(z + 1 + \frac{1}{z 2!} + \frac{1}{z^2 3!} + \dots\right) \\ &+ \left(z^2 + z + \frac{1}{z 2!} + \frac{1}{z^2 3!} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{Res}(f, 0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$

Por otro lado $\text{Res}(f, 1) = \text{Res}((1 + z + z^2)e^{1/(z-1)}, 1)$ pues el resto es analítica en $z = 1$.

Además

$$e^{1/(z-1)} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots$$

y $(1 + z + z^2) = a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2$ con

$$a_0 = g(1) = 3, a_1 = \frac{g'(1)}{1!} = 3, a_2 = \frac{g''(1)}{2!} = 1$$

así:

$$(3 + 3(z-1) + (z-1)^2)e^{1/(z-1)} = 3 + \frac{3}{(z-1)} + \frac{3}{2!(z-1)^2} + \dots +$$

$$3(z-1) + 3 + \frac{3}{2!(z-1)} + \dots + (z-1)^2 + \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2!}$$

$$= \frac{1}{(z-1)} \left(3 + \frac{3}{2} + 1 \right) + \dots$$

Entonces $\text{Res}(f, 1) = 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6}$.

30. Evalúe

$$\int_{|z|=r} \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz.$$

Solución:

En efecto

$$\frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{z^3}{z^4 + \frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{2} (\text{ceros} - \text{polos}) = \pi i.$$

31. Evalúe

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin^2 \left(\frac{1}{z} \right) dz.$$

Solución:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$$

$$\sin^2 \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \dots$$

Por lo tanto

$$\text{Res}(f, 0) = 0$$

y así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin^2 \left(\frac{1}{z} \right) = 0.$$

32. Halle $\text{Res} \left(\frac{z^a}{1 - \sqrt{z}}; 1 \right)$, $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$\frac{z^\alpha}{1 - \sqrt{z}} \cdot \frac{1 + \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} = \frac{-(1 + \sqrt{z})z^\alpha}{z - 1}.$$

Además

$$(1 + \sqrt{z}) = a_0 + a_1(z - 1) + a_2(z - 1)^2 + \dots$$

$$z^\alpha = e^{a \ln z} = b_0 + b_1(z - 1) + b_2(z - 1)^2 + \dots$$

$$(1 + \sqrt{z}) = c_0 + c_1(z - 1) + c_2(z - 1)^2 + \dots$$

Entonces

$$\frac{-(1 + \sqrt{z})z^\alpha}{z - 1} = \frac{-c_0}{z - 1} + c_1 + c_2(z - 1) + \dots$$

donde $f(z) = (1 + \sqrt{z})z^\alpha$ y así $f(1 \pm 1)e^{2k\pi ia}$.

Por lo tanto

$$\text{Res} \left(\frac{z^\alpha}{1 - \sqrt{z}}, 1 \right) = f(1 \pm 1)e^{2k\pi ia}.$$

33. Sea f una función analítica en el círculo $|z| < 1$ y suponga que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$.

i) Demuestre que $|f(z)| \leq |z|$ para $|z| < 1$.

ii) Suponga que $|f(z)| = |z|$ en al menos un punto interior del círculo.

Demuestre que $f(z) = e^{i\alpha}z$ (α real).

Solución:

i) Sea $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, entonces g es analítica para $|z| < 1$ ya que $f(0) = 0$.

Además si $|z| < 1$, entonces $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$. Por el principio de Módulo Máximo entonces $|g(z)| \leq |z|$.

ii) Demostremos que si $|f(z_0)| = |z_0|$ para un punto $|z_0| < 1$ entonces $f(z) = e^{i\alpha}z$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

En efecto si $|g(z_0)| = 1$ entonces el máximo se alcanza en un punto interior de $|z| < 1$ y por lo tanto g es constante y $|f(z)| = |c||z|$ para $|z| < 1$.

Ahora $|c| = 1$ evaluando en z_0 . Por lo tanto $c = e^{i\alpha}$ y $g(z) = e^{i\alpha}$. Así $f(z) = e^{i\alpha}z$.

33. Verdadero o Falso: ¿Existe una función analítica en $z = 0$ y que satisfice:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Si la respuesta es afirmativa, encuentre explícitamente la función. Si es negativa, justifique apropiadamente.

Solución:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{-1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sea $g(z) = f(z) - z^2$ con ceros en $z = \frac{1}{n}$. Además $g(0) = 0 - 0 = f(0) \neq 0$.

Por lo tanto $f(z) = z^2$, hace lo anterior y es analítica en $z = 0$.

$$34. \text{ Eval\~{u}e : } \int_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4 - 1} dz; \quad a > 1.$$

Soluci3n:

$$\frac{z}{(z)^4 - 1} = \frac{z}{(z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1)}$$

Entonces

$$\int_{|z-a|=a} \frac{f(z)}{z - 1} dz = 2\pi i f(1) = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

donde $f(z) = \frac{z}{z^3 + z^2 + z + 1}$ es anal\~{u}tica en $|z - a| < a$.

$$35. \text{ Eval\~{u}e : } \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z}{(z - a)^3} dz; \quad \text{si } a \text{ est\~{a} en el interior de la curva } C.$$

Soluci3n:

Tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)} dw$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^3} dw$$

$$\text{Aqu\~{i} } f''(a) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - a)^3} dw \text{ con } f(w) = we^w.$$

Entonces

$$f'(w) = e^w + we^w$$

$$f''(w) = 2e^w + we^w$$

As\~{i}

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z}{(z - a)^3} dz = \frac{2e^a + ae^a}{2} = (1 + a/2)e^a.$$

36. Calcule una expansión de la función $f(z) = \frac{1}{z-2}$ en serie de Laurent en una vecindad de $z = \infty$.

Solución:

Sea $f(z) = \frac{1}{z-2}$. La expansión en torno a $z = \infty$ es por definición, la expansión de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ en torno de $z = 0$. Así

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z}-2} = \frac{z}{1-2z} = z \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

si $|z| < \frac{1}{2}$. Haciendo $w = \frac{1}{z}$ se obtiene

$$f(w) = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{w^{n+1}}$$

si $|w| > 2$ que es la expresión pedida.

