Matemática en la Salud

Verónica Poblete Oviedo

Contenidos

Capítulo 1

Introducción

El enfoque matemático ha funcionado maravillosamente bien para la física, pero ¿qué hay de la biología? La matemática es la ciencia de la estructura y las pautas, en los últimos siglos se han descubierto modos en los que esta ciencia informa sobre la estructura profunda de la vida.

En el año 1917, en Inglaterra, se publica el libro "Sobre el Crecimiento y la Forma" del autor D'Arcy Wentworth Thompson, un experto zoólogo con un importante gusto por la matemática, quién postula:

El mundo orgánico es tan matemático como el mundo inorgánico, la base matemática de los seres vivos, sin embargo, es más sutil, más flexible y esta profundamente oculta.

Si bien dicho texto está bien considerado en muchos círculos, nunca lo ha estado en la corriente principal de la biología, esto debido a que las historias matemáticas no encajaban cuando se contrastaba con la evidencia directa de los laboratorios. Sin embargo, es posible mencionar diversas situaciones en este ámbito. Por ejemplo, para las criaturas vivas, el punto de partida es la célula: una minúscula mota de protoplasma contenida dentro de una delgada membrana, pero de una estructura especializada y compleja. Una célula puede dividirse en dos, formando cada mitad una nueva célula completa capaz de reproducirse de nuevo y así indefinidamente. "Las células se multiplican dividiéndose" ¿Suena a matemática? La forma de una célula antes, durante y después de la reproducción es matemática: un círculo, un corte transversal, en el círculo aparece una cintura que se estrecha, se estrangula en una figura en forma de ocho y se rompe para crear dos círculos.

Otro ejemplo, es la naturaleza matemática del reino vegetal. La notable geometría y numerología de las plantas, la disposición de sus hojas a lo largo del tallo, las figuras espirales formadas en las semillas y el número de pétalos.

Mencionemos también, en nuestro organismo, la molécula de hemoglobina, que recoge el oxígeno de los pulmones, lo lleva al torrente sanguíneo y lo libera donde es necesario.

Esta función, depende de la forma precisa de la molécula, de su geometría tridimensional. La forma es una consecuencia de leyes de la física y la química que se expresan a través de la matemática. El lector puede encontrar una visión más extensa de variadas relaciones biológica-matemática en [9].

En este texto, estamos interesados en mostrar aplicaciones simples de matemática elemental en diversas áreas de las ciencias naturales, en especial está dirigido a estudiantes en el área de la salud y la biología. En un curso tradicional de cálculo, los estudiantes de estas áreas no ven claramente porqué el contenido es relevante en su educación, trataremos de mostrarles como el cálculo puede ayudar a entender fenómenos de la naturaleza.

Aquí nuestro objetivo es doble. Primero, proporcionar herramientas teóricas de matemática elemental, conceptos abstractos tratados con lenguaje simple que permitan al lector un fácil manejo del cálculo. Segundo, aplicar los recursos anteriores para resolver problemas cotidianos, modelar algunas situaciones, predecir y concluir, especialmente problemas relacionados con seres vivos.

Es poco lo que se puede aprender con sólo mirar friamente la teoría abstracta, ya sea física, química o matemática, debemos darle un sentido a las formulaciones de la ciencia, necesitamos una mejor comprensión de como utilizar sus principios. Es fundamental buscar una interacción con nuestra realidad, con nuestros cambios, con la evolución y la dinámica de las diversas situaciones que nos rodean.

Si bien, los temas tratados aquí no permitiran resolver problemas de divulgación científica, esperamos motivar al estudiante a investigar sobre la matemática actual -la nueva, vital y creativa matemática- nacida de la necesidad de comprender las pautas del mundo vivo.

En el capítulo 2, se resumen herramientas básicas de números reales que permiten resolver problemas principalmente de desigualdades. Se estudian aplicaciones en el área de la biología y la medicina.

En el capítulo 3, se trata el tópico de funciones. Se resaltan sus propiedades gráficas e importancia biológica de funciones exponenciales y logarítmicas. Se desarrollan variados problemas prácticos.

En el capítulo 4, se estudian funciones trigonométricas. Se ocupan estos conceptos para describir curvas que representan, por ejemplo, niveles de respiración, electrocardiogramas, situaciones experimentales.

En el capítulo 5, los límites y la continuidad son conceptos clave para entender la parte conceptual del cálculo. Se da una visión intuitiva y también formal de límites así como algunas aplicaciones.

En el capítulo 6, se presenta la definición formal de derivadas y su interpretación geométrica. Se consideran reglas de deivación. En una primera parte de este capítulo se da énfasis al cálculo directo de derivadas y posteriormente aplicamos esto a problemas de optimización. También se trata el concepto de derivada desde el punto de vista físico, como razón de cambio y sus importantes aplicaciones.

En el capítulo 7, se ve el concepto de integral indefinida. Se proporcionan dos técnicas de integración y algunas aplicaciones tradicionales.

Finalmente, agradezco las revisiones y aporte de material para este texto, de los profesores Héctor Aguilera (Universidad Andrés Bello), Carlos Lizama (Universidad de Santiago de Chile), Sergio Plaza (Universidad de Santiago de Chile).

Verónica Poblete
Universidad de Santiago de Chile
vpoblete@lauca.usach.cl

Capítulo 2

Números Reales

2.1 Axiomas y Propiedades

Esta sección está diseñada a modo de ofrecer un breve repaso sobre algunos conceptos básicos. Comenzaremos estudiando propiedades de los números reales, y en las próximas secciones aplicaremos este desarrollo teórico.

Aceptaremos la existencia de un conjunto llamado *conjunto de números reales* y denotado por $\mathbb{R}$. Los números reales se emplean en todas las áreas de la matemática y sus aplicaciones.

Sobre $\mathbb{R}$ se define una relación de igualdad que verifica las siguientes propiedades

- Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene $a = a$. (*Refleja*)
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ si $a = b$ entonces $b = a$. (*Simétrica*)
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$. (*Transitiva*)

Además el conjunto de los números reales es cerrado respecto a las operaciones de adición o suma (denotada por $+$) y multiplicación o producto (denotada por $\cdot$). Esto significa que dados dos números reales cualesquiera, la suma y la multiplicación de ellos es también un número real. Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades, llamadas *Axiomas de Cuerpo.* Dados a, b y c números reales arbitrarios, se verifican

- ***Conmutatividad*** $\quad a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$
- ***Asociatividad*** $\quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- ***Elemento Neutro o Identidad*** $\quad a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$
- ***Elemento Inverso*** $\quad a + (-a) = 0, \quad a \cdot a^{-1} = 1$ si $a \neq 0$
- ***Distributividad*** $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Note que 0 no tiene inverso multiplicativo ya que no existe un número que multiplicado por cero dé uno.

A partir de la suma, se define la resta

$$a - b = a + (-b)\,.$$

En forma semejante, se define la división en términos de la multiplicación, para $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$,

$$a \div b = a \cdot b^{-1}\,.$$

Es común denotar la división por $\frac{a}{b}$, de donde, si $b \neq 0$ tenemos $b^{-1} = \frac{1}{b}$.

A continuación se listan algunas importantes propiedades válidas en los números reales. La demostración de ellas, son consecuencia de los axiomas de cuerpo. Para a, b, c y d números reales arbitrarios se verifican

- $a \cdot 0 = 0$
- $a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$
- Si $c \neq 0$, se tiene $a = b$ si y sólo si $a \cdot c = b \cdot c$
- $a \cdot b = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$
- $-(-a) = a$
- $-(a + b) = -a - b$
- $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$
- Para $a \neq 0$ se tiene $(a^{-1})^{-1} = a$
- Para $a \neq 0\,,\ b \neq 0$ se tiene $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
- Para $b \neq 0\,,\ d \neq 0$ se tiene $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ y $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

  Si además $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Una aplicación importante de la axiomatica en $\mathbb{R}$ es encontrar soluciones de ecuaciones. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1 *Un farmacéutico debe preparar 15 ml de unas gotas para los ojos para un paciente con glaucoma. La solución de las gotas debe contener* 2% *de un ingrediente activo, pero el farmacéutico sólo tiene una solución al* 10% *y otra al* 1% *en su almacén ¿Qué cantidad de cada tipo de solución debe usar para preparar la receta?*

Solución. Sean V_i : volumen de la $i-$ésima solución (en este caso $i = 1, 2$) y C_i : concentración del $i-$ésimo ingrediente.

Si queremos que la mezcla final tenga un volumen V y una concentración C, debemos tener

$$V\,C = V_1\,C_1 + V_2\,C_2 \quad \text{y} \quad V = V_1 + V_2$$

Reemplazando los datos de nuestro problema, obtenemos

$$15 \cdot 0.02 = V_1\,0.1 + V_2\,0.01 \quad \text{y} \quad 15 = V_1 + V_2$$

De esto, $0.3 = 0.1V_1 + 0.01\,(15 - V_1)$, y despejando obtenemos el valor $V_1 = 1.667$ml y $V_2 = 13.333$. Luego, para preparar 15ml de gotas al 2% debemos utilizar 1.667ml de solución al 10% y 13.333ml de solución al 1%.

$\square$

2.2 Axiomas de Orden e Inecuaciones

Aceptaremos la existencia de un subconjunto de los números reales llamado *conjunto de números reales positivos* y denotado por $\mathbb{R}^+$. En este conjunto la suma y la multiplicación de reales positivos es también un número real positivo y se cumple la siguiente afirmación.

Dado $a \in \mathbb{R}$, se verifica sólo una de las siguientes propiedades

(i) $a \in \mathbb{R}^+$

(ii) $a = 0$

(iii) $-a \in \mathbb{R}^+$

Durante muchos años el álgebra se ha ocupado principalmente de la solución de ecuaciones. Recientemente, el estudio de las desigualdades ha alcanzado el mismo nivel de importancia debido a sus variadas aplicaciones. Tenemos la siguiente definición

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ diremos que a es menor que b, que se anota por $a < b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.

Suponga que $a, b \in \mathbb{R}$. Se verifica sólo una de las siguientes afirmaciones

(i) $a < b$

(ii) $a = b$

(iii) $b < a$.

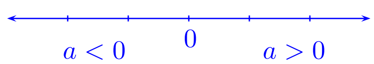
En particular, si ponemos $a \in \mathbb{R}$ y $b = 0$ en la afirmación anterior, obtenemos una de las siguientes alternativas

(i) $a < 0$

(ii) $a = 0$

(iii) $0 < a$.

Los números reales que verifican $a < 0$ son llamados *números reales negativos* y se anotan $\mathbb{R}^-$. De esta forma tenemos un orden en los números reales, representados en una recta numérica



La afirmación $a < b$, nos dice que, en la recta a se encuentra a la izquierda de b. La afirmación $a = b$ nos indica que a y b coinciden. Por otra parte, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b, escribiendo $a > b$, los enunciados $a > b$ y $b < a$ significan lo mismo.

El símbolo $a \leqslant b$ nos indica que a es menor o igual a b. Análogamente, $a \geqslant b$ nos dice que a es mayor o igual a b. Las desigualdades, verifican las siguientes propiedades. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces

- $a^2 \geqslant 0$
- $a \leqslant b$ si y sólo si $a + c \leqslant b + c$
- Si $c > 0$, tenemos $a \leqslant b$ si y sólo si $a \cdot c \leqslant b \cdot c$
- Si $c < 0$, tenemos $a \leqslant b$ si y sólo si $a \cdot c \geqslant b \cdot c$
- $a \cdot b \geqslant 0$ si y sólo si $(a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0)$ ó $(a \leqslant 0$ y $b \leqslant 0)$
- $a \cdot b \leqslant 0$ si y sólo si $(a \geqslant 0$ y $b \leqslant 0)$ ó $(a \leqslant 0$ y $b \geqslant 0)$
- Si $0 \leqslant a \leqslant b$ y $n > 0$, entonces $a^n \leqslant b^n$ y $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$.

Sean a y b números reales con $a < b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son llamados intervalos.

$[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b \,\}$

$]a,b[= \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b \,\}$

$[a,b[= \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b \,\}$

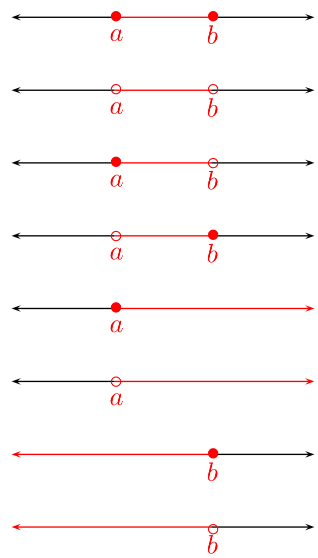
$]a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b \,\}$

$[a,+\infty[= \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \,\}$

$]a,+\infty[= \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \,\}$

$]-\infty,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant b \,\}$

$]-\infty,b[= \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, x < b \,\}$



Usaremos estas representaciones de conjuntos para escribir las soluciones de inecuaciones.

Definición 2.2 *Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.*

En esta sección, estamos interesados en buscar soluciones de inecuaciones con sólo una incógnita.

Ejemplo 2.3 *La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía en su efectividad en el tiempo según la expresión*

$$C = t^2 - 2t + 5,$$

donde C se mide en miligramos por litro y el tiempo t en horas. Se determinó que el calmante no produce daños colaterales y es efectivo si la concentración es de por lo menos 8 miligramos por litro y a lo más 13 miligramos por litro ¿Durante cuánto tiempo es efectivo el calmante?

Solución. De acuerdo a los datos aportados por el planteo del problema, para tener efectividad del calmante debemos tener que $8 \leqslant t^2 - 2t + 5 \leqslant 13$. De esto se desprende que hay que encontar la solución de $8 \leqslant t^2 - 2t + 5$ y $t^2 - 2t + 5 \leqslant 13$.

Resolvemos primero $8 \leqslant t^2 - 2t + 5$. Comparando con cero, se tiene

$$0 \leqslant t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3).$$

Construimos una tabla que resume los signos de las expresiones $t+1$, $t-3$ y $(t+1)(t-3)$ en los intervalos $]-\infty,-1[$, $]-1,3[$ y $]3,+\infty[$, como sigue

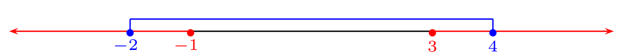
t	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$t+1$	$-$	0	$+$		$+$
$t-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(t+1)(t-3)$	$+$		$-$		$+$

Luego, $0 \leqslant (t+1)(t-3)$ si $t \in]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$.

Ahora buscamos las soluciones de $t^2-2t+5 \leqslant 13$ o equivalentemente $(t-4)(t+2) \leqslant 0$. Construimos una tabla de resumen de signos, como antes, obteniendo

t	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$t+2$	$-$	0	$+$		$+$
$t-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(t+2)(t-4)$	$+$		$-$		$+$

Luego, $(t-4)(t+2) \leqslant 0$ si $t \in [-2,4]$. Intersectando las soluciones anteriores, tenemos la siguiente gráfica



de donde $t \in [-2,-1] \cup [3,4]$. En el contexto del problema, considerando que t representa tiempo, la solución de la inecuación es $[3,4]$. Esto nos indica que el calmante es efectivo entre 3 y 4 horas después de haberse administrado.

$\square$

Ejemplo 2.4 *Un paciente recibió inulina para medir su tasa de filtración glomerular $[TFG]$. En el curso de la medición, la tasa de flujo urinario se modifica deliberadamente dándole a beber grandes cantidades de agua. La concentración plasmática de inulina (mg/ml), $[P]$, se mantiene constante a 1.5 mg/ml mediante venoclisis. La tasa de flujo urinario $\dot{V}$ es constante a 2 ml/min. Si $[TFG] = \dfrac{[U]\cdot\dot{V}}{[P]}$ varía entre 90 y 100 ml/min antes y después de ingerir agua ¿como varía la concentración de inulina, $[U]$, en la orina?*

Solución. Tenemos $90 \leqslant \dfrac{[U]\cdot\dot{V}}{[P]} \leqslant 100$. Reemplazando los datos,

$$90 \leqslant \frac{2[U]}{1.5} \leqslant 100$$

despejando, $135/2 \leqslant [U] \leqslant 75$. Esto nos indica que la concentración de inulina varía entre $135/2$ y $75mg/ml$.

$\square$

Ejemplo 2.5 *Al realizar un estudio en un sector minero se encontró un gran porcentaje de personas con niveles elevados de plomo en la sangre. El instituto de salud pública decidió comenzar un tratamiento con un costoso medicamento a las personas que tengan un 6% de sangre contaminada. El porcentaje que describe la cantidad del plomo en la sangre como efecto de x gramos del medicamento, viene dado por la relación*

$$P = \frac{x^2+5x+6}{x^2+x+1}, \textit{ con } P \textit{ expresado en } \%.$$

¿Al menos cuántos gramos deben administrarse para que el porcentaje de plomo sea menor que 2 %?

Solución. Como la expresión está dada en porcentaje, debemos encontrar la solución de

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x+1} < 2.$$

Note que la expresión cuadrática x^2+x+1 no es factorizable en $\mathbb{R}$ (su discriminante es $\Delta = 1-4 < 0$), de hecho $x^2+x+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, podemos multiplicar la inecuación por esta expresión sin que la desigualdad cambie, obteniendo

$$x^2+5x+6 < 2(x^2+x+1).$$

Una manipulación algebraica de la expresión anterior da

$$0 < x^2-3x-4 \; 0 < (x-4)(x+1)$$

o, factorizando

$$0 < (x-4)(x+1).$$

En resumen, haciendo una tabla de variación de signos, obtenemos

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(x-4)$	$+$		$-$		$+$

La solución de la inecuación, considerando el planteamiento verbal es $]4, +\infty[$. En base a este análisis, podemos afirmar que se deben administrar un poco más de 4 gramos del medicamento para que el porcentaje de plomo sea menor que 2 %.

□

2.3 Valor absoluto: Distancia en $\mathbb{R}$

En la sección anterior vimos la existencia de un orden en los números reales. Ahora estamos interesados en medir distancia entre números reales. El siguiente concepto nos será de gran ayuda para este propósito

Definición 2.6 *El valor absoluto de un número real a, denotado por $|a|$ es*

$$|a| = \begin{cases} a & si \;\; a \geqslant 0 \\ -a & si \;\; a < 0. \end{cases}$$

Geométricamente $|a|$ nos indica la distancia desde el número real a al origen de la recta numérica.

Por ejemplo, $|-7| = -(-7) = 7, \quad |4| = 4, \quad |0| = 0.$

El valor absoluto se puede utilizar para obtener la distancia entre dos números cualesquiera a y b, mediante la expresión

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Por ejemplo, la distancia entre -3 y 5 es $d(-3, 5) = |-3-5| = |-8| = 8.$

A continuación, se listan algunas propiedades del valor absoluto. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifican

- $|a| \geqslant 0$
- $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$
- $|-a| = |a|$
- Si $a \geqslant 0$ y $|a| = b$ entonces $a = b$
- Si $a < 0$ y $|a| = b$ entonces $-a = b$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (Desigualdad Triangular)

- Para $b > 0$, $|a| \leqslant b$ es equivalente a $-b \leqslant a \leqslant b$
- Para $b > 0$, $|a| \geqslant b$ es equivalente a $a \geqslant b$ o $a \leqslant -b$.

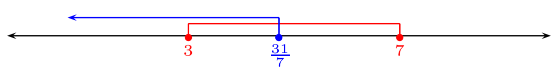
Ejemplo 2.7 *Para una población particular de salmón, la relación entre el número de hembras x y el número de crías y que sobreviven hasta la edad madura está dada por la fórmula $y = \frac{4\,|7-x|-|x-3|}{2}$. ¿Cuándo el número de hembras es menor o igual que el número de crías que sobreviven?*

Solución. Podemos escribir la inecuación como $|x-3| \leqslant 4\,|7-x| - 2x$. Resolvemos la inecuación por casos.

Caso 1. Si $x < 3$, entonces $|x-3| = -(x-3)$ y $|7-x| = 7-x$. Reemplazando en la inecuación, se obtiene $-(x-3) \leqslant 4\,(7-x) - 2x$, de aquí, $-x+3 \leqslant 28-4x-2x$ de donde $x \leqslant 5$. Intersectando con nuestro supuesto,

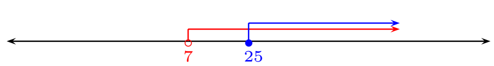
tenemos una primera solución $S_1 =]\infty, 3[$.

Caso 2. Si $3 \leqslant x \leqslant 7$ entonces $|x-3| = x-3$ y $|7-x| = 7-x$. Reemplazando en la inecuación, se obtiene $x-3 \leqslant 4\,(7-x) - 2x$, de aquí, $x-3 \leqslant 28-4x-2x$ de donde $x \leqslant 31/7$. Intersectando con nuestro supuesto,



tenemos una segunda solución $S_2 = [3, \frac{31}{7}]$.

Caso 3. Si $x > 7$ entonces $|x-3| = x-3$ y $|7-x| = -(7-x)$. Reemplazando en la inecuación, se obtiene $x-3 \leqslant -4\,(7-x) + 2x$, de aquí, $x-3 \leqslant -28+4x-2x$ de donde $25 \leqslant x$. Intersectando con nuestro supuesto,



tenemos una tercera solución $S_3 = [25, +\infty[$.

La solución de la inecuación es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty, \frac{31}{7}] \cup [25, +\infty[$.

En el contexto del problema práctico, la solución es $[0, \frac{31}{7}] \cup [25, +\infty[$, esto nos indica que cuando el número de hembras de salmón esta entre 0 y 4 (aproximadamente) o es al menos 25, el número de crías que sobreviven hasta la edad madura es mayor que el número de hembras de salmón.

$\square$

2.4 Ejercicios Propuestos

1. En cierta prueba médica, diseñada para medir la resistencia a los carbohidratos, un adulto bebe 7 ml de una solución de glucosa al 30%. Cuando se le administra la misma prueba a un niño debe disminuirse la concentración de glucosa ¿Qué cantidad de una solución al 30% de glucosa y qué cantidad de agua deben usarse para preparar 7 ml de una solución al 20% de glucosa?

2. Para preparar la Teofilina, que es un medicamento contra el asma, se usa un exhílir con una concentración de fármaco de 5 mg/ml, y un jarabe con sabor a cereza que se agrega para disimular el sabor de la medicina ¿Qué cantidad de ambos debe usarse para preparar 100 ml de solución con una concentración del medicamento de 2 mg/ml?

3. Un químico tiene 10 ml de una solución que contiene 30% de concentración de ácido ¿Cuántos mililitros de ácido puro deben agregarse para aumentar la concentración a 50%?

4. Una mezcla contiene 8 ml de agua y anticoagulante. Si 49% de la mezcla es anticoagulante ¿qué cantidad de mezcla debe eliminarse y reemplazarse por anticoagulante para que la mezcla resultante contenga un 60% de anticoagulante?

5. La ley de Dalton de las presiones parciales se aplica con frecuencia en fisiología respiratoria. La presión parcial para un gas seco es $P_x = P_B \cdot F$ y para un gas húmedo es $P_x = (P_B - P_{H_2O}) \cdot F$, donde

   P_x : presión parcial del gas (mmHg).

   P_B : presión barométrica.

   P_{H_2O} : presión del vapor de agua a 37°C (47 mmHg).

   F : concentración fraccional del gas.

   Calcule la presión parcial de O_2, P_{O_2} en el aire inspirado seco (con presión barométrica de 760 mmHg) y compare ese valor con la P_{O_2} en el aire traqueo húmedo a 37°C, si la concentración fraccional de O_2 en el aire inspirado es de 0,21.

6. Los tres parámetros siguientes describen la función de los ventrículos

   - *Volumen latido (VL)*: volumen de sangre que el ventrículo puede expulsar en un sólo latido, esto es

     VL = volumen al final de la diástole - volumen final de la sístole

   - *Fracción de expulsión (FE)*: eficiencia de la expulsión, esto es

     $$FE = \frac{Volumen\ latido}{volumen\ al\ final\ de\ la\ diástole}$$

   - *Gasto Cardíaco (GC)*: volumen total que el ventrículo expulsa por unidad de tiempo, esto es

     GC = (volumen del latido) · (frecuencia cardiaca), donde

   Volumen del latido: volumen expulsado del ventrículo en un latido (ml).

   Frecuencia cardíaca: latidos por minuto.

   De acuerdo a lo anterior, determine el volumen del latido, gasto cardíaco y fracción de expulsión para un paciente que tiene un diástolico final de 140 ml, un volumen sistólico final de 70 ml y una frecuencia cardíaca de 75 latidos por minuto.

7. El flujo plasmático renal (FPR) se obtiene como

$$FPR = \frac{[U]_{PAH} \cdot \dot{V}}{[RA]_{PAH} - [RV]_{PAH}} \tag{2.1}$$

   donde $[U]_{PAH} = [PAH]$ en la orina, $[RA]_{PAH} = [PAH]$ en la arteria renal, $[RV]_{PAH} = [PAH]$ en vena renal y $\dot{V}$ = tasa de flujo urinario.

   Despejar a partir de (2.1) el $[PAH]$ en vena renal.

8. Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

   (a) $10 - 7x < 4 + 2x$

   (b) $\dfrac{x+1}{x^2-25} \leqslant 0x$

   (c) $(x-2)(x+3) > x(x-1)$

   (d) $\sqrt{1-x} \leqslant 8$

   (e) $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{3}{x+1}$

   (f) $\dfrac{x+1}{x-4} < 2$

   (g) $\dfrac{4}{x+1} - \dfrac{3}{x+2} > 1$

   (h) $-1 < \dfrac{3x+4}{x-7} < 1$

   (i) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2-x}{x-1} \leqslant 1$

   (j) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x} \leqslant 0$

   (k) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8} \leqslant -1$

   (l) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+6} < 3$

9. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

   (a) $|x-1|=2$

   (b) $|x+1|+|x-1|=0$

   (c) $3|2-x|+|3+x|=1-x$

   (d) $2x+|5-7x|=5+|x|$

   (e) $8|x|+|5x+1|<2$

   (f) $|x+1|\leqslant|2+3x|$

   (g) $|2x+1|-x\leqslant 4+3|x|$

   (h) $|1-x|+3x\leqslant 4|x+5|+2$

   (i) $\dfrac{|x|}{x+2}\geqslant 0$

   (j) $\left|\dfrac{x}{x+3}\right|<5$

   (k) $2<\left|\dfrac{2+x}{x-1}\right|<3$

10. Se ha establecido que el virus sinsicial respiratorio que ataca preferentemente a los niños se debe a dos factores que son: la posibilidad de contagio $C=2x^2-5x+4$, la disminución de ciertas vitaminas en el organismo $V=x^2+6x-8$. Ambas expresiones dependen de la edad x. Si se estima que los mayores trastornos producidos por este *virus* se producen cuando la diferencia entre ambos factores es menor que 12 ¿Cuáles son las edades de mayor riesgo para contraer esta enfermedad?

11. Se han sugerido varias reglas para modificar las dosis de medicamento para adulto y así encontrar la dosis para niños pequeños. Sea a la dosis para adulto (en mg), y t la edad del niño (en años). Algunas reglas típicas son las siguientes

$$y=\frac{t+1}{24}\,a\quad\text{(Regla de Cowling)}\qquad y=\frac{2}{25}\,t\,a\quad\text{(Regla de Friend)}$$

¿ Para qué edad aproximadamente la dosis según Regla de Friend es menor que la dosis según Regla de Cowling?

12. Se espera que la población P de una ciudad (en miles) crezca de acuerdo a $P=15+\sqrt{3t+2}$, en donde el tiempo t está medido en años ¿Después de cuánto tiempo la población será de al menos 20 mil personas?

13. En biología existe una regla aproximada, llamada regla bioclimática para zonas templadas, que establece que en primavera, y a principios de verano, fenómenos periódicos tales como la aparición de insectos y la maduración de la fruta, se retardan alrededor de 4 días, por cada 1500 metros de altura sobre el nivel del mar. Esta regla bioclimática se resume en la expresión $d=4\,\dfrac{h}{1500}$ donde d es el cambio en días y h es el cambio de altura medido en metros. Si esta regla es válida para $0\leqslant h\leqslant 4000$, determinar el mínimo y la máximo retardo para un fruto que florece entre los 1600 y 2300 metros sobre el nivel del mar.

14. En sicología el CI de una persona se encuentra al dividir la edad mental por la edad cronológica y luego esta relación se multiplica por 100.

Si el intervalo de variación de CI de un grupo de estudiantes de 20 años de edad es $70 \leqslant CI \leqslant 120$. Determinar el intervalo de variación de la edad mental del grupo.

15. Un determinado fármaco que se usa para controlar la temperatura se inyecta vía intramuscular. Su efecto (en horas) es dado en función de x (mg de dosis) por $E = \dfrac{74x}{8x+3}$ ¿Qué cantidad de dosis se debe inyectar para que el fármaco tenga efecto más de 4 horas y menos de 8 horas?

16. Use la relación $C = \dfrac{5}{9}(F-32)$ para determinar el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde a $20 \leqslant C \leqslant 30$.

17. ¿A qué rango de temperatura en la escala Celsius corresponde el intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

18. Para que cualquier medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración en el torrente sanguíneo debe exceder un cierto valor llamado *nivel terapéutico mínimo*. Suponga que la concentración C de un fármaco al transcurrir t horas después de que se ha ingerido es

$$C = \frac{20t}{t^2+4}\left[\frac{mg}{lto}\right]$$

Si el nivel terapéutico mínimo es $4\dfrac{mg}{lto}$, determine cuándo se ha excedido este nivel.

19. Pasados t minutos después de introducir un bactericida experimental en cierto cultivo, el número de bacterias está dado por $N = \frac{10000}{t^2+1} + 2000$. Determine el momento en que el número de bacterias está por debajo de 4000.

20. Se realizará un scaner a enfermos crónicos del pulmón. Para esto se suministra a cada paciente un líquido de contraste, cuyo porcentaje residual en el cuerpo en función del tiempo medido en horas es $p = -2t^2 + 8t$. Se requiere una concentración mínima de un 6% para poder realizar el examen. Si se le administra el contraste a las 12:00 horas A.M ¿entre qué hora es posible realizar el examen?

21. Un nutricionista recomienda que una dieta balanceada es aquella donde la diferencia entre las calorías aportadas por carbohidratos y proteínas, no excede a 5 calorías por día. Si 1 gramo de proteína aporta 4 calorías y 1 gramo de carbohidratos aporta 9 calorías, ¿qué cantidad de carbohidratos debe consumir una persona que ya ha consumido 80 gramos de proteínas?

22. Una persona se ha intoxicado al ingerir accidentalmente un medicamento vencido. Se estima que el porcentaje de sangre contaminada t horas después de ocurrida la intoxicación es $P = 18t - t^2 + 6$. Se considera el paciente en riesgo vital cuando el porcentaje de sangre contaminada es más de un 62% ¿ En qué intervalo de tiempo ocurre esta situación?

Capítulo 3

Funciones de Variable Real

3.1 Definición, propiedades y ejemplos

El concepto de función fue formulado en el siglo XVIII por Gottfried Wilhelm Leibniz, es uno de los conceptos más básicos en matemáticas y es esencial para el estudio del cálculo.

En muchas situaciones prácticas, el valor de una cantidad puede depender del valor de una o más cantidades. Por ejemplo, la reacción de un organismo frente a un fármaco depende de la dosis del medicamento; el crecimiento de una población depende del número de individuos y de depredadores. Con frecuencia tales relaciones pueden representarse mediante funciones. En términos generales, una función relaciona los elementos de dos conjuntos mediante una determinada regla de asociación.

Definición 3.1 *Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una correspondencia que asocia a cada elemento de A un único elemento en B.*

Si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ diremos que la función es real de variable real. En este texto, trabajaremos sólo funciones reales de variable real.

Notación: Escribiremos una función f de $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = y \end{array}$$

Observaciones 3.2

1. *El conjunto A se denomina dominio de la función f y se denota por $Dom(f) = A$.*

2. *En la igualdad $f(x) = y$, llamamos a y imagen de x, a x una preimagen de y.*

Definición 3.3 *Sea* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función .*

(i) El recorrido o imagen de f *es el conjunto*

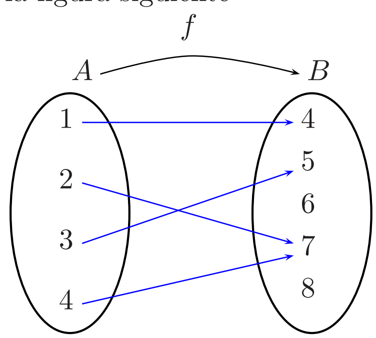
$$Rec(f) = Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \ \textit{existe } x \in A, \ \textit{tal que } f(x) = y\}.$$

(ii) El gráfico de f *es el conjunto*

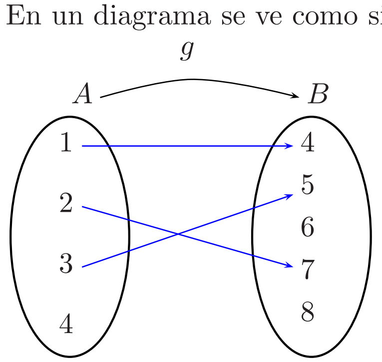
$$graf(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ x \in A\}.$$

Ejemplo 3.4 *Sean* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ *.*

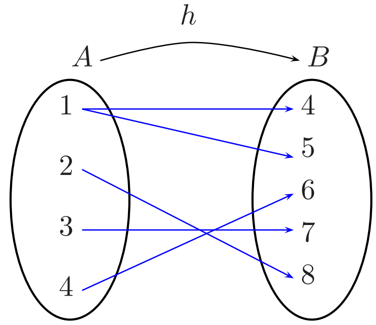
(i) Se define f de A en B como $f(1) = 4$, $f(2) = 7$, $f(3) = 5$ y $f(4) = 7$. Note que f es función. Vemos esto en la figura siguiente



(ii) Se define g de A en B como $g(1) = 4$, $g(2) = 7$ y $g(3) = 5$. Note que g **no** es función, ya que 4 no tiene imagen. En un diagrama se ve como sigue

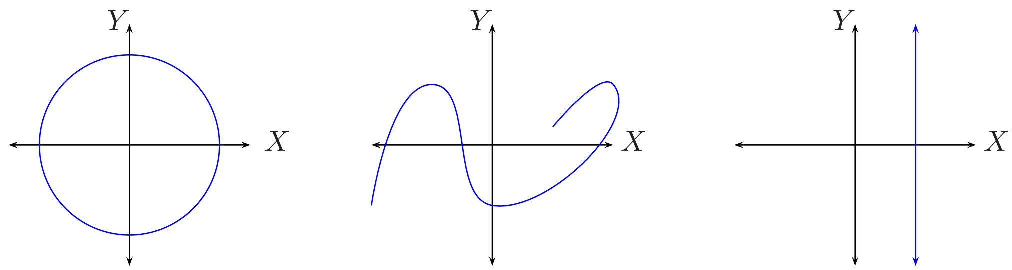


(iii) Se define h de A en B como $h(1) = 5$, $h(2) = 8$, $h(3) = 7$, $h(4) = 6$ y $h(1) = 4$. Note que h así definida **no** es función, ya que 1 tiene dos imagenes distintas. Esto se ve como sigue

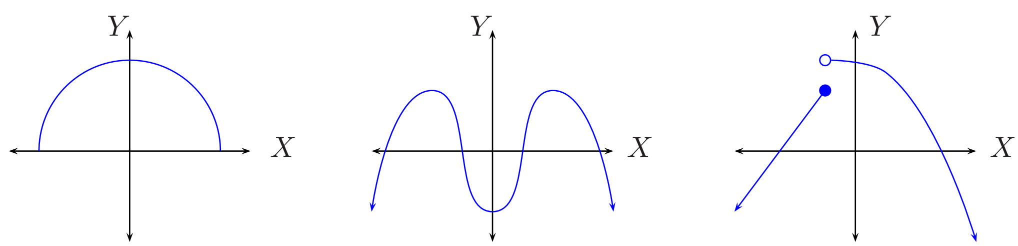


Existe una manera sencilla para determinar si una curva es o no la gráfica de una función. Si una recta vertical en el plano cartesiano, intersecta a la curva en dos o más puntos, entonces la curva no es la gráfica de una función de x.