37. Calcule una expansión de la función $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, donde $0 < |a| < |b|$, en serie de Laurent en una vecindad de:

i) $z = 0$.

ii) $z = a$.

Solución:

i) En $z = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{(a-z)(b-z)} \\
&= \frac{1}{(b-a)} \left(\frac{1}{(a-z)} - \frac{1}{(b-z)} \right) \\
&= \frac{1}{(b-a)} \left(\frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{a}} \right) - \frac{1}{b} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{b}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{(b-a)} \left(\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^n} - \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n} \right) \\
&= \frac{1}{(b-a)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{a^{n+1}} - \frac{z^n}{b^{n+1}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{(b-a)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(b^{n+1} - a^{n+1})}{(a^{n+1}b^{n+1})} \right)
\end{aligned}$$

para $|z| < |a|$.

ii) En $z = a$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{(a-z)(b-z)} \\
&= \frac{1}{(a-z)(b-a+a-z)} \\
&= \frac{1}{(a-z)} \frac{1}{(b-a)(1+\frac{a-z}{b-a})} \\
&= \frac{1}{(a-z)(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a-z)^n}{(b-a)^n} \\
&= \frac{1}{(a-b)} \left(\frac{1}{(z-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^n} \right) \\
&= \frac{1}{(a-b)} \left(\frac{1}{(z-a)} \left(1 + \frac{(z-a)}{(b-a)} + \frac{(z-a)^2}{(b-a)^2} + \dots \right) \right) \\
&= \frac{1}{(a-b)} \left(\frac{1}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+a}} \right)
\end{aligned}$$

si $|z - a| < |b - a|$.

38. Encuentre y clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{z^7}{(z^2 - 4)^2 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}.$$

Solución:

$$\frac{z^7}{(z-2)^2(z+2)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = \frac{z^7}{(z-2)^2(z+2)^2\left(1 + \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \dots\right)}$$

Por lo tanto $z = -2$ es polo de orden 2 y $z = 2$ es singularidad esencial.

39. Encuentre y clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right).$$

Solución:

Si $\sin\frac{1}{z} = 0$ entonces $\frac{e^{1/z} - e^{-1/z}}{2i} = 0$ y si $e^{2i/z} = 1$ entonces $z = \frac{1}{k\pi}$.

Por lo tanto $z_k = \frac{1}{k\pi}$ son todas las singularidades de $f(z)$.

40. Sea f una función analítica en el círculo $|z| < 1$ y suponga que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$. Demuestre que $|f(z)| \leq |z|$ para $|z| < 1$. (Comentario: El resultado se conoce como Lema de Schwarz).

Solución:

Sea $g(z) = \frac{f(z)}{z}$; entonces g es analítica aún en $z = 0$ pues $f(0) = 0$.

Por el principio del módulo máximo tenemos

$$\text{Sup}_{|z|<1} |g(z)| = \text{Sup}_{|z|=1} |g(z)| = \text{Sup}_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} = \text{Sup}|f(z)|$$

Ya que $|f(z)| \leq 1$ se obtiene $\text{Sup}_{|z|<1} |g(z)| \leq 1$.

Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para $|z| < 1$.

41. Expandir la función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ en serie de Laurent en torno

a:

(i) El punto $z_0 = 0$.

(ii) El punto $z_0 = 1$.

Solución:

i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{-1} \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\
&= \frac{1}{z} - 1 + (1-z) - (1-z)^2 + \dots
\end{aligned}$$

42. Halle y clasifique las singularidades de las siguientes funciones.

Justifique su respuesta.

(i) $\frac{1}{z - z^3}$.

(ii) $\frac{1}{e^z - 1}$.

Solución:

i) $\frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z(1 - z^2)}$ tiene 3 singularidades; $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$.

$z = 0$ es polo de orden 1 pues si $|z| < 1$ tenemos

$$\frac{1}{z(1 - z^2)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{z} (1 + z^2 + z^4 + \dots) = \frac{1}{z} + z + z^3 + \dots$$

$z = 1$ es polo de orden 1 pues

$$\frac{1}{z(1 - z^2)} = \frac{1}{(1 - z)(z(1 + z))} = \frac{g(z)}{(1 - z)}$$

donde $g(z) = \frac{1}{z(1 + z)}$ es analítica en $z = 1$.

Entonces

$$\frac{1}{z(1 - z^2)} = \frac{1}{1 - z} (a_0 + a_1(1 - z) + a_2(1 - z)^2) + \dots = \frac{a_0}{1 - z} + a_1 + a_2 + \dots$$

$z = -1$ es polo de orden 1, se prueba de manera análoga.

ii) $z = 0$ y $e^z = 1$ son las singularidades, esto es $z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora veamos de que tipo son

• $z = 0$: Sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots) - 1} \\ &= \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{z(1 + \frac{z}{2!} + \dots)} \\ &= \frac{g(z)}{z} \end{aligned}$$

donde $g(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \dots}$ es analítica en $z = 0$.