Ejemplo 3.5 *Las siguientes curvas no son funciones de* x.



Ejemplo 3.6 *Las siguientes curvas son funciones de* x.



Ejemplo 3.7 *Función Constante.*

Se define la función constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = c$, dónde c es un número real fijo. Observe que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \{c\}$. La gráfica de la función constante es una recta horizontal a la altura de c.

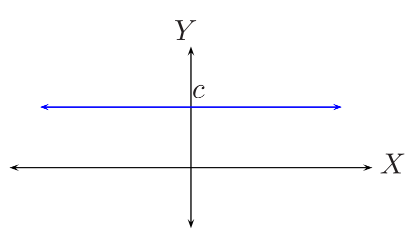


Figura 1

Ejemplo 3.8 *Función Lineal.*

La actividad física produce a largo plazo un aumento del peso del hígado y volumen del corazón. Suponga que que se tiene un hígado de 280 gramos cuyo volumen cardíaco es de 850 ml, y que para un hígado de 350 gramos el volumen cardíaco es de 990 ml. Suponiendo que existe una relación lineal entre la masa hepática y el volumen del corazón, determine la función del volumen cardíaco en términos de la masa hepática.

Solución. Recordemos que la ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0\,, \qquad x_0 \neq x_1\,.$$

Aquí, de acuerdo al planteamiento del problema, y depende linealmente de la variable independiente x.

En el problema, x es la variable independiente que indica la masa hepática (en gramos) e y la variable dependiente que corresponde al volumen del corazón (en ml). Tenemos los puntos $(280, 850)$ y $(350, 990)$ que, reemplazados en la ecuación anterior nos dan

$$y = \frac{990 - 850}{350 - 280}(x - 280) + 850.$$

De donde $y(x) = 2x + 290$.

Este tipo de funciones son conocidas como ***función lineal***.

$\square$

La expresión general de una función lineal es $f(x) = ax + b$, con a y b constantes, $a \neq 0$. Note que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por consiguiente $Dom(f) = \mathbb{R}$ y en este caso $Rec(f) = \mathbb{R}$. La gráfica de f es una recta oblicua, cuya inclinación respecto al eje X, depende del signo de a, ilustramos esto en las siguientes figuras.

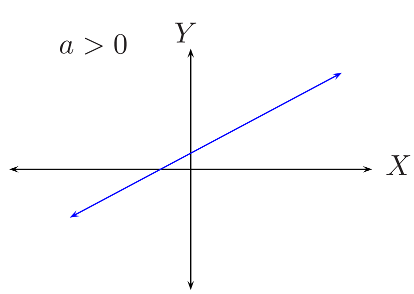


Figura 2a

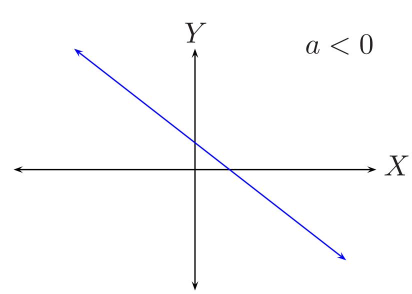


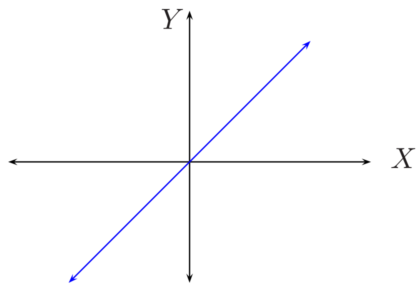
Figura 2b

Note que en la Figura $2a$, tenemos lo siguiente, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Las funciones que tienen esta propiedad se denominan ***funciones crecientes***. En la Figura $2b$

ocurre lo contrario, en otras palabras si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$. A este tipo de funciones se les llama ***funciones decrecientes***.

Veremos que, en general, una función puede ser creciente en una parte de su dominio y decreciente en otra o bien constante, ver Figura 1.

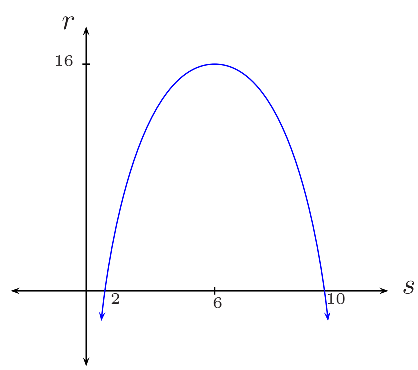
Observación 3.9 *Si en la definición de función lineal se tiene $a = 1$ y $b = 0$ obtenemos la función $I(x) = x$, llamada **función identidad**. Su gráfica es*



Ejemplo 3.10 *Función Cuadrática.*

Un investigador en fisiología establece que la función $r(s) = -s^2 + 12s - 20$ es un modelo matemático que describe el número de impulsos emitidos por una persona, después que se ha estimulado un nervio. La variable s es el número de segundos transcurridos desde que es estimulado el nervio. Graficar la función e interpretarla en el contexto del problema.

Solución. La siguiente figura corresponde al gráfico de la función r.



Desde la gráfica, podemos obtener información concreta del problema. La función r es creciente para $s \in]2, 6[$, y esto nos indica que el número de impulsos emitidos va en aumento cuando el tiempo transcurrido, desde que es estimulado el nervio, está entre 2 y 6 segundos. A partir de ese momento el número de impulsos emitidos empieza a disminuir hasta ser prácticamente cero después de 10 segundos. La cantidad máxima de impulsos emitidos es de 16 y ocurre pasados 6 segundos desde que es estimulado el nervio. Es claro, en el contexto del problema, que sólo nos interesan valores positivos de la función, estos ocurren precisamente en el intervalo $]2, 10[$.

$\square$

Una función, como la del ejemplo anterior, es conocida como ***función cuadrática***, en general, una función cuadrática tiene la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$, con a y b constantes, $a \neq 0$. Se tiene que $Dom(g) = \mathbb{R}$ y la gráfica es una parábola, cuya concavidad (esto es, conocer si se abre hacia arriba o hacia abajo) depende del signo de a. Ilustramos esto en las siguientes figuras.

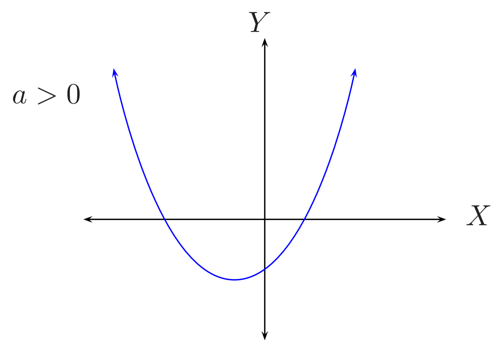


Figura 3a

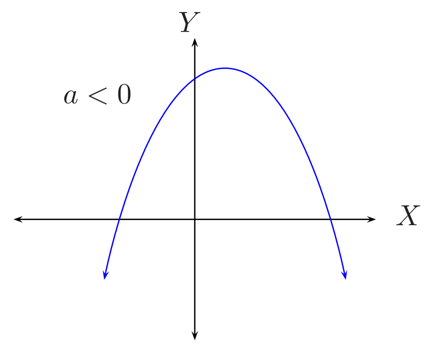


Figura 3b

Note que si $a > 0$ el recorrido de g es el intervalo $]g(-b/2a), +\infty[$. En este caso la función es creciente en el intervalo $]-b/2a, +\infty[$ y decreciente en $]-\infty, -b/2a]$, luego g alcanza la menor imagen al evaluar en $-b/2a$ (punto mínimo). Si $a < 0$ el recorrido de g es el intervalo $]-\infty, g(-b/2a)[$. En este caso la función es creciente en el intervalo $]-\infty, -b/2a[$ y decreciente en $]-b/2a, +\infty[$, luego g alcanza la mayor imagen al evaluar en $-b/2a$ (punto máximo).

Ejemplo 3.11 *Función Polinomial.*

La generalización de las funciones dadas en los ejemplos anteriores son las funciones polinomiales. Están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, dónde $n \in \mathbb{N}$ es llamado el grado de p.

Ejemplo 3.12 *Función Racional.*

Una función racional es definida como la división de dos funciones polinomiales. Esto es, la escribimos como $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, dónde p y q son funciones polinomiales. Tenemos que $Dom(r) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) \neq 0\}$.

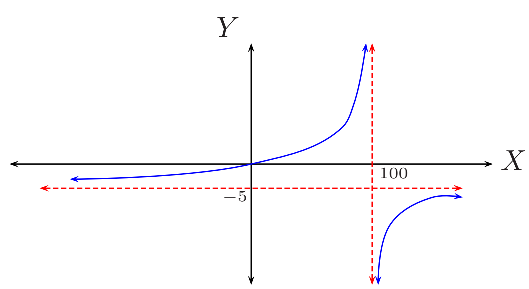
En el siguiente ejemplo, estudiamos una aplicación de funciones racionales.

Ejemplo 3.13 *A menudo los fisioterapeutas descubren que el proceso de rehabilitación se caracteriza por un efecto de rendimientos decrecientes. Es decir, la recuperación de la funcionalidad suele aumentar con la duración del programa terapéutico, pero con el tiempo el mejoramiento es cada vez menor en relación con los esfuerzos adicionales del programa. Para una incapacidad particular, los terapeutas han ideado una función que describe el costo C de un programa terapéutico en términos del porcentaje de la funcionalidad recuperada x dada por*

$$C(x) = \frac{5x}{100 - x}$$

donde C se mide en miles de dólares. Hallar dominio, recorrido y gráfico de la función. Finalmente, interprete los resultados en el contexto del problema.

Solución. El dominio de la función es $Dom(C) = \mathbb{R} \setminus \{100\}$, lo cual se determina por inspección de C. Para determinar el recorrido, por definición de la función se tiene que los puntos imagenes tienen la forma $y = \dfrac{5x}{100 - x}$. Despejando x se obtiene $x = \dfrac{100y}{y+5}$, de donde $Rec(C) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. La gráfica de la función es mostrada en la figura siguiente



En el contexo del problema, nos interesan valores de x entre 0 y 100. En este tramo la función es creciente, y esto nos indica que si el porcentaje de la funcionalidad recuperada aumenta, también aumenta el costo de la terapia. Note desde la gráfica, que cuando hay un alto porcentaje de recuperación (cercano al 100%) el costo aumenta indefinidamente sin que el paciente mejore sustancialmente.

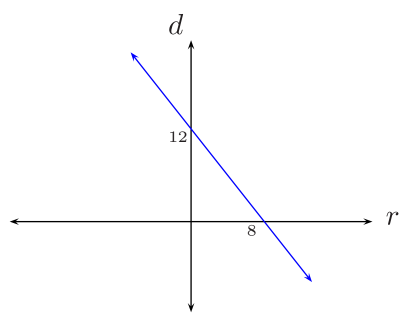
$\square$

3.1.1 Ejercicios Resueltos

A continuación se estudian ejemplos que involucran funciones presentadas en la sección anterior.

1. Un paciente con cáncer recibirá terapia mediante fármacos y radiación. Cada centímetro cúbico de medicamento que se usará contiene 200 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 300 unidades curativas. El paciente requiere 2400 unidades curativas. Si d centímetros cúbicos de la droga y r minutos de radiación son administrados, determine la función lineal que relaciona d y r. Grafique e interprete resultados.

   Solución. De los datos aportados en el problema se tiene que $200d + 300r = 2400$. A partir de esta igualdad, expresamos d como función lineal de r por $d(r) = 12 - \frac{3}{2}r$. El gráfico de d es

   De la figura se desprenden algunos datos interesantes. Por ejemplo, si no se usara radiación en el tratamiento, se deben administrar al paciente $12cm^3$ de droga. Por otra parte, si no se usa drogas en el tratamiento, son necesarios 8 minutos de radiación. Observe que la función es decreciente, esto nos indica que mientras más minutos de radiación se apliquen al paciente, se administrara menos droga. El problema tiene sentido para r entre 0 y 8.

   $\square$

2. En cierto experimento de aprendizaje involucrando repetición y memoria, se estimó que la proporción p de elementos recordados se relacionaba linealmente con un tiempo de estudio efectivo t (en minutos). Para un tiempo de estudio efectivo de 5 minutos, la proporción de elementos recordados fue de 0.32. Por cada minuto más en el tiempo de estudio, la proporción recordada aumentaba en 0.059. Encuentre la función lineal de p en términos de t. Grafique e interprete resultados.

   Solución. Un punto en la gráfica de la función p tiene la forma $(t, p(t))$. De la información entregada en el problema, tenemos que los puntos $(5, 0.32)$ y $(6, 0.379)$ estan sobre dicha gráfica. Como el modelo es lineal se obtiene

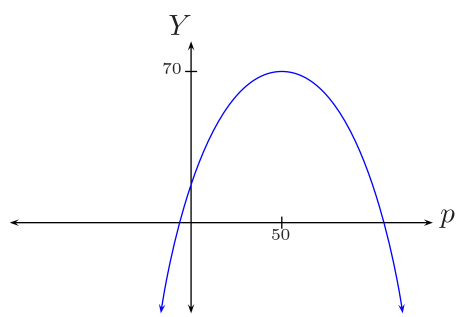
$$p(t) - 0.32 = \frac{0.379 - 0.32}{6 - 5}\,(t - 5)$$

de donde $p(t) = 0.059\,t + 0.025$. Claramente es una función creciente, esto nos indica que mientras más minutos de estudio efectivo, la proporción de elementos recordados también aumenta. Para efectos del problema, t debe ser mayor o igual a cero.

□

3. Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un alto contenido de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje p de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado en gramos de una rata en un período fue de $f(p) = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20$. Encontrar el máximo peso ganado.

Solución. El vértice de la gráfica de la función cuadrática es $(50, 70)$, ver página 17. Como la parábola se abre hacia abajo ya que $-1/50 < 0$, la función f tiene un punto máximo en $x = 50$. Esto nos indica que el máximo peso ganado por la rata se obtiene cuando el 50% en la mezcla corresponde a levadura y es de 70 gramos en un período.



□

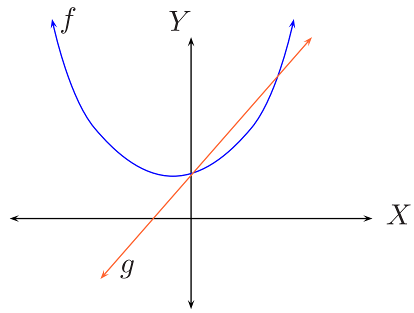
4. El consumo de oxígeno, en mililitros por minuto, para una persona que camina a x kilómetros por hora, está dada por la función $f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 10$, mientras que el consumo de oxígeno para una persona que corre a x kilómetros por hora, está dada por $g(x) = 11x + 10$.

   (a) Trace las gráficas de f y g (en un mismo plano cartesiano).

   (b) ¿A qué velocidad es idéntico el consumo de oxígeno para una persona que camina y para otra que corre?

   (c) ¿Qué sucede con el consumo de oxígeno para ambas personas a velocidades mayores que la determinada en la parte (b)?

Solución. (a) La gráfica de ambas funciones es



Para responder (b), igualando las funciones $\frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 10 = 11x + 10$ obtenemos $x\,(5x - 28) = 0$, de donde $x = \frac{28}{5}$ o $x = 0$. En el contexto del problema, los consumos de oxígenos son iguales, a una velocidad de $\frac{28}{5}$ kilómetros por hora.

De la gráfica, claramente a una velocidad mayor que $\frac{28}{5}$ kilómetros por hora, el consumo de oxígeno para una persona que camina es mayor que el de una persona que corre, esto responde (c).

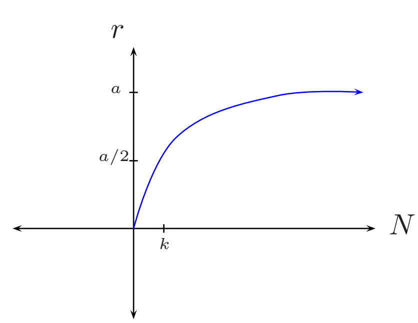
$\square$

5. La función de crecimiento de Monod se utiliza frecuentemente para describir la velocidad de crecimiento per cápita de un organismo (velocidad de crecimiento dividida por el tamaño de la población), cuando la velocidad de crecimiento depende de la concentración de algún nutriente. Si se denota por N la concentración del nutriente, la función de Monod es

$$r(N) = a\,\frac{N}{k+N}\,, \quad N \geqslant 0\,.$$

donde k (constante de semisaturación) y a (nivel de saturación) son constantes positivas ¿Qué le sucede a r cuando N crece? Utilizando esta idea, explique porqué a a se denomina nivel de saturación.

Solución. Es claro, del planteamiento del problema, que $Dom(r) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Además $Rec(r) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y la gráfica de la función es



Podemos observar que cuando N crece indefinidamente, la gráfica de la función se acerca a la recta horizontal $y = a$. En el problema, esto nos indica que si aumentamos la concentración del nutriente N, la velocidad de crecimiento per cápita de un organismo se estabiliza en un valor muy cercano a a, esto explica el porqué del nombre de la constante a. Por otro lado la imagen por r de k es $a/2$, debido a esto su nombre de constante de semisaturación.

$\square$

3.1.2 Ejercicios Propuestos

1. Indique el dominio, recorrido y gráfico de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x+2}$

   (b) $g(x) = \sqrt[3]{5x-1}$

   (c) $h(t) = |t-1|$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2-9}+5$

2. Calcule los valores indicados de la función dada

   (a) $f(-2),\ f(0),\ f(1/2)$ si $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x^3+7}$

   (b) $g(-5),\ g(a),\ g(2)$ si $g(x) = x - |x-1|$

   (c) $g(-3/5),\ g(2/3),\ g(4)$ si $g(t) = \sqrt{|t-1|}$

   (d) $f(-5),\ f(0),\ f(16/4)$ si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2+3} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

3. Investigaciones cardiovasculares han mostrado que a un nivel de colesterol superior a 210, cada aumento del 1% por encima de este nivel aumenta el riesgo en un 2%. Se encontró que para un grupo de edad particular el riesgo coronario en un nivel de 210 de colesterol es de 0.160 y a un nivel de 231 el riesgo es de 0.192.

   (a) Encuentre una ecuación lineal que exprese el riesgo R en términos del nivel de colesterol C.

   (b) ¿Cuál es el riesgo para un nivel de colesterol de 260?

4. En un estudio de paciente VIH que se infectaron por el uso de drogas intravenosas, se encontró que después de 4 años, 17% de los pacientes tenían SIDA y que después de 7 años 33% lo tenían.

   (a) Encuentre una función lineal que modele la relación entre el intervalo de tiempo y el porcentaje de pacientes con SIDA.

   (b) Pronostique el número de años para que la mitad de esos pacientes tenga SIDA.

5. En los últimos años se ha detectado un incremento lineal en el porcentaje de la población de alcohólicos en una ciudad. En 1990 el porcentaje era de 10% y en el año 2002 se elevó a 14%. Si $p(t)$ es el porcentaje de alcohólicos en la población y t representa el tiempo en años desde 1990, determine la expresión para la función $p(t)$, considerando que $t = 0$ en 1990.

6. La evolución de tratamiento aplicado a cierto paciente que sufre alteraciones en la regeneración de tejidos sigue un comportamiento lineal, cuya variable independiente corresponde al número de días en que el organismo regenera en milímetros cuadrados sus tejidos. Según antecedentes clínicos, al primer día no hay tejidos regenerados, sin embargo al cabo de 10 días se comprueba que, hay 4.5 milímetros cuadrados de tejidos regenerados. Determine

   (a) La función lineal que describe el problema.

   (b) La cantidad de tejido regenerado, cuando han transcurrido 30 días.

   (c) El tiempo aproximado para obtener una evolución en el tejido de 100 milímetros cuadrados.

7. La regla de Cowling es un método para calcular dosis pediátricas. Si a denota la dosis para un adulto (en mg) y t es la edad del niño (en años), entonces la dosis infantil está dada por

$$D(t) = \left(\frac{t+1}{24}\right) \cdot a$$

   (a) Grafique la función para distintos valores de a. ¿ Cómo influye este valor en el comportamiento de la función D ?

   (b) Si la dosis de un adulto es de 500 mg, ¿ cuál es la edad de un niño cuya dosis pediátrica alcanza los 125 mg?

8. La temperatura (medida en grados celcius), que experimenta cierto cultivo de bacterias, varía de acuerdo a

$$T(x) = -(x-2)^2 + 1$$

   donde x, representa el tiempo de exposición a fuentes de energía calórica.

(a) Señale el intervalo de tiempo en que la temperatura del cultivo se mantiene positiva.

(b) ¿ Después de cuánto tiempo la temperatura es máxima?

(c) Realice la gráfica de la función e interprete en el contexto del problema.

9. El efecto de la anestesia bucal en un paciente (en porcentaje), luego de t minutos de ser inyectado un fármaco es modelado por la función

$$G(t) = -\frac{25t^2}{16} + 25t.$$

¿En qué instante se produce el grado máximo de adormecimiento? ¿Después de cuánto tiempo no hay efecto de la anestesia?

10. En una prueba para metabolismo de azúcar en la sangre, llevada a cabo en un intervalo de tiempo, la cantidad de azúcar encontrada está dada por $A(t) = 3.9 + 0.2t - 0.1t^2$, donde t es el tiempo medido en horas. Grafique la función y obtenga, a partir de ella, información relevante del problema (crecimiento, decrecimiento, ceros, etc).

11. La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía en su efectividad en el tiempo según

$$C(t) = -t^2 + 6t$$

donde C es la concentración del calmante en el suero medida en milígramos por litro para que haga efecto durante t horas. ¿ En qué instante la concentración es de 8 milígramos por litro? Grafique la función e interprete resultados en el contexto del problema.

12. Los biólogos hallaron que la velocidad de la sangre en una arteria es una función de la distancia de la sangre al eje central e la arteria. De acuerdo con la ley de Poiseuille, la velocidad (en centímetros por segundos) de la sangre que está a r centímetros del eje central de una arteria está dada por la función $S(r) = C(R^2 - r^2)$, donde C es una constante y R el radio de la arteria. Suponga que para cierta arteria, $C = 1.76 \times 10^5$ y $R = 1.2 \times 10^{-2}$ centímetros.

(a) Calcule la velocidad de la sangre en el eje central de esta arteria.

(b) Calcule la velocidad de la sangre equidistante de la pared arterial y el eje central.

13. Las vitaminas A-C-E se encuentran naturalmente concentradas en el organismo en un 0.06% por cm^3 de liquido corporal. Si se ingieren vitaminas A-C-E de manera adicional debido a algún tratamiento, el porcentaje de concentración por cm^3 de liquido corporal,

está dado por $f(t) = \dfrac{t+6}{100-t}$, donde t representa el tiempo de tratamiento medido en meses. Graficar la función, indicar dominio y recorrido e interprete en el contexto del problema.

14. Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de parásitos es p, donde
$$p(x) = \frac{900x}{10+45x}\,.$$
Realize la grafica de la función. Indique dominio, recorrido, intervalos de crecimiento y decrecimiento, estudie existencia de puntos máximos, mínimos de la función p. A continuación interprete estos resultados en el contexto del problema. ¿ Que sucede con el número de parásitos cuando la densidad de huéspedes es muy grande?

15. Los experimentos realizados por A. Clark sugieren que la respuesta $R(x)$ (en %) del músculo del corazón de una rana al inyectar x unidades de acetilcolina queda aproximada por la función
$$R(x) = \frac{100x}{b+x}$$
   (a) Calcule el valor de la constante b de modo que una concentración de 40 unidades de acetilcolina produzca una respuesta del corazón de 50% para una cierta rana.
   (b) Grafique la función R para $b < 0$, $b > 0$ y obtenga información concreta del problema.

16. Para estudiar la tasa a la que aprenden los animales, un estudiante de psicología realizó un experimento, de modo repetido se enviaba una rata de un extremo a otro de un laberinto de laboratorio. Suponga que el tiempo requerido por la rata para atravesar el laberinto en la $n-$ésima prueba es aproximadamente $f(n) = 3 + \dfrac{12}{n}$ minutos.
   (a) ¿Cuál es el dominio de f?
   (b) ¿Para qué valores de n tiene sentido la función en el contexto del experimento?
   (c) ¿Cuánto tiempo le tomó a la rata cruzar el laberinto en la tercera prueba?
   (d) ¿En qué prueba atravesó la rata por primera vez el laberinto en 4 minutos o menos?
   (e) ¿Podrá la rata atravesar alguna vez el laberinto en menos de 3 minutos?

3.2 Algebra de Funciones y Función Inversa

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para obtener una nueva función, por ejemplo las podemos sumar, multiplicar o componer. Respecto a las operaciones algebraicas, tenemos el siguiente resultado

Proposición 3.14 *(Algebra de Funciones). Sean* $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces* (αf), $(f \pm g)$, $(f \cdot g)$ *son funciones con dominio A. Si* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in A$ *entonces* $\frac{f}{g}$ *también es una función con dominio A. Además, para* $x \in A$, *se tiene*

(i) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

(ii) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

(iii) $(f\, g)(x) = f(x)\, g(x)$

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ejemplo 3.15

Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ x^3 - 5x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

y $g(x) = \sqrt{x^4+1}$, hallar

$$\frac{2f(-1) + 4\, g(0)\, f(2)}{f(1) - g(-2) + 3}.$$

Solución. Evaluando las funciones anteriores en los valores indicados, tenemos

$$f(-1) = 5/2\,,\ g(0) = 1\,,\ f(2) = -11\,,\ f(1) = -3\,,\ g(-2) = 17\,.$$

Reemplazando obtenemos

$$\frac{2f(-1) + 4\, g(0)\, f(2)}{f(1) - g(-2) + 3} = \frac{2 \cdot 5/2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}{-3 - 17 + 3} = \frac{39}{17}$$

□

También podemos combinar dos funciones aplicando primero una función a un número y después la otra función al número resultado. Esto se conoce como compuesta de funciones y su definición es como sigue.

Definición 3.16 *Sean* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones tales que* $Rec(f) \subset B$. *Se define la función compuesta* $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

En un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Note que la condición $Rec(f) \subset B$ es fundamental para poder dar un sentido a la función compuesta $g \circ f$.

Ejemplo 3.17 *Un estudio sobre prevención de enfermedades broncopulmonares, sugiere que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será* $c(p) = 0.5p + 1$ *partes por millón cuando la población sea* p *miles. Se estima que dentro de* t *años la población de la comunidad será* $p(t) = 10 + 0.1t^2$ *miles. Exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como función del tiempo.*

Solución. Como el nivel de monóxido de carbono está relacionado con la variable p, y esta a su vez está relacionada con la variable t, se deduce que la función compuesta

$$c(p(t)) = c(10 + 0.1t^2) = 6 + 0.05t^2$$

expresa el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función de la variable t.

$\square$

Ejercicio 3.18 *En una población de 5 mil personas se está transmitiendo una infección estomacal por bacterias. Sea* $p(t) = \dfrac{5000t}{t + 100}$ *el número de personas infectadas* t *días después del comienzo de la epidemia. Los estudios indican que la tasa con la cuál se propaga la epidemia es* $r(q) = \dfrac{q\,(5000 - q)}{10000}$ *donde* q *es el número de personas.*

(a) *Hallar* $r \circ p$ *e interprete el resultado en el contexto del problema.*

(b) *¿Cuántas personas estarán infectadas después de una semana?*

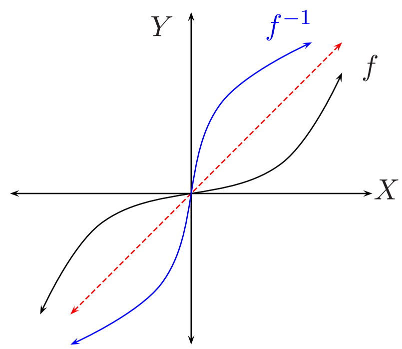
(c) *¿Cuál es la tasa de propagación después de una semana?*

Definición 3.19 *Diremos que una función* $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ *es invertible si existe una función* $f^{-1} : B \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ *tal que*

$$f^{-1} \circ f = I \quad y \quad f \circ f^{-1} = I, \tag{3.1}$$

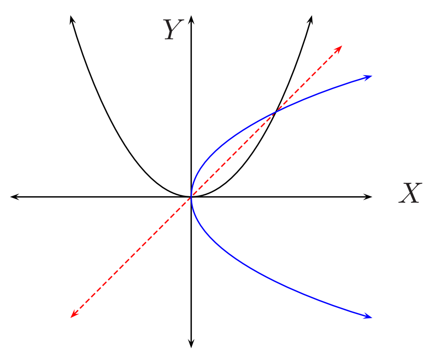
donde I *denota la función identidad* $I(x) = x$.

El efecto que tiene la inversa de una función f es que revierte el efecto de f, es decir, si f transforma x en $y = f(x)$, la función inversa toma y y lo transforma de nuevo en x. Geométricamente, la condición (3.1) nos indica que la gráfica de la función inversa se obtiene como reflexión de la gráfica de función sobre la recta diagonal $y = x$.



Ejemplo 3.20 *La función lineal* $f(x) = ax + b$, *con* $a \neq 0$, *tiene como función inversa a* $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

Note que no toda función tiene inversa. Como la inversa debe ser función, es necesario que todo valor y en el recorrido de f se transforme sólo en un valor de x. Por ejemplo, si consideramos la función cuadrática $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, reflejando su gráfica sobre la recta diagonal obtenemos una curva que no es la gráfica de una función.



La pregunta natural es entonces ¿bajo qué condiciones una función es invertible? Para responder esto, necesitamos algunos conceptos previos.

Definición 3.21 *Diremos que una función* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* **inyectiva** *si a imagenes iguales se tienen preimagenes iguales, esto es, si* $f(x_1) = f(x_2)$ *entonces* $x_1 = x_2$.

Geométricamente, una función real es inyectiva si cada recta horizontal que intersecta su gráfica lo hace en un sólo punto. Por ejemplo, la función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$ es inyectiva, ver Figuras $2a$, $2b$ y trazar rectas horizontales. Por otro lado la función cuadrática no es inyectiva, ver Figuras $3a$, $3b$ y trazar rectas horizontales.

Definición 3.22 *Diremos que una función* $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ *es* **sobreyectiva** *(o epiyectiva) si cada elemento del conjunto* B *tiene al menos una preimagen, esto es, si* $Rec(f) = B$ *.*

Geometricamente, una función real es sobreyectiva si cada recta horizontal por puntos de B , intersecta su gráfica en al menos un punto. Por ejemplo, la función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, es sobreyectiva (ver Figuras $2a$, $2b$) y la función cuadrática no es sobreyectiva (ver Figuras $3a$, $3b$).

Una función que es inyectiva y sobreyectiva se denomina función **biyectiva**. En base a los conceptos anteriores, tenemos la siguiente caracterización que nos indica las condiciones que debe cumplir una función para tener inversa.

Una función real f tiene función inversa si y sólo si f es biyectiva

Ejemplo 3.23 *En una población de 5 mil personas se está transmitiendo una infección estomacal por bacterias. Sea* $p(t) = \dfrac{5000t}{t+100}$ *el número de personas infectadas* t *semanas después del comienzo de la epidemia. Nos preguntamos ¿después de cuántas semanas el número de infectados es aproximadamente 400 personas?*

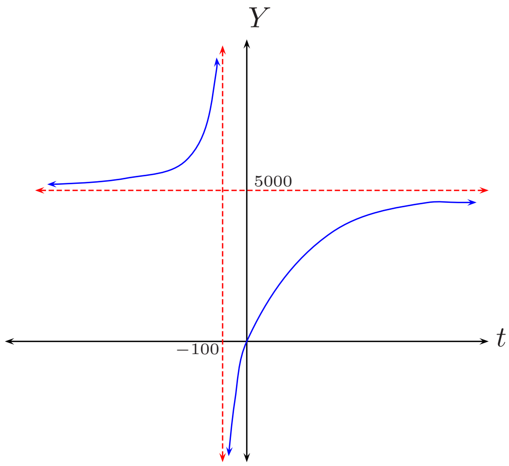
Solución. La función p nos indica el número de personas infectadas pasadas t semanas, sin embargo se nos está preguntando la situación inversa. Para saber si es posible responder a esto, veremos si la función p es biyectiva.

Estudiaremos la función desde el punto de vista algebraico. Primero nótese que $Dom(p) = \mathbb{R} \setminus \{-100\}$. Para obtener el recorrido, a partir de la igualdad $y = \dfrac{5000t}{t+100}$ despejamos t y se sigue que $Rec(p) = \mathbb{R} \setminus \{5000\}$. Luego para que p sea sobreyectiva debe estar definida de $\mathbb{R} \setminus \{-100\}$ en $\mathbb{R} \setminus \{5000\}$.

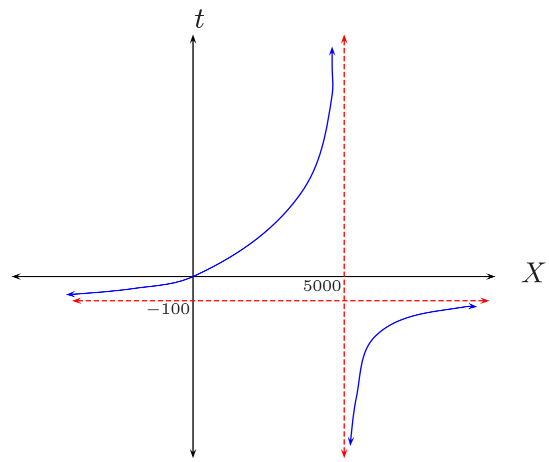
Para estudiar inyectividad, sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-100\}$ tales que $p(t_1) = p(t_2)$, esto es,

$$\frac{5000t_1}{t_1+100} = \frac{5000t_2}{t_2+100},$$

de donde $5000t_1\,(t_2+100) = 5000t_2\,(t_1+100)$. Desarrollando se sigue que $t_1 = t_2$ y por lo tanto p es inyectiva. Como la función p es biyectiva, existe su función inversa definida de $\mathbb{R} \setminus \{5000\}$ en $\mathbb{R} \setminus \{-100\}$ por $p^{-1}(x) = \dfrac{100x}{5000-x}$. Las gráficas de las funciones p y p^{-1} se muestran en las siguientes figuras

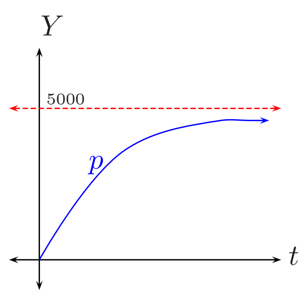


función p

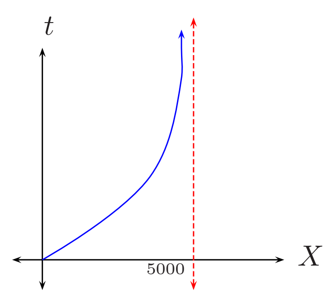


función p^{-1}

En el sentido del problema inicial, nos interesan sólo los valores $t \geqslant 0$. Note que $p^{-1}(400) = \dfrac{100 \cdot 400}{5000 - 400} = \dfrac{40000}{4600} \approx 8,69$. Esto nos indica que para tener 400 personas infectadas deben transcurrir cerca de 9 semanas. La siguiente figura nos muestra las funciones p y p^{-1} en el contexto del problema.