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{z}(a_0 + a_1z + a_2z^2) + \dots = \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2z + \dots$$

luego

$$-\frac{1}{z} + \frac{1}{e^z - 1} = \frac{-1}{z} + \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2z + \dots$$

donde $a_0 = g(0) = 1$. Por lo tanto $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = a_1 + a_2z + \dots$

Así $z = 0$ es singularidad reparable.

• $z = 2k\pi i$:

tenemos que

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 2k\pi i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - 2k\pi i)^n \\ &= 1 + (z - 2k\pi i) + \frac{(z - 2k\pi i)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Entonces

$$e^z - 1 = (z - 2k\pi i) \left(1 + \frac{(z - 2k\pi i)}{1!} + \dots \right)$$

de aquí tenemos

$$\frac{1}{(e^z - 1)} = \frac{h(z)}{(z - 2k\pi i)}$$

donde $h(z) = \frac{1}{1 + \frac{(z - 2k\pi i)}{2!} + \dots}$ es analítica en $z = 2k\pi i$.

Así $z = 2k\pi i$ es un polo de orden 1 de $\frac{1}{e^z - 1}$ y también de $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$.

43. Evaluar:

$$\int_{|z|=3} \frac{z}{\sin(z)(1 - \cos(z))} dz.$$

Solución:

Vemos que las singularidades son $z = 0$, $z = \pi$, $z = -\pi$ y además

$$\text{Res}(f, 0) = 0$$

$$\text{Res}(f, \pi) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\text{Res}(f, -\pi) = \frac{\pi}{2}$$

Así tenemos que

$$\int_{|z|=5} \frac{z}{\sin(z)(1 - \cos(z))} dz = 2\pi i(0) = 0.$$

44. Determine el número de raíces de la función

$$f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2,$$

en el interior del círculo $|z| < 1$.

Solución:

Consideremos $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 2$ y $g(z) = -8z$.

Entonces $|f(z)| \leq 6 < 8 = |g(z)|$ en $|z| = 1$.

Por lo tanto tiene una sola raíz.

45. Supongamos que f es analítica en $\mathbb{D}(0, 2) \setminus \{0\}$ y que para cada número natural $n \geq 0$ se cumple que

$$\int_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0.$$

Demuestre que en tal caso $z = 0$ es una singularidad reparable de f .

Solución:

$$b_n = \int_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0$$

Por lo tanto f tiene una singularidad reparable en $z = 0$, pues $f(z) = b_0 + b_1 z + \dots$

46. Halle los residuos de la función $f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)}$ con respecto a todos sus puntos singulares.

Solución:

Vemos que los puntos singulares son $z = 0$ polo de orden 2 y $z = 1$ polo de orden 1.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + z - 1}{z^2} = 1 \\ \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2 + z - 1}{z - 1} \right) = 0.\end{aligned}$$

47. Halle $\operatorname{Res}(f \circ \phi, a)$ si ϕ es analítica en $z = a$, $\phi'(a) \neq 0$, y f tiene un polo simple en $w = \phi(a)$ con residuo A .

Solución:

Tenemos lo siguiente

$$f(w) = \frac{A}{w - \phi(a)} + a_0 + a_1(w - \phi(a)) + \dots$$

Entonces

$$f(\phi(z)) = \frac{A}{\phi(z) - \phi(a)} + a_0 + a_1(\phi(z) - \phi(a)) + \dots$$

donde $\phi(z) = \phi(a) + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \dots$ con $b_1 = \phi'(a) \neq 0$.

Así

$$(f \circ \phi)(z) = \frac{A}{b_1(z - a)(1 + \frac{b_2}{b_1}(z - a) + \dots)} = \frac{A}{\phi'(a)(z - a)} + \dots$$

entonces

$$\operatorname{Res}(f \circ \phi, a) = \frac{A}{\phi'(a)}.$$

48. Evalúe

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz.$$

Solución:

Sabemos que $\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \dots$

Entonces

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \dots$$

luego

$$\operatorname{Res} \left(\sin \frac{1}{z}, 0 \right) = 1.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin \frac{1}{z} dz = 1.$$

49. Evalúe

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z^n e^{2/z} dz$$

siempre que $n \geq -1$.

Solución:

$$\begin{aligned} e^w &= 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \dots \\ e^{2/z} &= 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2!z^2} + \dots \\ z^n e^{2/z} &= z^n + 2z^{n-1} + \frac{2^2 z^{n-2}}{2!} + \dots + \frac{2^k z^{n-k}}{k!} + \dots \end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{Res}(z^n e^{2/z}, 0) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

50. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}.$$

Solución:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{(a + \frac{z+\bar{z}}{2})iz} dz = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz$$

Observamos que $z^2 + 2az + 1 = (z + a + \sqrt{a^2 - 1})(z + a - \sqrt{a^2 - 1})$.

Así

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta &= \frac{4\pi}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{(z + a + \sqrt{a^2 - 1})(z + a - \sqrt{a^2 - 1})} dz \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

51. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Solución:

Sea $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2}$ en donde $z^2 + 2z + 2 = 0$ si y sólo si $z = -1 + i$ y $z = -1 - i$, luego consideramos $\gamma = C_R \cup [-R, R]$.

Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx$$

Notar que $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$ por Lema de Jordan. Por otra parte

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1 + i) = \pi(-1 + i)e^{-1-i}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx = \pi(-1 - i)e^{-1-i}$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi}{e} (\cos 1 + \sin 1).$$

52. Evaluar $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2 - 9)} dz.$

Solución:

Vemos que $z = 0$ es polo de orden 2, $z = \pm 3$ son polos de orden 1 y $z^2 - 9 = (z - 3)(z + 3)$ que no están en el interior de $|z| = 1$. Luego

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2 - 9)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2 e^z}{z^2(z^2 - 9)} \right) = \frac{-2\pi i}{9}$$

53. Evaluar $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$ donde $a > 1$. Ayuda: Hacer $z = e^{it}$.

Solución:

Sea $z = e^{it}$ entonces $2 \cos t = e^{it} + e^{-it} = z + \frac{1}{z}$, entonces $\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ y como $dz = ie^{it} dt$ entonces $dt = \frac{1}{iz} dz$.

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \frac{2}{i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(2a + z + \frac{1}{z})} dz = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz$$

Como $z^2 + 2az + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ donde $a^2 - 1 > 0$ observamos que sólo $-a + \sqrt{a^2 - 1}$ está en el interior de $|z| = 1$.

Luego

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz &= \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

54. Evaluar $\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

Solución:

Vemos que las singularidades son polos simples en $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4}$, $z_4 = e^{i7\pi/4}$. Consideremos la curva $\gamma = C_R \cup [-R, R]$, entonces tenemos

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx$$

donde

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i\pi/4}) + 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{3\pi i/4}) = \pi\sqrt{2}$$

y por Lema de Jordan

$$\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \pi\sqrt{2}$$

Como el argumento es una función par entonces podemos escribir

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

55. Halle el número de raíces de la ecuación $z^4 - 8z + 10 = 0$ que se encuentran en el anillo $1 < |z| < 3$.

Solución:

a) $f(z) + g(z) = z^4 - 8z + 10$ con $f(z) = z^4 - 8z$ y $g(z) = 10$, entonces $|f(z)| \leq 9 < 10 = |g(z)|$ en $|z| = 1$. Por lo tanto no tiene raíces en $|z| < 1$.

b) $f(z) + g(z) = z^4 - 8z + 10$ con $f(z) = -8z + 10$ y $g(z) = z^4$, entonces $|f(z)| \leq 8|z| + 10 = 34 < 3^4 = |g(z)|$ en $|z| = 3$. Por lo tanto tiene 4 raíces en $|z| < 3$.

De lo anterior vemos que $z^4 - 8z + 10$ tiene 4 raíces en $1 < |z| < 3$.

56. Sea f una función analítica en el semiplano superior $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ y tendiente a cero cuando $z \rightarrow \infty$ para z perteneciente a \mathbb{H}^+ . Demuestre que para cada $z = x + iy \in \mathbb{H}^+$ se tiene

$$f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Ayuda: Demuestre que

$$f(z) = \frac{1}{1\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-z)} dx$$

y que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-\bar{z})} dx.$$

Solución:

Por fórmula de Cauchy en el camino $\gamma(t) = t$ con $-\infty < t < \infty$ se

tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = f(z) \text{ si } z \in \mathbb{H}^+ \text{ si } z \in \mathbb{H}^+$$

Y notamos que

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-z)} dx$$

A fin de ver lo pedido, restamos y obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-inf ty}^{\infty} \left(\frac{1}{(t-z)} - \frac{1}{(t-\bar{z})} \right) f(t) dt$$

donde

$$\left(\frac{1}{(t-z)} - \frac{1}{(t-\bar{z})} \right) = \frac{z-\bar{z}}{t^2 - t\bar{z} - tz + |z|^2} = \frac{2iy}{t^2 - 2tx + x^2 + y^2}$$

con $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$. Por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Luego si $u(z) = \text{Re } f(z)$, esto es, $u(x, y) = \text{Re } f(x, y)$ entonces $f(t) = f(t, 0) = u(t, 0)$. Así

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} u(t, 0) dt$$

Además $u(x, y) \rightarrow 0$ cuando $(x, y) \rightarrow \infty$.

57. Evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0.$$

Solución:

Usamos que $f(z) = \frac{e^iz}{z^2 + a^2}$ y las singularidades son $z = \pm ia$ donde sólo $ia \in \Omega$ (Ω semicircunferencia de radio a sobre el eje real).

Por lo tanto

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{(z - ia)ez}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

y por el otro lado

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + a^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} dz$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

58. Sea w una raíz n -ésima de la unidad (i.e. $w^n = 1$ y $w^j \neq 1$, $j = 1, 2, \dots, (n - 1)$).

i) Encuentre $\sum_{j=0}^{n-1} w^j$.

ii) Encuentre $\sum_{j=0}^{n-1} (j + 1)w^j$.

Solución

i)

$$\sum_{j=0}^{n-1} w^j = 1 + w + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0$$

ya que $w \neq 1$ y $w^n = 1$.

ii)

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j + 1)w^j = 1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1}$$

Notar que $(1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1})(1 - w) = 1 + w + \dots + w^{n-1} + nw^n$.