Función p



Función p^{-1}

$\square$

En la siguiente sección veremos un importante ejemplo de función inversa.

3.3 Función Exponencial y Función Logaritmica

3.3.1 Función Exponencial

La función exponencial tiene un rol importante no sólo en matemática, sino también en áreas de la economía, de las ciencias y de la salud.

Definición 3.24 *La función* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $a(x) = a^x$ *, donde* $a > 0$ *y* $a \neq 1$ *, es llamada función exponencial de base* a*.*

Vamos a estudiar algunas características importantes de estas funciones. La gráfica de una función exponencial depende de la base a. Tenemos

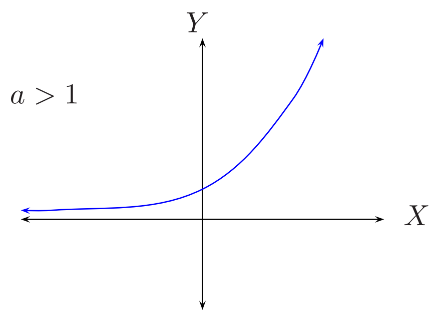


Figura 4a

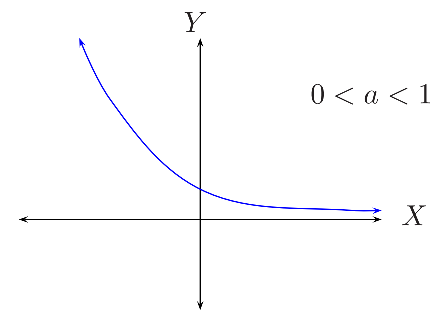


Figura 4b

En base a las gráficas anteriores obtenemos información relevante de la función exponencial.

- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}^+$.
- Si $a > 1$ la función es creciente para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente para todo $x \in \mathbb{R}$.
- En ambos casos la función no tiene ni máximos ni mínimos locales.
- Es inyectiva.
- Considerando el conjunto de llegada como $\mathbb{R}$ la función no es sobreyectiva.

De la definición, obtenemos las siguientes propiedades

1. $a(0) = 1$.
2. $a(x_1 + x_2) = a(x_1)\ a(x_2)$, esto es, $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\ a^{x_2}$.
3. $a(x_1 - x_2) = \dfrac{a(x_1)}{a(x_2)}$, esto es, $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$.

Uno de los números más importantes para base de una función exponencial, es el número irracional $e = 2.71828\ldots$, denotado así en honor del matemático suizo Leonardo Euler. La función exponencial de base e surge naturalmente en el estudio de crecimiento y decrecimiento de poblaciones. Supongamos que N_0 es el número de individuos presentes en una población en un tiempo $t = 0$ y λ es un número real fijo, el modelo

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda\, t}$$

nos indica el número de individuos que tiene la población en un tiempo t. Note que si $\lambda > 0$ la función N es creciente y por lo tanto estamos frente a un modelo de crecimiento poblacional. Si $\lambda < 0$ la situación se invierte y tenemos un modelo de decrecimiento de población.

Ejemplo 3.25 *Una bacteria en el oido medio se incrementa a razón del 2% cada hora. Suponga que al inicio de una infección bacteriana estaban presentes 120 bacterias. Determine el número de bacterias $N(t)$ presentes después de t horas. ¿Cuántas bacterias están presentes en el organismo después de 2 horas?*

Solución. Es claro del planteamiento del problema, que la función exponencial resultante debe ser creciente. Utilizando el modelo $N(t) = N_0 e^{\lambda\, t}$, y con los datos aportados, obtenemos que $N(t) = 120\, e^{0.02\, t}$. Pasadas 2 horas el número de bacterias presentes será de $N(2) \approx 125$.

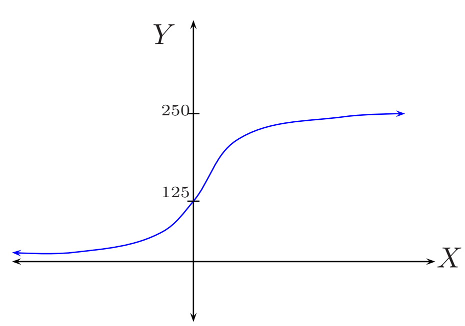
$\square$

Ejemplo 3.26 *El desarrollo de cierta epidemia se caracteriza por tener un comportamiento dado por la función*

$$f(t) = \frac{250}{1 + e^{-2t}},$$

que representa la cantidad de personas que la adquieren en un determinado tiempo t medido en semanas. ¿Cuántas personas habrán sido contagiados en tres semanas?

Solución. La gráfica de la función es



La función f en el contexto del planteo del problema, tiene sentido para $t \geqslant 0$. Observe que cuando parte la epidemia 125 personas estan contagiadas, esto se obtiene de $f(0)$. Como la función es creciente, sabemos que a medida que pasen las semanas el número de contagiados aumenta. Sin embargo después de muchas semanas el número de personas con la enfermedad tiende a estabilizarse en 250. Pasadas 3 semanas el número de contagiados es $f(3) = \frac{250}{1+e^{-6}} \approx 249$.

$\square$

3.3.2 Función Logaritmica

Vimos en la sección anterior que la función exponencial definida a $\mathbb{R}$ no es sobreyectiva. Ahora la vamos a considerar definida a $\mathbb{R}^+$, así obtenemos que la función exponencial es biyectiva y por lo tanto tiene función inversa. Llamaremos a la función inversa ***función logaritmica*** en base a. Tenemos la siguiente definición.

Definición 3.27 *Sea $a > 0\,, a \neq 1$. La función logaritmica $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ se define por la relación*

$$log_a(x) = y \quad \textit{si y sólo si} \quad a^y = x.$$

Como las funciones exponencial y logaritmica son inversas una de la otra se verifican las siguientes propiedades

$$\boxed{log_a(a^x) = x} \qquad \boxed{a^{log_a(x)} = x}$$

A partir de la gráfica de la función exponencial (ver Figuras 4a y 4b), por reflexión sobre la diagonal obtenemos la gráfica de la función logaritmica

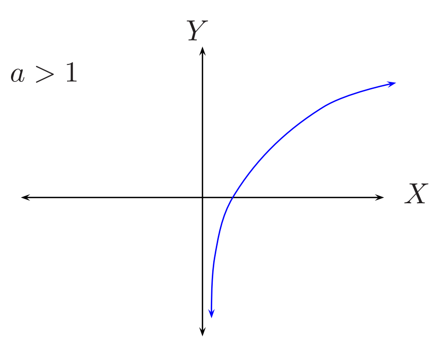


Figura 5a

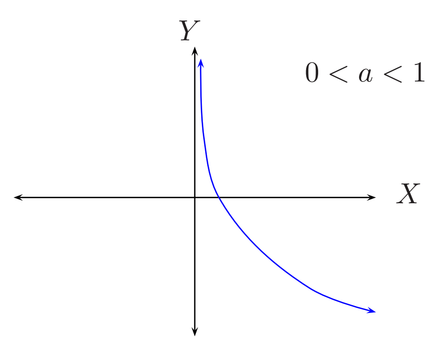


Figura 5b

Destacamos algunas propiedades de la función logaritmica.

- El dominio de la función es $\mathbb{R}^+$ y su recorrido es $\mathbb{R}$.
- Si $a > 1$ la función es creciente para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- En ambos casos la función no tiene ni máximos ni mínimos locales.

Además, a partir de la definición se verifican

1. $log_a(1) = 0$.
2. $log_a(a) = 1$.
3. $log_a(x_1\, x_2) = log_a(x_1) + log_a(x_2)$
4. $log_a(\frac{x_1}{x_2}) = log_a(x_1) - log_a(x_2)$
5. $log_a(x^y) = y\, log_a(x)$.

Si la función logaritmica tiene como base al número irracional e, se denomina función logaritmo natural y escribimos $ln(x) := log_e(x)$. Si la base es el número 10, escribimos $log(x) := log_{10}(x)$.

Ejemplo 3.28

Una bacteria estomacal debe ser tratada con un determinado tratamiento antibiótico antes que esten presentes 10000 de ellas en el organismo, de lo contrario el tratamiento sugerido es otro. Si se sabe que su número se incrementa a razón del 5% cada hora y que al inicio estaban presentes 400 bacterias, determine el número de bacterias $N(t)$ presentes después de t horas. ¿ De cuánto tiempo se dispone antes de cambiar el tratamiento?

Solución. Utilizando el modelo $N(t) = N_0 e^{\lambda\, t}$ y reemplazando los datos entregados, obtenemos $N(t) = 400e^{0.05\, t}$. Por otro lado, para estimar el tiempo del cual se dispone antes de cambiar el tratamiento, resolvemos

$$10000 = 400\, e^{0.05\, t} \quad \text{de donde} \quad e^{0.05\, t} = 25$$

aplicando la función inversa ln, se tiene $0.05t = ln(25)$, de donde $t \approx 64$. Luego, se disponen de aproximadamente 64 horas para comenzar con el primer tratamiento.

$\square$

Se ha determinado experimentalmente que la mayoría de las sustancias radioactivas se desintegran exponencialmente, de manera que la cantidad de una muestra de tamaño inicial N_0 que permanece después de t años está dado por la función $N(t) = N_0\, e^{-kt}$. La constante positiva k mide la tasa de desintegración, pero esta tasa generalmente está dada al especificar la cantidad de tiempo t necesario para que se desintegre la mitad de una muestra. Este tiempo se denomina **periodo radiactivo** o **vida media** de la sustancia. Podemos calcular explícitamente el periodo radiactivo, tenemos

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0\, e^{-kt} \quad \text{de donde} \quad t = \frac{ln(2)}{k}.$$

Ejemplo 3.29

El yodo radioactivo tiene un periodo radioactivo de 20.9 horas. Si se inyecta en el torrente sanguíneo, el yodo se acumula en la glándula tiroides.

(a) Después de 24 horas un médico examina la glándula tiroides de un paciente para determinar si su funcionamiento es normal. Si la glándula tiroides ha absorbido todo el yodo, ¿ qué porcentaje de la cantidad original debería detectarse?

(b) Un paciente regresa a la clínica 25 horas después de haber recibido una inyección de yodo radiactivo. El médico examina la glándula tiroides del paciente y detecta la presencia de 41.3% del yodo original. ¿ Cuánto yodo radiactivo permanece en el resto del cuerpo del paciente?

Solución. Como el yodo tiene un periodo radioactivo de 20.9 hrs, se sigue que $20.9 = \dfrac{ln(2)}{k}$ y de esto $k = 0.03316$. El modelo de desintegración radioactiva nos queda

$$N(t) = N_0\, e^{-0.03316t}.$$

Para responder (a), evaluamos $N(24) \approx 0.45N_0$. Como la glándula tiroides absorbió todo el yodo, concluimos que la cantidad presente es el 45% de la cantidad inicial.

Para contestar (b), evaluamos $N(25) \approx 0.4364N_0$. Como la glándula tiroides absorbe el 41.3% del yodo original, en el resto del cuerpo hay un $2,34\%$ de la cantidad de yodo inicial N_0.

□

La determinación y prescripción de las dosis de medicamentos son aspectos muy importantes en el área de la salud. Suponga que se quiere analizar el caso en que dosis iguales son administradas a un paciente cada I unidades de tiempo hasta que se alcance un nivel terapéutico y después la dosis es reducida lo suficiente para mantener el nivel terapéutico. La razón para mantener dosis reducidas está relacionada frecuentemente con los efectos tóxicos de las drogas. Supongamos que hay n dosis de P unidades cada una, una dosis se da en los tiempos $t = 0, I, 2I, \ldots, (n-1)I$, y que el nivel terapéutico T, es alcanzado en nI. Se sabe que en el instante $t = 0$ el paciente recibe las primeras P unidades de modo que la cantidad de droga en el cuerpo es P. En el instante $t = I$ la cantidad presente de la primera dosis es $P\,e^{-kt}$, $k > 0$, además en ese momento las segundas P unidades son suministradas. Así la cantidad total de la droga presente es

$$P + P\,e^{-kI}.$$

Continuando de esta manera, la cantidad T de medicamento presente, un intervalo de tiempo después de la última dosis ($t = nI$) es

$$T = P\,e^{-kI} + P\,e^{-2kI} + \cdots + P\,e^{-nkI}. \tag{3.2}$$

Multiplicando esta igualdad por e^{-kI} obtenemos

$$e^{-kI}T = P\,e^{-2kI} + P\,e^{-3kI} + \cdots + P\,e^{-(n+1)kI}. \tag{3.3}$$

Restando a (3.2) la igualdad (3.3), se tiene que $T - e^{-kI}T = Pe^{-kI} - Pe^{-(n+1)kI}$. Despejando

$$T = P\frac{1 - e^{-knI}}{e^{kI} - 1}$$

obtenemos el nivel terapéutico en términos de la dosis P, los intervalos de tiempo I, el número de dosis n y la vida media.

Ahora el objetivo es mantener el nivel terapéutico en el paciente suministrando una dosis reducida R en los instantes nI, $(n+1)I$, $(n+2)I$, y así sucesivamente. En el instante $t = (n+1)\,I$ pero antes de suministrar la segunda dosis reducida, la cantidad de medicamento en el sistema proveniente de la primera dosis reducida es $R\,e^{-kI}$, y la cantidad que permanece del nivel terapéutico es $T\,e^{-kI}$. Suponga que se requiere que la suma de estas cantidades sea el nivel terapéutico, esto es, $T = R\,e^{-kI} + T\,e^{-kI}$. Despejando R y reemplazando T obtenemos

$$R = P\,(1 - e^{-nkI}).$$

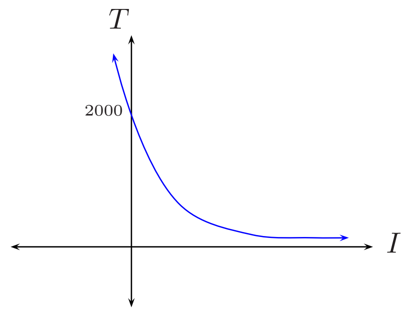
Ejemplo 3.30

La Teofilina es una droga utilizada en el tratamiento del asma bronquial y tiene una vida media de 8 horas en el sistema de un paciente relativamente sano y no fumador. Suponga que se dispone de 20 dosis para alcanzar el nivel terapéutico deseado cuando 100 miligramos le son administrados cada I horas. Determine el nivel terapéutico y la dosis reducida en función del tiempo I.

Solución. Aquí $n = 20$. Como la droga utilizada tiene una vida media de 8 horas, se sigue que $k = \frac{ln(2)}{8} \approx 0.0866$. Obtenemos que el nivel terapéutico en términos los intervalos de tiempo I es

$$T(I) = 100\frac{1 - e^{-1.732I}}{e^{0.0866I} - 1}$$

La gráfica de la función T es



A partir de la gráfica de la función, podemos deducir que si aumentamos los intervalos de tiempo en los cuales son administradas las dosis, el nivel terapéutico logrado es menor. Note que si $I = 0$ esto es, todas las dosis son administradas juntas, el nivel terapéutico es un valor máximo igual a 2000, sin embargo en un gran porcentaje de casos el organismo no tolera altas dosis de un medicamento. Note además que el nivel terapéutico óptimo, no necesariamente ocurre en el valor máximo.

$\square$

3.3.3 Ejercicios Propuestos

1. Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de cierta clase de gripe, aproximadamente $f(t) = \dfrac{2}{1+3e^{-0.8t}}$ miles de personas han contraído la enfermedad. Bosqueje la gráfica de la función, responda

   (a) ¿ Cuántas personas estaban infectados al comienzo del brote?

   (b) Después de un número grande de semanas, ¿cuántas personas estarán infectadas?

2. El isótopo radiactivo del galio, utilizado en el diagnóstico de tumores malignos, tiene un periodo radiactivo de 46.5 horas. Si se comienza con 100 miligramos de isótopo, ¿cuántos miligramos quedarán después de 24 horas? ¿Cuándo quedarán sólo 25 miligramos?

3. La ley de Fick establece que la concentración de soluto en una célula en el tiempo t es $f(t) = C\left(1 - e^{-kt}\right)$, donde C es la concentración constante del soluto que rodea la célula y k es una constante positiva. Suponga que para cierta célula, la concentración en el interior de la célula después de 2 horas es 0.8% de la concentración del exterior de la célula. Determine $f(t)$. ¿Qué representa k?

4. Un biólogo realizó un estudio sobre los factores que influyen en el crecimiento o decrecimiento de una población de parásitos presentes en el intestino delgado. El científico llegó a la conclusión que producto de una infección la cantidad de parásitos presentes

en el intestino se modela por

$$f(t) = 4 + te^{-kt}$$

donde t es el tiempo medido en días (t=0 es el primer día) y $f(t)$ es el número de parásitos en miles. Establezca el modelo en forma precisa (encuentre el valor de k), si se sabe que después de una semana hay 4.600 parásitos en el intestino. ¿Cuántos parásitos hay después de 15 días?

5. La concentración de un medicamento en un órgano al instante t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08 + 0.12 \cdot e^{-0.02t}$$

donde $x(t)$ son gramos/centímetros cúbicos (gr/cm^3)

   (a) ¿Cuál es la concentración pasado 1 minuto?

   (b) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0.18 gr/cm^3 de medicamento en el órgano?

6. Un decibel, llamado así en honor de Alexander Graham Bell, es el incremento mínimo del volumen del sonido detectable por el oído humano. En física, se demuestra que cuando se dan dos sonidos de intensidades I_1 e I_2 ($vatios/cm^3$), la diferencia en volumen es D decibeles, donde

$$D = 10\, log_{10}(I_1/I_2)$$

Cuando el sonido se clasifica en relación con el umbral de audición humana ($I_0 = 10^{-12}$), el nivel de conversación normal es aproximadaente 60 decibeles, mientras que en un concierto de rock puede ser 50 decibeles más alto.