Luego

$$1 + 2w + \dots + nw^{n-1} = \frac{(1 + w + \dots + w^{n-1}) + nw^n}{1 - w} = \frac{0 + nw^n}{1 - w} = \frac{n}{1 - w}.$$

59. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ definida por $f(z) = \frac{z}{1 + |z|}$, donde $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$.

i) Encuentre $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

ii) Encuentre $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Solución:

i)

$$f(z) = \frac{z}{1 + \sqrt{z\bar{z}}}$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{-z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(|z|)}{(1 + |z|)^2}$$

Ahora

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

entonces

$$2|z| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(|z|) = z$$

así

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(|z|) = \frac{z}{2|z|}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\frac{-z^2}{2|z|}}{(1 + |z|)^2} = \frac{-z^2}{2|z|(1 + |z|)^2}.$$

ii)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1(1 + |z|) - z \frac{\partial}{\partial z}(|z|)}{(1 + |z|)^2}$$

pero

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

entonces

$$2|z| \frac{\partial}{\partial z}(|z|) = \bar{z}$$

así

$$\frac{\partial}{\partial z}(|z|) = \frac{\bar{z}}{2|z|}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2 + |z|}{2(1 + |z|)^2}.$$

60. Encuentre los valores de z para los cuales es convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$$

Solución:

Sea $w = \frac{z}{1+z}$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

que converge sólo si $|w| < 1$. Luego la serie pedida converge sólo si

$$\left| \frac{z}{z+1} \right| < 1.$$

61. Si $|z| = 1$, demuestre que $\left| \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \right| = 1$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

Solución

Como $|z| = 1$, entonces $z\bar{z} = 1$ y $z = (\bar{z})^{-1}$. Luego

$$\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} = \frac{az + b}{(\bar{b} + \bar{z}a)z}$$

así tendremos

$$\left| \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right| = \left| \frac{az + b}{\bar{a}z + \bar{b}} \right| \frac{1}{|z|} = \left| \frac{az + b}{\bar{a}z + \bar{b}} \right| = \frac{|az + b|}{|\bar{a}z + \bar{b}|} = \frac{|az + b|}{|az + b|} = 1.$$

62. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dos curvas cerradas de clase C^1 y $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_0(t)|$$

para cada $t \in [0, 1]$. Demuestre que $Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z)$.

Ayuda: Considere la curva

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z}$$

con $t \in [0, 1]$ y compruebe que la trayectoria está contenida en $\mathbb{D}(1, 1) := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$.

Solución:

Notemos que $z \notin \text{Traza}(\gamma_0) \cup \text{Traza}(\gamma_1)$, por lo tanto $Ind_{\gamma_0}(z)$ y $Ind_{\gamma_1}(z)$ están bien definidos. También vemos que γt es de clase C^1 y cerrada pues $\gamma(1) = \gamma(0)$.

Observemos que

$$|\gamma(t) - 1| = \left| \frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z} - 1 \right| = \frac{|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)|}{|\gamma_0(t) - z|} < 1$$

luego $\text{Traza}(\gamma) \subseteq \mathbb{D}(1, 1)$ y por propiedades de $\tilde{\Delta}$ Índice concluimos que $\text{Ind}_\gamma(0) = 0$.

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)(\gamma_0(t) - z) - \gamma_0'(t)(\gamma_1(t) - z)}{(\gamma_1(t) - z)(\gamma_0(t) - z)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z} dt \\ &= \text{Ind}_{\gamma_1(z)} - \text{Ind}_{\gamma_0(z)}. \end{aligned}$$

63. Sea γ la frontera del cuadrado encerrado por las cuatro rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$. Calcule:

i) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2 + 8} dz.$

ii) $\int_\gamma \frac{z}{2z + 1} dz.$

iii) $\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4} dz.$

Solución:

i) Vemos que $\frac{\cos z}{z^2 + 8}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$, por lo tanto es holomorfa en Ω , y así $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2 + 8} dz = 0$ por el Teorema de Cauchy.

ii) Vemos que $\frac{z}{2z + 1}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{-1/2\}$, luego por la fórmula integral de Cauchy tenemos

$$\int_\gamma \frac{z}{2z + 1} dz = \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{z}{z + \frac{1}{2}} dz = \frac{-\pi i}{2}.$$

iii) Usando la fórmula integral de Cauchy para la tercera derivada tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{\partial^3(\cosh z)}{\partial z^3} = \frac{\pi i}{3} \sinh(0) = 0.$$

64. Sea f analítica. Suponga que $Re f$ es constante. Demuestre que f es constante.

Solución:

$f = u + iv$ y por definición u es constante.

Si f es analítica entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Por lo tanto $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Así v es constante y entonces f es constante.

65. Evaluar $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$.

i) en el semicírculo $|z| = 1$, $y \geq 1$, $\sqrt{1} = 1$.

ii) en el semicírculo $|z| = 1$, $y \leq -1$, $\sqrt{1} = -1$.

Solución:

i) $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$, entonces

$$\int_0^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it/2}} dt = i \int_0^{\pi} e^{it/2} dt = 2(e^{i\pi/2} - 1) = -2(1 - i)$$

ii) $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$, entonces

$$\int_0^\pi \frac{ie^{it}}{e^{it/2}e^{i\pi}} dt = \frac{i}{e^{i\pi}} \int_0^\pi e^{it/2} = (-1)2(i-1) = 2(1-i).$$

66. Evaluar $\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ si:

i) El punto $z = 0$ está en el interior y el punto $z = 1$ está en el exterior de la curva γ .

ii) El punto $z = 1$ está en el interior y el punto $z = 0$ está en el exterior de la curva γ .

iii) Los puntos $z = 0$ y $z = 1$ están en el interior de la curva γ .