   (a) ¿ Cuánto más intenso es un concierto de rock que una conversación normal?

   (b) El umbral de dolor se alcanza cuando el nivel de sonido es aproximadamente 10 veces tan alto como el de un concierto de rock. ¿ Cuál es el nivel del umbral de dolor en decibeles?

7. Después de que un estudiante con un virus gripal regresa a un campo universitario aislado de 3000 estudiantes, el número de estudiantes infectados después de t días, se pronostica por

$$N(t) = \frac{3000}{1 + 2999e^{-0.895t}}$$

   (a) ¿Cuántos estudiantes estarán infectados después de 10 días?

   (b) ¿En qué período de tiempo se estima que los infectados lleguen aproximadamente a 1000 estudiantes?

8. Una ley de curación de las heridas es $A = Be^{-\frac{n}{10}}$, siendo A (en mts^2) el área dañada después de n días, y B (en mts^2) el área original dañada. Hallar el número de días necesarios para reducir la herida a su tercera parte del área dañada.

9. El valor de reventa V de un equipo radiográfico se comporta de acuerdo a la ecuación $V = 750.000e^{-0.05t}$, en que t son los años transcurridos desde el momento de la compra.

   (a) ¿Cuál es el valor original del equipo radiográfico ?

   (b) ¿Cuál es el valor esperado de reventa después de 5 años ?

   (c) ¿Después de cuántos años el valor de reventa será de \$250000 ?

10. De un elemento radiactivo quedan N gramos después de t horas, donde

$$N(t) = 100e^{-0.035t}$$

   (a) ¿Cuántos gramos permanecen después de 10 horas ? ¿y después de 50 horas?

   (b) ¿Es posible estimar la cantidad de horas necesarias para que el elemento radiactivo ya no esté presente ?

11. La función definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-(b+mx)}}$$

   se denomina función logística y fue introducida por el biólogo matemático alemán Verhulst hacia el año 1840 para describir el crecimiento de poblaciones con recursos alimentarios limitados. Demuestre que

$$\ln\left(\frac{f(x)}{1 - f(x)}\right) = b + mx$$

12. Los peces crecen indefinidamente durante toda su vida. Su crecimiento se puede modelar mediante la función de Von Bertalanffy

$$L(x) = A\left(1 - e^{-kx}\right)$$

   donde $L(x)$ es la longitud a la edad de x años, con k y A constantes positivas.

   (a) Para $k = 1$, obtenga la edad del pez para que la longitud sea el 90% de A.

   (b) ¿Puede el pez alguna vez alcanzar la longitud A? Justifique su respuesta.

Capítulo 4

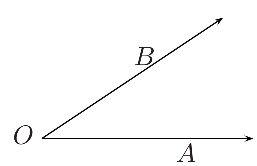
Trigonometría

El origen de la trigonometría data de hace más de 2000 años, cuando los griegos necesitaron métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos.

En este capítulo se estudian algunas funciones que son muy utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos o rítmicos, como las oscilaciones, el ciclo respiratorio y los latidos del corazón de los animales.

4.1 Ángulos

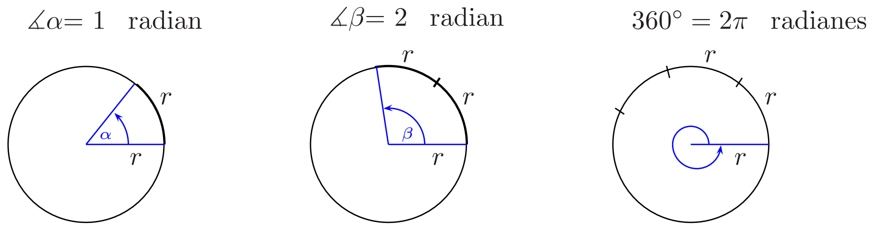
En geometría un ángulo se determina por dos rayos con un mismo punto inicial.



El punto O es llamado vértice del ángulo AOB, denotamos también los ángulos por letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \theta$, etc.

Una de las unidades de medida para ángulos es el ***grado***. Consideremos un círculo de centro O y radio r, y dividamoslo en 360 partes iguales. Cada una de estas representa un grado, luego 1 grado (1°) es, por definición $1/360$ partes de un círculo. Cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas minutos ($1^\circ = 60'$), y cada minuto se divide en 60 segundos ($1' = 60''$). Para medir un ángulo ubicamos el vértice de este en el centro del círculo y contamos los grados o fracción de ellos que hay entre los dos rayos. Para denotar la medida de un ángulo α escribimos $\measuredangle\alpha$.

Las medida de los ángulos en grados se usan en algunas áreas de aplicación como navegación, topografía e ingeniería. En aplicaciones científicas, lo usual es emplear medidas en radianes. Un ángulo tiene una medida de 1 ***radian*** si al colocar su vértice en el centro del círculo, la longitud del arco interceptado es igual al radio.



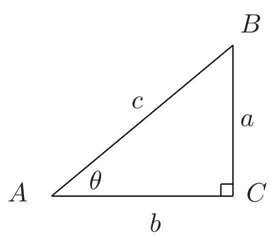
Para encontrar la medida correspondiente a 360° es necesario determinar el número de veces que un arco circular de longitud r puede colocarse a lo largo del círculo. Como el perímetro del círculo mide $2\pi r$, el número de veces que este arco de longitud r puede colocarse es 2π. Esto nos da la siguiente relación.

$$180^\circ = \pi \ radianes.$$

De esto, para cambiar de radianes a grados se multiplica por $180/\pi$. Para cambiar de grados a radianes se multiplica por $\pi/180$.

4.2 Funciones Trigonométricas de ángulos agudos

Consideremos un ángulo θ tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. De la geometría clásica, sabemos que dado este ángulo agudo, podemos formar triángulos rectángulos que lo contienen como ángulo interior. Anotemos $\triangle ABC$ a uno de estos triángulos.



Note que dados dos triángulos rectángulos que contengan a θ como ángulo interior, por Teorema de Thales, ellos son semejantes y por lo tanto sus lados proporcionales. Esto nos permite definir, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, las siguientes funciones trigonométricas.

- Seno : $sen(\theta) = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$
- Coseno : $cos(\theta) = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$
- Tangente : $tg(\theta) = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \dfrac{a}{c}$.

Utilizando el Teorema de Pitágoras, se obtiene la siguiente relación entre las funciones seno y coseno.

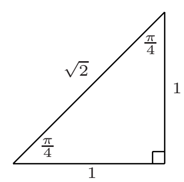
$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1. \tag{4.1}$$

Además de la definición de tangente, seno y coseno se tiene que

$$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}. \tag{4.2}$$

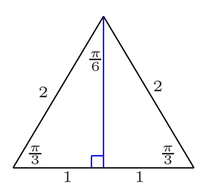
Ejemplo 4.1 *Vamos a calcular las funciones trigonómetricas anteriores, en algunos ángulos notables.*

Sea $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y consideremos el triángulo rectángulo isósceles



De la definición, se obtienen $sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Sea ahora $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Este valor, es la medida de cada ángulo interior de un triángulo equilátero.



A partir del triángulo rectángulo formado por dos lados y la altura del triángulo equilátero, se obtienen

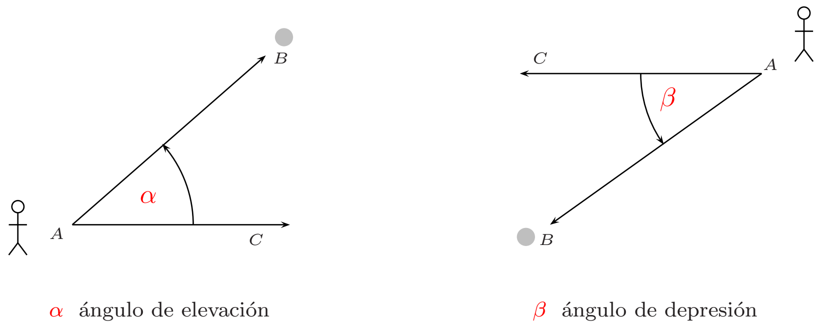
$$sen(\tfrac{\pi}{3}) = cos(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen(\tfrac{\pi}{6}) = cos(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}$$

$$tg(\tfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3}, \qquad tg(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

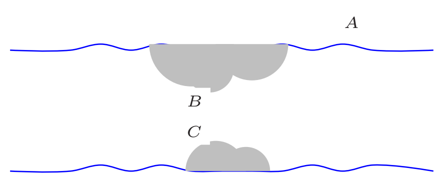
□

Para diversas aplicaciones, es útil conocer los términos *ángulo de elevación* y *ángulo de depresión*. Consideremos un observador A y un objeto B, sea C un punto tal que el trazo AC es horizontal, como en la siguiente figura

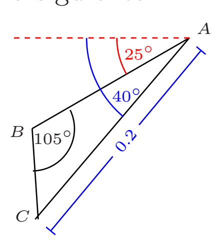


Ejemplo 4.2 *La enfermedad cardiovascular se asocia a ateroescleorosis o enfermedad ateromatosa de los vasos sanguíneos, que se produce por un exceso de colesterol en la sangre, la que se deposita e inflama las paredes de las arterias, reduciendo su diámetro y terminando por dificultar el flujo sanguíneo. Desde un punto A cercano a la pared de la arteria se observa el punto extremo de una masa de colesterol (B) con un ángulo de depresión de $25°$, también desde A es posible ver con un ángulo de depresión de $40°$ el punto extremo de otra masa de colesterol (C) en el lado opuesto de la arteria. Si la distancia entre A y C es de 0,2mm y se estima que el ángulo $\angle ABC$ es $105°$, hallar la distancia entre B y C.*

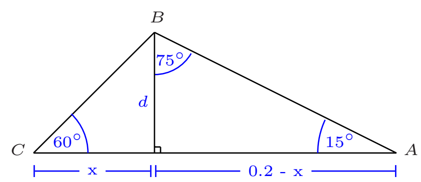
Solución. La siguiente figura, muestra una vista frontal de una arteria y su deformación producto de la acumulación de colesterol



De los datos, tenemos el triángulo siguiente



Trazando la altura desde el vértice B al lado AC y observando que $\angle CAB = 15°$ se tienen las siguientes relaciones



$$tg(60°) = \frac{d}{x}$$

$$tg(15°) = \frac{d}{0.2 - x}$$

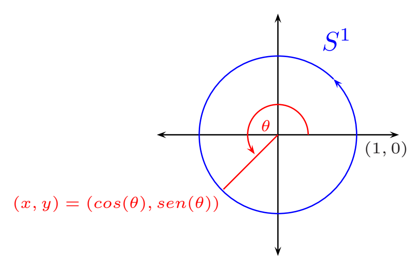
De esto se obtiene que $x = 0.026mm$ y $d = 0.045mm$, por Teorema de Pitágoras se sigue que $CB = 0.052mm$.

$\square$

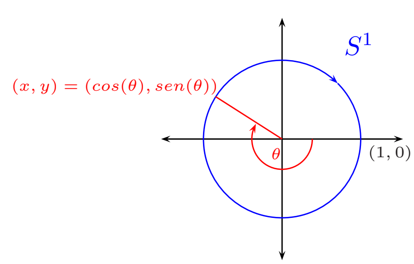
4.3 Funciones Trigonométricas de números reales

Note que en la definición de las funciones seno, coseno y tangente, se está considerando como dominio el intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, nos preguntamos ¿es posible extender este dominio de definición a todos los números reales manteniendo las identidades (4.1) y (4.2)?. En el caso de las funciones seno y coseno, su dominio será efectivamente todo el conjunto $\mathbb{R}$, pero para la tangente deberemos quitar algunos valores. Para hacer esta extensión, sea S^1 el círculo de centro en el punto $(0, 0)$ y radio 1. Definimos la funciones seno y coseno como sigue

- Para $\theta \geqslant 0$, partiendo del punto $(1, 0)$, en sentido antihorario, recorremos sobre el círculo S^1 una longitud θ, determinando un punto sobre el círculo de coordenadas $(x, y) = (cos(\theta), sen(\theta))$.



- Para $\theta < 0$, partiendo del punto $(1, 0)$, en sentido horario, recorremos sobre el círculo unitario S^1 una longitud $|\theta|$, determinando un punto sobre el círculo de coordenadas $(x, y) = (cos(\theta), sen(\theta))$.



De este modo las funciones seno y coseno están bien definidas y tienen como dominio a $\mathbb{R}$. A partir de la extensión anterior, obtenemos la siguiente información

1. Si $\theta > 2\pi$ ó $\theta < -2\pi$ entonces recorremos el círculo más de una vez, repitiéndose los valores de seno y coseno, esto significa que las funciones son períodicas de período 2π.

2. Como $(cos(\theta), sen(\theta))$ es un punto del círculo de radio 1, se sigue que

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1,$$

manteniéndose verdadera la identidad (4.1) para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

3. El recorrido de la función seno y coseno es el intervalo $[-1, 1]$.

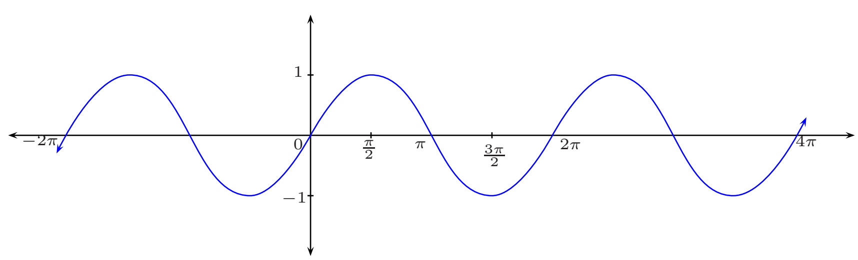
4. Si $\theta = 0$ entonces $(cos(0), sen(0)) = (1, 0)$, luego $cos(0) = 1$ y $sen(0) = 0$.

5. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces $(cos(\frac{\pi}{2}), sen(\frac{\pi}{2})) = (0, 1)$, luego $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ y $sen(\frac{\pi}{2}) = 1$.

6. Si $\theta = \pi$ entonces $(cos(\pi), sen(\pi)) = (-1, 0)$, luego $cos(\pi) = -1$ y $sen(\pi) = 0$.

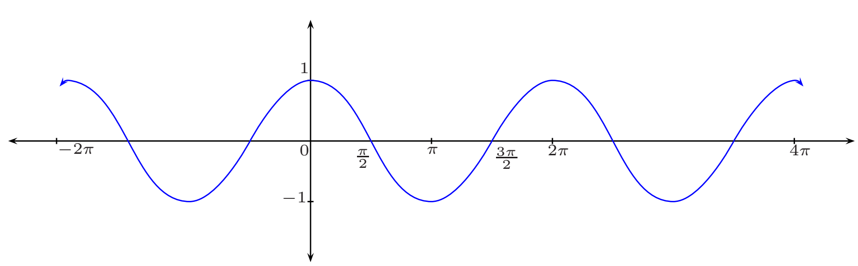
7. Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$ entonces $(cos(\frac{3\pi}{2}), sen(\frac{3\pi}{2})) = (0, -1)$, luego $cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ y $sen(\frac{3\pi}{2}) = -1$.

8. La gráfica de la función seno es



9. Desde la gráfica vemos que $sen(-x) = -sen(x)$, esto significa que la función seno es *impar*.

10. La gráfica de la función coseno es

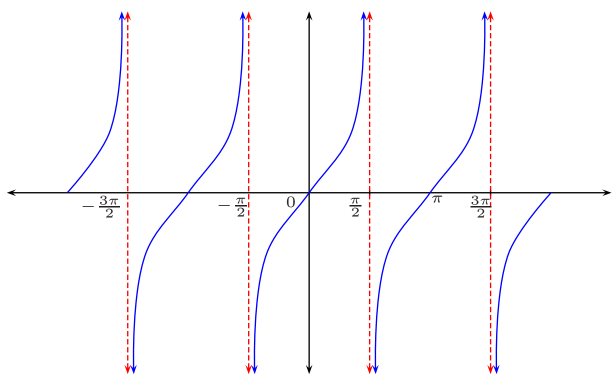


11. Desde la gráfica vemos que $cos(-x) = cos(x)$, esto es, la función coseno es *par*.

Definimos la función tangente como $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$. El dominio de la función tangente es

$$Dom(tg) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

y su gráfico es



Desde la gráfica, observamos que el recorrido de la función tangente es $\mathbb{R}$, es una función periódica de período π, es una función impar.

Las siguientes expresiones son llamadas funciones trigonométricas recíprocas.

- Secante: $sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$. El dominio de la función secante es

$$Dom(sec) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

- Cosecante: $cosec(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$. El dominio de la función cosecante es

$$Dom(cosec) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

- Cotangente: $cotg(x) = \dfrac{1}{tg(x)}$. El dominio de la función cotangente es

$$Dom(cotg) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ejercicio 4.3 *Bosquejar la gráfica de las funciones recíprocas, a partir de ellas, determinar recorrido, paridad, imparidad, período, etc.*

Muchos problemas prácticos involucran funciones trigonométricas, especialmente las funciones seno y coseno. A continuación, estudiaremos un modelo más general de dichas funciones.

Se definen

$$f(x) = A + Bsen(Cx + D) \quad \text{y} \quad g(x) = A + Bcos(Cx + D)$$

dónde A, B, C, D son números reales, $C \neq 0$, que denotan

- $\frac{2\pi}{C}$ es el período de las funciones.
- A es la traslación vertical.
- $|B|$ es la amplitud de la onda.
- $-\frac{D}{C}$ es el desplazamiento de fase (o desface).

La gráfica de las funciones f y g se basa en la gráfica de las funciones seno y coseno respectivamente, veamos el siguiente ejemplo.