Solución:

i)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} f(z) dz = f(0) = 1$$

$$\text{con } f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}.$$

ii)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z-1)^3} f(z) dz = \frac{1}{2} f''(1) = \frac{-e}{2}$$

$$\text{con } f(z) = \frac{-e^z}{z}.$$

iii)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{-e^z}{z(z-1)^3} dz = \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1)$$

donde

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-e^z}{(z-1)^3} = 1$$

y

$$\operatorname{Res}(f, 1) = -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left((z-1)^3 \frac{e^{-z}}{z(z-1)^3} \right) = \frac{-e}{2}$$

Así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = 1 - \frac{e}{2}.$$

67. Sea f analítica en \mathbb{D} . Suponga que $|f(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$.

Demuestre que $|f'(0)| \leq 1$.

Obs. $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Solución:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

con $\gamma(t) = re^{it}$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

Entonces

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^2 e^{2it}} r i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r e^{it}} dt$$

Luego

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})|}{r} dt \leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{r}$$

para todo $r < 1$.

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ cuando $r \rightarrow 1^-$.

68. Suponga que f es entera y que existen $M > 0$, $R > 0$, $n \geq 1$ tales que

$$|f(z)| \leq M|z|^n,$$

para $|z| > R$. Demuestre que f es un polinomio de grado $\leq n$.

Solución:

Como $f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ y

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(0)| &\leq \frac{k!M(r)}{r^k} \\ &\leq k!Mr^{n-k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $(n - k) \leq 0$ y donde $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq Mr^n$ para $r > R$.

Por lo tanto f es un polinomio de grado a lo mas n .

69. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existe constante positiva M tal que

$$|f(z)| \leq M|z|^{1/2}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es constante.

Solución:

Sea $0 < r$.

Si $|z| \leq r$, entonces $|f(z)| \leq Mr^{1/2}$.

Luego por la Desigualdad de Cauchy

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r)$$

con $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq Mr^{1/2}$.

Entonces

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^{n-1/2}} \rightarrow 0$$

para todo $n \geq 1$.

Así $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$, por lo tanto f es constante.

6.2. Ejercicios propuestos

1. Resuelva la ecuación:

$$\bar{z} = z^{n-1}$$

donde $n \neq 2$ es un número natural.

2. Demuestre la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq | \arg(z) |.$$

ayuda: Use el hecho que: $1 - \cos\theta \leq \theta^2/2$.

3. Demuestre que:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

4. Hallar todas las soluciones de $(z - i)^3 = -1$.

5. Hallar $(1 + i)^{12}$.

6. Determinar la imagen de la banda $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < 1\}$ bajo la transformación

$$f(z) = \frac{i}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z = x + iy,$$

representando geométricamente tanto la banda como la imagen.

7. Hallar una transformación de Möbius que transforme la circunferencia $|z| = 1$ en la recta $Im(z) = 0$.

8. Hallar la imagen de la recta $x + y = 1$ mediante la transformación de Möbius

$$w = \frac{z + 1}{z - 1}.$$

9. Hallar las partes real e imaginaria de z^z .

10. Demostrar que

$$|Im(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$$

si $|z| < 1$.

11. Demostrar que si $z \neq 1$ es una raíz n -ésima de la unidad, entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0.$$

12. Determinar la imagen del cuadrante $x > 1$, $y > 0$ por la inversión

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z = x + iy.$$

13. Determinéense todos los polinomios armónicos de la forma

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calcule una función $v(x, y)$ para la que la función $f(z)$ definida por

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$$

sea analítica en \mathbb{C} .

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto del eje real. Demostrar que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica si y sólo si la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ es analítica.

15. Expresar la función inversa $w = \operatorname{sen}^{-1}(z)$ por medio de un logaritmo.

16. Hallar la imagen del triángulo rectángulo $-x < y < x ; 0 < x < 1$ mediante la transformación $w = z^2$.

17. Hallar una transformación de Möbius que deje 1 e i fijos y lleve 0 a -1 .

18. Sea u una función armónica. Una función v tal que $f = u + iv$ es analítica se llama función armónica conjugada de u . Halle una función armónica conjugada de $u(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

19. Hallar las partes real e imaginaria de z^z .

20. Halle la imagen del círculo $|z| = 1$ bajo la transformación $T(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Solución:

Podemos escribir:

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$$

Así tendremos

$$T(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{(1 - e^{i\theta})^2} = \frac{e^{i\theta}}{(1 - 2e^{i\theta} + e^{2i\theta})} = \frac{1}{2(\cos(\theta) - 1)} < 0$$

con

$$\frac{1}{2(\cos(\theta) - 1)} \in \mathbb{R}.$$

21. Explique por qué la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ de la función real

$\frac{1}{1+x^2}$ converge para $|x| < 1$, pero diverge para $x = 1$, aún cuando $\frac{1}{1+x^2}$ es infinitamente derivable para todo valor de x .

22. Hallar la imagen de la circunferencia $|z-1| = 1$ mediante la inversión.

23. Determinar la imagen de la banda $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < 1\}$ bajo la transformación

$$f(z) = \frac{i}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z = x + iy,$$

representando tanto la banda como la imagen.

24. Hallar una transformación de Möbius que transforme la circunferencia $|z| = 1$ en la recta $\text{Im}(z) = 0$.

25. Demuestre que la función

$$f(z) = ze^{\bar{z}},$$

no es analítica.

26. Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, demuestre que la función

$$f(z) = ze^{\bar{z}},$$

no es analítica.

27. Sea $f(z) = x^2 + iy^2$. Determine donde $f'(z)$ existe y halle su valor.

28. Demuéstre que la función $u(x, y) = \cosh y \sin x$ es armónica en el plano y construya otra función armónica $v(x, y)$ para la que

$$f(z) := u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

sea analítica en \mathbb{C} .

29. Calcule $\int_{\gamma} (x - y + iy^2) dz$ si γ es el segmento de recta que une 0 a $1 + i$.

30. Justifique porque $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ puede definirse de modo que sea analítica en cualquier dominio simplemente conexo dado, que no contenga los puntos $z = 1$ y $z = -1$.

31. Calcule $\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z - 1} dz$ donde γ es el rectángulo limitado por $x = 0$, $x = 3$, $y = -1$ e $y = 1$.

32. Calcule $\int_{\gamma} \frac{z + 1}{(z - 1)^3(z - 4)} dz$, donde γ es el círculo de centro 0 y radio 2.

33. a) Encuentre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

sea una función armónica.

b) Encuentre una función $v(x, y)$ tal que la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

sea analítica en cada punto de \mathbb{C} .

34. Sea Ω un abierto simétrico con respecto del eje real. Demuestre que f es analítica en Ω si y sólo si la función g definida como

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})},$$

es analítica en Ω .

35. Determine el conjunto de todos los puntos del plano donde cada una de las siguientes funciones es analítica, calculando además las derivadas en esos puntos.

a) $a(z) = z^2\bar{z}$.

b) $b(z) = |z|Re\bar{z}$.

c) $c(z) = \bar{z}^2z$.

d) $d(z) = \bar{z}Rez$.

36. Aplicando la definición de derivada, demuestre que, si $f(z) = Re(z)$, entonces $f'(z)$ no existe en ningún punto.

37. Demuestre que $\operatorname{arcsen}(z) = -i \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$, y encuentre una expresión análoga para $\operatorname{arccos}(z)$.

38. Sea $a < b$. Determinar la imagen del rectángulo

$$Q := [a, b] \times [-\pi, \pi]$$

bajo la acción de la función exponencial.

39. Resuelva la ecuación $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

40. Calcule $(1 - i)^{4i}$.

41. Demuestre que $\ln(1 + i)^2 = 2\ln(1 + i)$.

42. Determine el desarrollo en serie de potencias (Taylor) centrado en cero de la función

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z)^n}, \quad |z| < 1,$$

donde $n \geq 1$ es un número natural arbitrario.

43. Suponiendo que $R > 0$ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, determinar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$.

Donde $k \geq 1$ es un número natural.

44. Demuestre que existe una única función $u(z)$ definida por una serie

$$u(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con radio de convergencia positivo tal que $u(0) = 2$ y, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$u'(z) = u(z) - 1.$$

45. Demuestre que

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 \sinh z} = \frac{-1}{3} \pi i.$$

46. Si f entera y $\frac{|f(z)|}{1 + |z|^k} \leq M$ para cierto k . Entonces f es un polinomio de grado a lo más k .

47. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z \in \Omega$, $R > 0$ tal que $\overline{D}_R(z) \subset \Omega$ y f analítica. Demuestre que para cada número natural $n \geq 0$ se verifica la siguiente identidad:

$$\int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = \frac{1}{n!} \int_{|w-z|=R} \frac{f^{(n)}(w)}{w-z} dw.$$

48. Clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)(z - 2)^3}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}.$$

49. Sea Ω abierto conexo y f analítica no constante y sin ceros en Ω . Demuestre que $|f|$ no tiene mínimos locales en (el interior de) Ω .

50. Calcule el número de raíces del polinomio $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ en el disco $|z| < 1$.

51. Calcule el valor de la integral

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz.$$

52. Sea Ω un abierto conexo y f analítica en Ω tal que

$$f(\Omega) \subset \Omega \text{ y } f(z) = f(f(z))$$

para cada $z \in \Omega$. Demuestre que para cada $z \in \Omega$ se cumple

$$f(z) = z$$

a menos que f sea constante.

53. Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Suponga que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para cada $z \in \Omega$. Demuestre que ya sea $f(z_0) = 0$ o bien f es constante.

54. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera y no constante. Demuestre que $f(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C} .

55. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existen constantes positivas A, B y k tales que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es un polinomio.

56. Clasifique todas las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)(z - 2)^2}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}.$$

En particular, determine el dominio donde f es holomorfa.

57. Sea f analítica en $\mathbb{D}(0, 1)$. Suponga que $|f(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$. Demuestre que $|f'(0)| \leq 1$.

58. Calcule $\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz$; $\gamma(t) = re^{it}$; $0 \leq t \leq 2\pi$ para cada valor posible de r en los siguientes casos:

a) $0 < r < 2$;

b) $2 < r < \infty$.

59. Halle y clasifique los puntos singulares de la función $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}$.

60. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{i\theta}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Hallar $\int_{\gamma} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$; $n \geq 1$.

61. Calcule $\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz$; $\gamma(t) = re^{it}$; $0 \leq t \leq 2\pi$ para cada valor posible de r : $0 < r < 2$; $2 < r < \infty$.

62. (2 puntos) Sea γ el camino $[1, i]$ y σ el camino $[1, 1 + i, i]$. Calcule $\int_{\gamma} f$ y $\int_{\sigma} f$ con $f(z) = |z|^2$.

63. Sean $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $g(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$. Observe que ambas series de potencia no tienen dominio de convergencia en común.