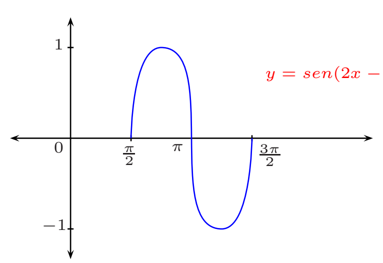
Ejemplo 4.4 *Al inyectar un determinado fármaco a una rata de laboratorio se observa que el animal presenta variaciones de temperatura en su sistema interno. Se logra establecer que dichas variaciones de temperatura, en grados Celsius, se modelan mediante la función*

$$f(x) = 3 - \frac{1}{2}sen(2x - \pi)$$

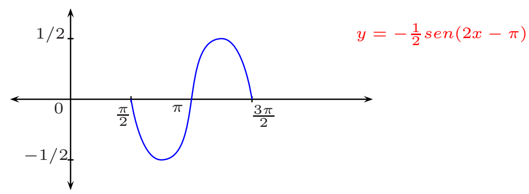
dónde x es el tiempo transcurrido desde que se inyecta el fármaco (en minutos). Graficar la función f indicando amplitud, período y desplazamiento de fase. A partir de la gráfica, indique información relevante del problema.

Solución. En este caso, tenemos que el período de f es $\frac{2\pi}{2} = \pi$, la traslación vertical es 3, la amplitud es $\frac{1}{2}$ y el desface $x = \frac{\pi}{2}$. Haremos la gráfica de la función en varias étapas.

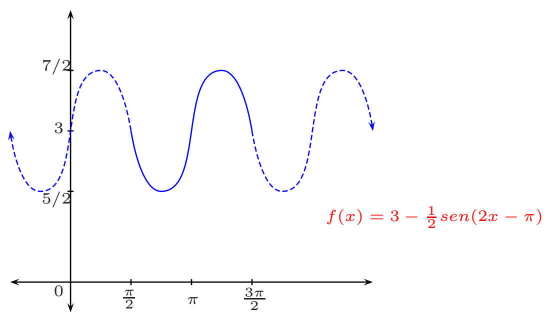
Primero, graficamos la función auxiliar $y = sen(2x - \pi)$ en el intervalo principal. Para determinar dicho intervalo, ubicamos en el eje X el desface (punto inicial del intervalo), a dicho valor le sumamos el período obteniendo el punto final del intervalo y graficamos con ese dominio la onda básica de la función seno. Así



En una segunda étapa, graficamos la función auxiliar $y = -\dfrac{1}{2}sen(2x - \pi)$ en el intervalo principal, obtenemos



Finalmente, trasladamos verticalmente la curva anterior y recordando que f es periódica, obtenemos la gráfica de la función:



En el contexto del problema, debemos considerar $x \geqslant 0$. Note que al inyectar el fármaco hay una variación de temperatura de 3 grados Celsius, luego esta variación comienza a aumentar hasta llegar a 3.5 grados pasados $\frac{\pi}{4}$ minutos, este valor corresponde a un máximo relativo. A partir de ese instante, la variación de temperatura decrece, obteniéndose un valor mínimo relativo pasados $\frac{3\pi}{4}$ minutos. En ese momento la variación de temperatura aumenta de 2.5 a 3 grados cuando han pasados π minutos. Este comportamiento comienza a repetirse a intervalos de longitud π. Observe que existen infinitos extremos relativos.

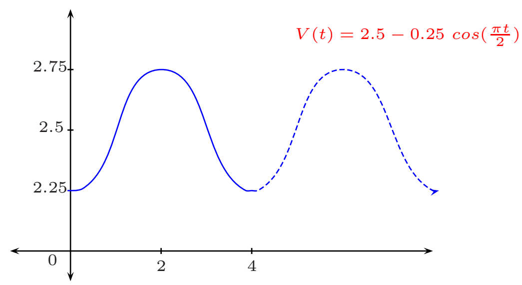
$\square$

Ejemplo 4.5 *Un paciente en reposo inspira y expira 0.5 litros de aire cada 4 segundos. Al final de una expiración, le quedan todavía 2.25 litros de aire de reserva en los pulmones. Después de t segundos de iniciado el proceso, el volumen de aire en los pulmones (en litros), en función del tiempo es*

$$V(t) = 2.5 - 0.25\ cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

Graficar la función volumen. ¿En qué instante el volumen es máximo? ¿mínimo? ¿cuál es el valor del volumen máximo y mínimo?

Solución. Como el período es $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ y el desface ocurre en $t = 0$, el intervalo principal del gráfico es $[0, 4]$. Hay una traslación vertical de 2.5 unidades y una amplitud de la onda 0.25 unidades. La porción del gráfico acorde al enunciado es



Comentemos información que nos entrega el gráfico de la función volumen. Observe que un período completo de inspiración y expiración ocurre cada 4 segundos. En los primeros dos segundos el pulmón recibe aire, llegando a un volumen máximo de $2.75\, l$, luego comienza a disminuir el volumen llegando al mínimo de $2.25\, l$ a los 4 segundos.

Si para tomar una radiografía, el volumen óptimo de aire en el pulmón es $2.5\, l$, ¿cuántos segundos hay que esperar desde que comienza la inspiración para tomar el examen?

□

4.4 Identidades Trigonométricas

Una identidad es una ecuación que se cumple para todos los valores de una o más variables. Las identidades relacionadas con funciones trigonométricas se denominan *identidades trigonométricas* y pueden emplearse para simplificar ciertas expresiones.

Las fórmulas siguientes para hallar el coseno y el seno de la suma y resta de dos ángulos son particularmente útiles. Las demostraciones de estas identidades pueden encontrarse en la mayor parte de los textos de trogonometría y, por tanto, se omiten aquí. Para α, β en $\mathbb{R}$ se verifican

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)\, cos(\beta) \pm cos(\alpha)\, sen(\beta)$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)\, cos(\beta) \mp sen(\alpha)\, sen(\beta)$$

Si los ángulos α y β, en las fórmulas de adición anteriores, son iguales, las identidades pueden rescribirse como sigue

$$sen(2\alpha) = 2\, sen(\alpha)\, cos(\alpha)$$

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$$

Ejemplo 4.6 *Demuestre que* $1 + tg^2(\theta) = sec^2(\theta)$, *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$.

Solución.

$$1 + tg^2(\theta) = 1 + \frac{sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)} = \frac{cos^2(\theta) + sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)} = \frac{1}{cos^2(\theta)} = sec^2\theta.$$

$\square$

Ejercicio 4.7 *Demuestre que* $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)\, tg(\beta)}$. *Utilice esto para probar que* $tg(2\alpha) = \dfrac{2tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}$.

4.5 Ejercicios Propuestos

1. Dado que $sen(\theta) = \dfrac{3}{5}$ y que θ está en el primer cuadrante, hallar los otros valores funcionales.

2. Dado que $tg(\theta) = -\dfrac{2}{3}$ y que θ está en el segundo cuadrante, hallar los otros valores funcionales.

3. Si $sen(\theta) = -\dfrac{1}{3}$ y que θ está en el tercer cuadrante, hallar el valor de

$$\frac{sen(2\theta) + cos(\theta)}{4 + 3tg^2(\theta)}$$

4. Demuestre las siguientes identidades

   (a) $sen(a) + sen(b) = 2\, sen(\frac{a+b}{2})\, cos(\frac{a-b}{2})$

   (b) $sen(a) - sen(b) = 2\, cos(\frac{a+b}{2})\, sen(\frac{a-b}{2})$

   (c) $cos(a) + cos(b) = 2\, cos(\frac{a+b}{2})\, cos(\frac{a-b}{2})$

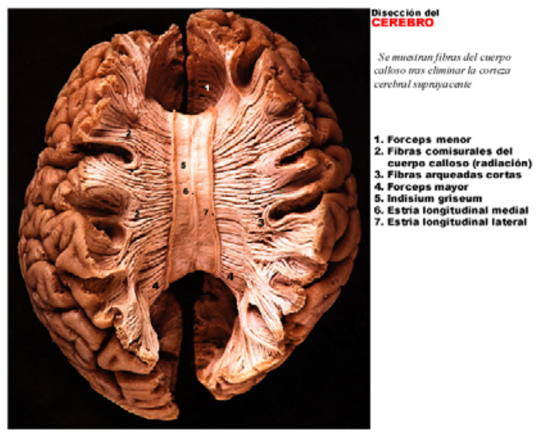
   (d) $cos(a) - cos(b) = 2\, sen(\frac{a+b}{2})\, sen(\frac{a-b}{2})$

   (e) $[\, sen(t) + cos(t)\,]^2 = 1 + sen(2t)$

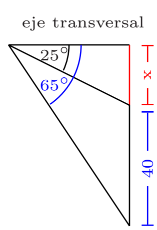
   (f) $[\, tg(t) - sec(t)\,]^2 = \dfrac{1 - sen(t)}{1 + sen(t)}$

5. Un impacto de bala perfora el pulmón. Los puntos A y B están situados en lados opuestos de la herida. El punto C está a $50mm$ de A. Se determina que la medida de $\measuredangle BAC$ es 112° y que la medida del $\measuredangle ACB$ es de 42°. ¿Cuál es el diámetro de la herida?

6. Al analizar la imagen de las fibras del cuerpo calloso tras eliminar la corteza cerebral suprayacente se observa una masa, que podría corresponder a un tumor, que está situado al oeste de los forceps mayor que están a 3cm de distancia uno del otro en una horizontal. Los ángulos de elevación a la masa desde los dos forceps son 17° y 78°. ¿A qué distancia del eje que une los forceps mayor está el tumor?



7. En el esqueleto humano, el muslo sólo lo constituye el fémur, el hueso más largo del cuerpo. Se ha detectado en una persona una diferencia entre el largo del fémur izquierdo y derecho. Para que el diámetro transversal de la pelvis y el fémur formen un ángulo recto es necesario ubicar en el fémur una prótesis de longitud x. Si la situación se describe en la figura



Hallar el valor de x.

8. Dadas las siguientes funciones indique período, amplitud, desface, traslación vertical y realice la gráfica.

(a) $f(x) = 2 + sen(4x)$.

(b) $g(t) = -3 + 5cos(x - 1)$

(c) $h(x) = 4 - \frac{3}{5}sen(4x + \pi)$

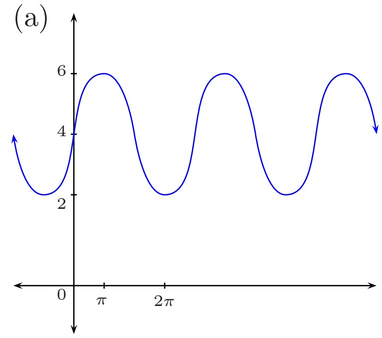
(d) $f(x) = \frac{1}{2} - 3sen(2x + \pi)$.

(e) $g(t) = -1 - 4cos(2x - \pi)$

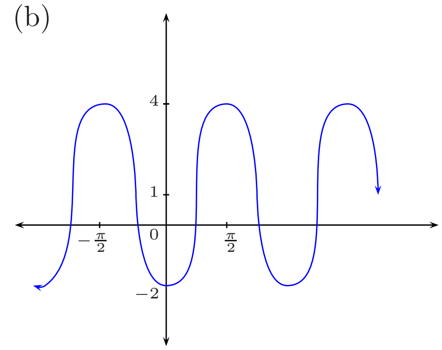
(f) $h(x) = \frac{4}{5}cos(3x + 4\pi)$

9. Dadas las siguientes gráficas de ondas seno y coseno, en cada caso, indique la función que las origina.

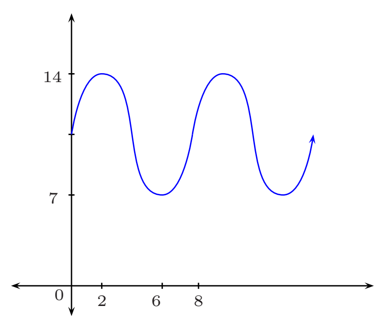
(a)



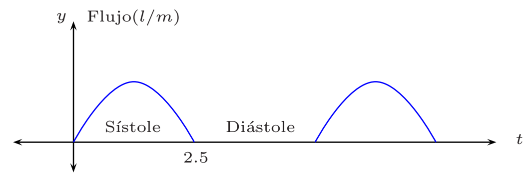
(b)



10. Las ondas cerebrales empezaron a identificarse a raíz de los estudios del sueño. Partiendo de estas investigaciones se dividen las posibles ondas cerebrales en cuatro grupos diferentes: beta, alfa, zeta, delta. La siguiente figura muestra un encefalograma de las ondas producidas durante el sueño (tipo alfa) en el cerebro humano. Si la gráfica de la función $W(t) = asen(bt + c) + d$, con t tiempo medido en segundos, representa a estas ondas ¿cuál es el valor de a, b, c y d?



11. La acción de bombeo del corazón consiste en la fase sistólica en la que la sangre pasa del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y la fase diastólica durante la cual se relaja el músculo cardiaco. Para modelar un ciclo completo de este proceso se usa la función $y = asen(bt)$ cuya gráfica se muestra en la figura. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $1/4$ de segundo y corresponde a una intensidad máxima de flujo de 8 litros por minuto. Obtenga a y b e interprete en el contexto del problema.



12. Un espirograma es un instrumento que registra en un gráfico el volumen del aire en los pulmones de una persona en función del tiempo. Un trazado de este gráfico está dado por la función $V(t) = 3 + \frac{1}{20}\, sen\left(160\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, el tiempo está medido en minutos y el volumen en litros.

    (a) Dibuje la porción del gráfico que tiene relación con el problema.

    (b) ¿Cuál es el volumen para el tiempo cero?

    (c) ¿Para qué valor de t el volumen es de 3,025 litros?

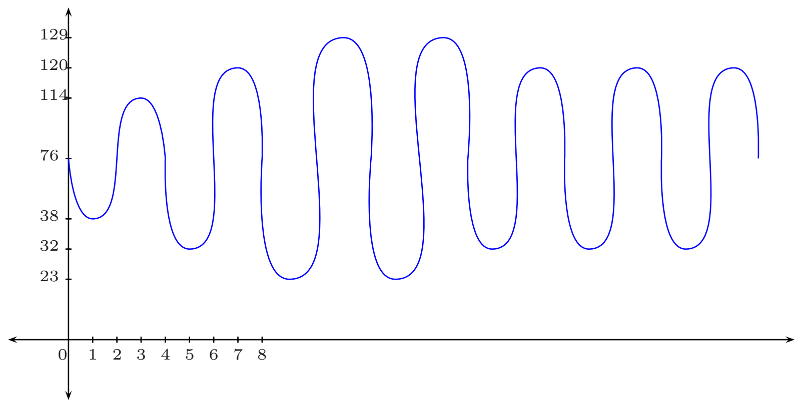
    (d) ¿En qué instante el volumen es máximo? ¿Cuál es el valor del volumen máximo?

    (e) ¿En qué instante el volumen es mínimo? ¿Cuál es el valor del volumen mínimo?

13. Para una persona en reposo la velocidad, en litros por segundo, del aire que fluye en un ciclo respiratorio es $v(t) = 0,85\, sen\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, donde t se mide en segundos. Grafique la función e indique la parte del gráfico acorde con el enunciado. A partir del gráfico, obtenga información relevante del problema, por ejemplo máximos, minímos, duración del ciclo respiratorio, etc.

14. La cantidad de bióxido de azufre, obtenido de la combustion de combustible liberados hacia la atmósfera de una ciudad varía estacionariamente. Suponga que el número de toneladas del contaminante liberado en la atmósfera durante cualquier semana después del primero de Enero es $A(n) = 1.5 + cos\left(\frac{n\pi}{26}\right)$, para $0 \leqslant n \leqslant 104$. Grafique la función en el intervalo indicado y describa el problema a partir de ella.

15. En cierto trabajo de investigación se estudió la adaptación fisiológica y bioquímica del caballo mestizo de tiro al realizar trabajos de labranza en suelos arroceros. Se utilizaron caballos clínicamente sanos durante una jornada de 5 horas. Se registro la frecuencia cardíaca y respiratoria. El siguiente gráfico indica el número de latidos por minuto de un caballo



Si se sabe que la curva se describe por funciones seno y/o coseno, hallar función que la origina. A partir de la gráfica anterior, obtener la mayor información posible del problema, por ejemplo, número máximo (mínimo) de latidos, ¿se recupera el ritmo cardíaco?

Por otra parte, en esta investigación, se encontró además que la frecuencia respiratoria se modela por la función $r(t) = 50 + 45sen(\pi t)$. Graficar la información e interpretar en el ámbito del problema.

16. Se cree que el bienestar emocional de una persona varía periódicamente con el tiempo t, de manera que el patrón se repite cada 28 días. Suponiendo que su estado emocional era neutral en el momento de su nacimiento, que E_0 es el nivel emocional máximo, hallar la función que describe el bienestar emocional si esta se define por seno y/o coseno. ¿Cuál será su nivel emocional en su vigésimo primer cumpleaños?

    En la misma persona, se cree que su estado de bienestar físico sigue un patrón periódico similar, sólo que esta vez el patrón se repite cada 23 días. Si P_0 es el nivel máximo de bienestar físico, hallar una función para establecer su estado físico en el momento t y determine el nivel en su vigésimo primer cumpleaños. ¿En que días coincidirán los niveles máximos de sus ciclos físicos y emocional?

Capítulo 5

Límites y Continuidad

5.1 Límites

Los antiguos griegos utilizaban procedimientos basados en límites para calcular áreas. Por ejemplo, cubrían una región de forma tan completa como fuera posible utilizando triángulos, sumando las áreas de los triángulos obtenían una aproximación al área de interés. Sin embargo no fueron los griegos quienes dieron una definición rigurosa del procedimiento. El matemático francés Augustine-Louis Cauchy (1789-1857) fue el primero en desarrollar una definición formal de límite. La definición que usamos en nuestros días se remonta al matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897).

Consideremos una función real f definida en algún subconjunto de $\mathbb{R}$. Veamos un ejemplo que motivará la posterior definición de límite.