Sin embargo:

Demuestre que la función $g(z)$ es continuación analítica de la función $f(z)$.

64. Sea f analítica en un dominio acotado por una curva cerrada simple C que contiene al origen. Demuestre que para cualquier elección de la rama de $\text{Ln}(z)$ se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f'(z) \text{Ln}(z) dz = f(z_0) - f(0),$$

donde z_0 es el punto de partida de la integración.

65. Determine el desarrollo en serie de potencias (Taylor) centrado en cero de la función

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^n}, \quad |z| < 1,$$

donde $n \geq 1$ es un número natural arbitrario.

66. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx = e^{1/4} \sqrt{\pi}$.

Sugerencia: Recuerde que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ y considere el camino de la figura siguiente

67. Escriba el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

en la región $0 < |z-1| < 2$.

68. Si f entera y $\frac{|f(z)|}{1+|z|^k} \leq M$ para cierto k . Entonces f es un polinomio de grado a lo más k .

69. Encuentre el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$g(z) = \frac{1}{z(z+R)}$$

en $0 < |z| < R$.

70. Determinar y clasificar todas las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)(z - 2)^3}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}.$$

71. Calcule $\int_{|z|=6} \frac{dz}{1 - \cos z}$.

72. Calcule $\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{1 - \cos z}, 0\right)$.

73. Calcule la integral:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz.$$

74. Evalúe $\int_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$.

75. Evalúe $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$.

76. Sea C una elipse con ecuación $9x^2 + y^2 = 9$ orientada positivamente.

Calcule

$$\int_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\pi/z} \right) dz.$$

77. Suponga que f es una función analítica en todo punto de \mathbb{C} . Demuestre que

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r),$$

para cada $r > 0$, donde $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

78. Sea f analítica en un abierto Ω . Sea $z_0 \in \Omega$ y suponga que existe $r > 0$ tal que $\{z : |z - z_0| < r\} \subset \Omega$. Demuestre que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

79. Demuestre que $\arcsen(z) = -i \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$, y encuentre una expresión análoga para $\arccos(z)$.

80. Resuelva la ecuación $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

81. Calcule $(1 - i)^{4i}$.

82. Demuestre que $\ln(1 + i)^2 = 2\ln(1 + i)$.

83. Sea f analítica en todo punto de \mathbb{C} y acotada, esto es: existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| < M \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demuestre que f es constante. (Ayuda: Use el problema 1).

84. Sea f analítica en un abierto Ω . Sea $z_0 \in \Omega$ y suponga que existe $r > 0$ tal que $\{z : |z - z_0| < r\} \subset \Omega$. Demuestre que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

85. Determinar y clasificar todas las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)(z - 2)^3}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}.$$

86. Calcule $\int_{|z|=6} \frac{dz}{1 - \cos z}$.

87. Demuestre que todas las raíces de $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ están entre los círculos $|z| = 1$ y $|z| = 2$.

88. Evalúe $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$.

89. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(1+x^2)} dx = \pi \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Sugerencia: Calcule $\int_C \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)} dz$ en un camino apropiado.

90. Verdadero o Falso: ¿Existe una función analítica en $z = 0$ y que toma los siguientes valores en los puntos $z = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$.

i) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots, 0, \frac{1}{2k}, \dots$;

ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \dots$?

91. Calcule $\int_{\gamma} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-4)} dz$, donde γ es el círculo de centro 0 y radio 2.

92. Sea $y > 0$. Demuestre que para cada $x \geq 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx}}{s^2 + t^2} ds = \frac{\pi}{t} e^{-tx}.$$

93. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a > 0$ y $b > 0$. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2 \operatorname{sen}(ax)}{x^2 + b^2} dx = \pi(e^{-ab} - \frac{1}{2}).$$

94. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{3}.$$

95. Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

96. Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\operatorname{sen}(\theta))^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

97. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \quad m > 0.$$

98. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)} dx = \frac{\pi}{2\cos(\pi a/2)}, \quad \text{donde } |a| < 1.$$

99. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua, y holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Demuestre que f es analítica en \mathbb{C} (esto es, entera).

Ayuda: Use el teorema de Morera.

100. Calcule la integral:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz.$$

101. Encuentre el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$g(z) = \frac{1}{z(z + R)}$$

en $0 < |z| < R$.

102. Calcule

$$\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(z)} dz.$$

103. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

Ayuda: Considere la integral como una integral de línea en la circunferencia $|z| = 1$, aplicando luego el teorema de residuos.

104. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^4 + 4} dx, \quad a > 0.$$

105. Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3} dx.$$

Ayuda: Calcule la integral de $\frac{z^\alpha}{(1+z)^3}$ para $0 < \alpha < 1$ en un contorno adecuado, para obtener el valor de $\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)^3} dx$. Luego, derive con respecto a α y tome el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$.

106. Sea Ω una región acotada del plano complejo con frontera γ orientada positivamente y suponga que $f(z)$ es una función analítica en Ω excepto por polos simples en a_1, a_2, \dots, a_n . Sea $g(z)$ una función analítica en Ω . Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)g(z)dz = \sum_{k=1}^n g(a_k) \operatorname{Res}(f; a_k).$$

107. Evaluar

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta.$$

108. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

Ayuda: Ponga $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ y considere la integral como una integral de línea en la circunferencia $|z| = 1$. Use que $\sin(\theta) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ y $d\theta = \frac{1}{iz} dz$, aplicando luego el teorema de residuos.