Respecto al crecimiento de poblaciones, en individuos con apareamiento estacional continuo, no existe una escala de tiempo fija para la generación de nuevas crias. En este caso, es necesario modelar como cambia el tamaño de la población en intervalos de tiempo pequeños. Suponga que la tasa de crecimiento media de una población en un intervalo de tiempo $[1, 1+h]$ es

$$f(h) = \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

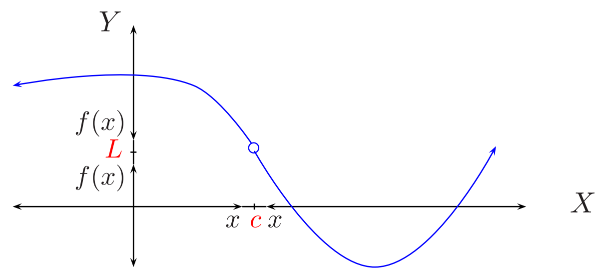
Para algunos valores de h cada vez más próximos de cero, utilizando una calculadora, obtenemos los valores de la función f

h	$f(h)$
-0.1	1.9
-0.01	1.99
-0.001	1.999
-0.0001	1.9999
-0.00001	1.99999

h	$f(h)$
0.1	2.1
0.01	2.01
0.001	2.001
0.0001	2.0001
0.00001	2.00001

Note que mientras h tiende (se aproxima) a 0 , la función $f(h)$ tiende a 2. Para esta idea de acción-reacción, diremos que el límite de $f(h)$ cuando h tiende a 0 es 2. Formalmente tenemos la siguiente definición

Definición 5.1 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x \in A$ con $0 < |x-c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.*



Notación: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, se lee el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L.

Observaciones 5.2

1. El límite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ puede o no existir. Si el límite existe, esto es, L es finito se dice que $f(x)$ converge a L, si no existe, se dice que $f(x)$ diverge cuando x tiende a c.

2. El hecho que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, significa que $f(x)$ puede tomar valores arbitrariamente cercanos a L siempre que x esté suficientemente cerca de c.

3. Es conveniente tener en cuenta que se ha dicho que x está cercano a c, pero no es igual a c, de hecho, no necesariamente c pertenece al dominio de la función f.

Ejemplo 5.3 *Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, una función polinomial, entonces*

$$\lim_{x\to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 .$$

En particular:

(i) $\lim\limits_{x\to c} a_0 = a_0$, *esto es, el límite de una constante es la constante.*

(ii) $\lim\limits_{x\to c}(a_1 x + a_0) = a_1 c + a_0$.

Ejercicio 5.4 *Utilizando una tabla de valores o la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ *compruebe que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

5.1.1 Propiedades de los límites

A continuación se presentan ciertas leyes de límites de funciones.

Sea a una constante en $\mathbb{R}$ y supongamos que

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x)$$

existen. Entonces se verifican las siguientes propiedades

1. $\lim\limits_{x\to c} af(x) = a \lim\limits_{x\to c} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, supuesto que $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$.

Ejemplos 5.5 *Calcular los siguientes límites*

1. $\lim\limits_{x\to 2} 5x^3 - x^2 + 3x + 5$

   Solución. Aplicando las propiedades 1 y 2, o alternativamente el ejemplo 5.3, se tiene

$$\lim_{x\to 2} 5x^3 - x^2 + 3x + 5 = 47\,.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+4}{x^2+1}$

   Solución. Utilizando las propiedades 4 y 2, se obtiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x^2+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x+4}{\lim\limits_{x\to 1} x^2+1} = \frac{5}{2}\,,$$

   suponiendo que existen los límites del numerador y del denominador y que el límite del denominador no es igual a 0.

□

3. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

Solución. Note que en este caso no podemos usar la propiedad 4 ya que el límite del denominador es 0. Manipulando algebraicamente la función obtenemos

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8\,.$$

$\square$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

Solución. También en este caso, el límite del denominador es 0. Es necesario simplificar la función. Tenemos

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{t\to 3}(x+1) = 4\,.$$

$\square$

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-1}$

Solución. Para resolver este límite racionalizamos la expresión del numerador y factorizamos el denominador,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-1} &= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{(x-1)(x+1)}\,\frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+5}+2} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x+5-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+5}+2)} = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$\square$

6. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

Solución. Desarrollando el cubo de binomio presente en la función, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(12+6h+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 12+6h+h^2 = 12
\end{aligned}$$

□

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{x}$

Solución. Para calcular este límite vamos a utilizar el resultado del ejercicio 5.4 y la propiedad 3 de límites.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} \; \frac{1+cos(x)}{1+cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2(x)}{x\,(1+cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x\,(1+cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{1+cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+cos(x)} = 0
\end{aligned}$$

□

5.1.2 Límites laterales

Como se hizo notar en la observación 5.2 un límite puede o no existir. En esta sección estudiaremos un importante criterio que nos permite concluir al respecto. Para introducir el tema, veamos el siguiente ejemplo

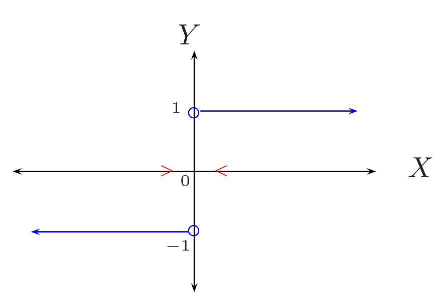
Ejemplo 5.6

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Nos preguntamos ¿existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Como $|x| = x$ para $x \geqslant 0$ y $|x| = -x$ para $x \leqslant 0$, se obtiene que

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de f,



Puede verse que $f(x)$ converge a 1 cuando x tiende a 0 por la derecha y que $f(x)$ converge a -1 cuando x tiende a 0 por la izquierda. Como los valores del límite son distintos, dependiendo si x tiende a 0 por la derecha o izquierda, se concluye que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Las frases x *se aproxima a* c *por la derecha* y x *se aproxima a* c *por la izquierda* expresan el significado de los siguientes conceptos, llamados *límites laterales*.

Definición 5.7 *(Límite lateral derecho) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha es L, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x \in A$ con $0 < x - c < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Notación: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$, se lee el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha es L.

Definición 5.8 *(Límite lateral izquierdo) Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda es M, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x \in A$ con $0 < c - x < \delta$ se tiene que $|f(x) - M| < \varepsilon$.*

Notación: $\lim_{x\to c^-} f(x) = M$, se lee el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda es M.

Dados estos conceptos, podemos establecer el siguiente criterio de convergencia de límites

$$\text{Existe } \lim_{x\to c} f(x) \text{ si y sólo si existen } \lim_{x\to c^+} f(x), \lim_{x\to c^-} f(x) \text{ y son iguales.}$$

Además, si $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$ entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Ejemplo 5.9 *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} & si \;\; x < 0 \\ \\ \dfrac{sen(x)}{6x} & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Solución. Para utilizar el criterio anterior, es necesario calcular los límites laterales.

Obtenemos el valor del límite lateral izquierdo, usando técnica de racionalización como sigue

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\,\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+9-9}{x^2\,(\sqrt{x^2+9}+3)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Para calcular el límite lateral derecho utilizamos el ejercicio 5.4 y obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = \frac{1}{6}$$

Como existen los límites laterales y son iguales se sigue que existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y vale $1/6$.

□

5.1.3 Límites en el infinito

En muchos problemas prácticos nos interesa saber el comportamiento de una función, cuando la variable de la cual depende, crece o decrece indefinidamente. Consideremos el siguiente ejemplo,

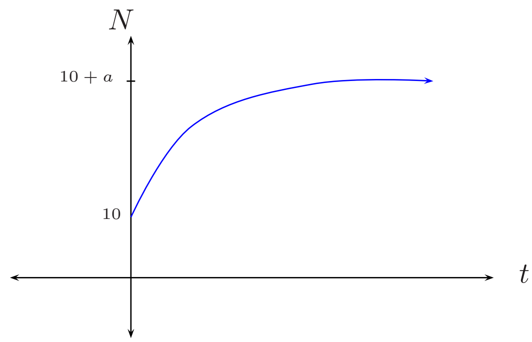
Ejemplo 5.10 *Suponga que el tamaño de una población t años después de iniciado un estudio es*

$$N(t) = 10 + \frac{at}{k+t}$$

donde a y k son constantes positivas y $N(t)$ es medido en miles de individuos.

Una pregunta natural, en relación a este modelo, es ¿cuántos individuos tendrá esta población cuando pasen muchos, muchos años?

Note que la expresión $\dfrac{at}{k+t}$ es equivalente a $\dfrac{a}{k/t+1}$, es claro que si t crece indefinidamente, $t \to +\infty$, la función $N(t)$ tiende a $10+a$ miles de personas. Esto se puede verificar observando la gráfica de la función.



En el análisis anterior, tiene sentido hacer tender t a $+\infty$ porque t arbitrariamente grande pertenece al dominio de la función. En relación a esto, tenemos la siguiente observación.

$\square$

Observación 5.11 *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x < M$ para todo $x \in A$. Análogamente A es acotado inferiormente si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $N < x$ para todo $x \in A$.*

Ejemplo 5.12 *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es acotado inferiormente pero no superiormente. Por otro lado, todo intervalo de extremos finitos es acotado.*

La definición de límite al infinito nos dice

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente. Dada la función $f : A \to \mathbb{R}$, diremos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > M$.

Análogamente se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < -M$.

Ejemplo 5.13 *El desarrollo de cierta epidemia se caracteriza por tener un comportamiento dado por la función*

$$f(t) = \frac{250}{1 + e^{-2t}}$$

que representa la cantidad de personas que adquieren la enfermedad en un tiempo t medido en semanas.

¿Cuántas personas están contagiadas al comienzo de la epidemia? ¿Qué nos indica el valor $\lim_{t\to+\infty} f(t)$*?*

Solución. Al comienzo de la epidemia, consideramos $t = 0$, reemplazando este valor en la función obtenemos $f(0) = 125$. Este valor nos indica que al comienzo de la epidemia habían 125 personas enfermas.

Por otro lado, si $t \to +\infty$ entonces la expresión $e^{-2t} = \dfrac{1}{e^{2t}}$ tiende a 0. Luego,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{250}{1+e^{-2t}} = 250.$$

Esta cantidad nos indica que cuando pase una cantidad indefinida de tiempo habrán 250 personas contagiadas con la enfermedad.

□

5.2 Funciones Continuas

La noción de funciones continuas es uno de los puntos centrales en algunas áreas de la matemática. En esta sección estudiaremos sus aspectos más básicos.

Definición 5.14 *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función. Diremos que* f *es continua en* $a \in A$ *cuando, para todo* $\varepsilon > 0$ *se puede obtener* $\delta > 0$ *tal que para* $x \in A$ *con* $|x - a| < \delta$ *implica que* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Veamos algunas observaciones respecto a la definición de continuidad

Observación 5.15

1. *Si la función* f *no es continua en* $a \in A$ *diremos que* f *es discontinua en* a.
2. *En la definición de continuidad, el punto* a *debe pertenecer necesariamente al dominio de la función.*
3. *La continuidad es un fenómeno local, esto es, si* f *es continua en un punto no necesariamente lo es en otro.*
4. *Si* f *es continua en todo* $a \in A$ *diremos que* f *es continua.*
5. *Si calcular* $\lim_{x\to a} f(x)$ *tiene sentido, diremos que* f *es continua en* $a \in A$ *si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Además, si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son continuas en $a \in A$ entonces también es continua en dicho punto las funciones $f \pm g$, $f \cdot g$, así como la función f/g, en el caso que $g(a) \neq 0$.

Ejemplo 5.16 *Todo polinomio* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua. En particular, las funciones lineales y cuadráticas son continuas.*

Ejemplo 5.17 *Toda función racional* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *es continua en su dominio, que es el conjunto de valores* x *tales que* $q(x) \neq 0$.

Ejemplo 5.18 *Las funciones trigonométricas seno y coseno son continuas en todo* $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5.19 *La función exponencial es continua en* $a \in \mathbb{R}$ *y su inversa, la función logaritmica, es continua en* $a \in \mathbb{R}^+$.

Ejemplo 5.20 *La función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5\sqrt{3}} \, \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1} & si \;\; x < 1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x - 1} & si \;\; x > 1 \\[2ex] 2 & si \;\; x = 1 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ *y discontinua en* $x = 1$.

En efecto, para $x \neq 1$ la función f es continua por ser división de funciones continuas. Así definida f, podemos usar la observación 5.15(5) para estudiar la continuidad de f en $x = 1$.

Debemos probar que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Para probar la existencia del límite, calculamos los límites laterales.

Veamos el límite lateral izquierdo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{5\sqrt{3}} \, \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \frac{1}{5\sqrt{3}} \lim_{x \to 1^-} \frac{(3x+2)(x-1)}{x - 1} \\ &= \frac{1}{5\sqrt{3}} \lim_{x \to 1^-} 3x + 2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ahora, calculamos el límite lateral derecho

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}\,\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}\\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)\,(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Como lo límites laterales existen y son iguales, se concluye que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Sin embargo $f(1) = 2 \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, de donde f no es continua en $x = 1$.

□

5.3 Ejercicios Propuestos

1. Calcular los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1}$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

(v) $\displaystyle\lim_{u\to -2} \frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$

(w) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

(x) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

(y) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(z) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

2. Considerando que $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$, calcular los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(x^2)}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}$

(d) $\lim_{x\to\infty} x\,sen(\dfrac{1}{x})$

(e) $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{sen(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$

(f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(\alpha x)}{\beta x}$

(h) $\lim_{x\to 1}\dfrac{sen(2x-2)}{x^3-1}$

(i) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\tan(\pi\, x)}{x-2}$

(j) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{cotg(x)}-\dfrac{\pi}{2\,cos(x)}$

(k) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{sen(2x-1)}{4x-2}$

(l) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2sen(x-2)}{x^2-4}$

(m) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(\pi^2 x)}{x}$

(n) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\pi x)}{x^2}$

(o) $\lim_{x\to a}\dfrac{sen(x-a)}{x^2-a^2}$

(p) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$

(q) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{sen(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$

(r) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(a+x)+sen(a-x)-2sen(a)}{x^2}$

3. Dado que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, determine

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

(c) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x-2}$

(d) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\right)^{x^2+2x+1}$

(e) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^x$

(f) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

(g) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

(h) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$

(i) $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$

(j) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+9}\right)^{x+1}$

4. Discuta la existencia en $\mathbb{R}$, de los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 7}\dfrac{x^2-|x-7|-49}{|x-7|}$

(b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{|x-1|+4}-2}{x^2-1}$

5. Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ si

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(c) $f(x) = sen(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \\ 2x & x = 1 \\ x^3+1 & x > 1 \end{cases}$

Determinar (a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, (c) ¿ Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

7. Sea $g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{sen(2x)} & x \neq 0 \\ \frac{x^2-x+1}{2} & x = 0 \end{cases}$

Determinar (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$, (c) ¿ Existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$?

8. Estudie la continuidad en $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones

(a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} & , \quad x \neq 2 \\ 3 & , \quad x = 2 \end{cases}$

(b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & , \quad x \neq -3 \\ -6 & , \quad x = -3 \end{cases}$

9. Estudie la continuidad en $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones

(a) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & , \quad x < 3 \\ \dfrac{sen(5x-15)}{x-3} & , \quad x > 3 \\ 5 & , \quad x = 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & , \quad x \leqslant 5 \\ \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-5} & , \quad 5 < x \leqslant 9 \\ \dfrac{x^2 - 11x + 18}{x-9} & , \quad x > 9 \end{cases}$

10. La intensidad de la luz en los lagos disminuye con la profundidad. Si se indica por $I(z)$ la intensidad de la luz a profundidad z, siendo $z = 0$ la superficie, tenemos que

$$I(z) = I_0 e^{-\frac{1}{15} ln(10) z}$$

¿Qué sucede con I cuando la profundidad es muy pero muy grande?

11. Suponga que el tamaño de una población en el instante t es

$$N(t) = \frac{at}{k+t}, \quad t \geqslant 0,$$

siendo a y k constantes positivas. Suponga que el tamaño límite de la población es

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = 1.24 \times 10^6$$

y que en el instante $t = 5$, el tamaño de la población es la mitad del tamaño límite. Utilice la información anterior para determinar el valor de las constantes a y k.

12. Los psicólogos consideran que cuando se pide a una persona que recuerde un conjunto de eventos, el número de hechos recordados después de t minutos está dado por una función de la forma $Q(t) = A\left(1 - e^{-kt}\right)$, donde k es una constante positiva y A es el número total de hechos importantes presentes en la memoria de la persona. ¿Qué ocurre a la función Q cuando t crece sin límite? Explique este comportamiento en términos prácticos.

13. Suponga que $N(t) = 10 + 2e^{-0.3t}\ sen(t),\ t \geqslant 0,$ describe el tamaño de una población, en millones, en el instante t, medido en semanas.

    (a) Utilize una calculadora para graficar $N(t)$ y describa con palabras lo que ve.

    (b) Obtenga $\lim\limits_{t \to \infty} N(t)$ e interprete este resultado.

14. La siguiente función expresa la altura de un árbol en función de su edad $f(x) = 132e^{-20/x}$, $x \geqslant 0$. Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ e interprete el resultado.

15. Suponga que un organismo reacciona a un estímulo sólo cuando dicho estímulo supera un cierto umbral. Suponga que el estímulo es una función del tiempo t, y que su

expresión es $s(t) = sen(\pi t)$, $t \geqslant 0$. El organismo reacciona al estímulo y muestra una cierta reacción cuando $s(t) \geqslant 1/2$.

Defina una función $g(t)$ tal que $g(t) = 0$ cuando el organismo no muestre reacción en el instante t, y $g(t) = 1$ cuando el organismo muestre reacción.

(a) Grafique $s(t)$ y $g(t)$.

(b) ¿Es $s(t)$ continua? ¿Es $g(t)$ continua? Justifique.

16. La población (en miles) de una colonia de bacterias t minutos después de la introducción de una toxina está dada por la función

$$P(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & \text{si } 0 \leqslant t < 5 \\ -8t + 72 & \text{si } t \geqslant 5 \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la población pasados 2 minutos?

(b) ¿Cuándo muere la población?

(c) ¿Es continua la función $P(t)$?. Justifique.

17. Duarte y Agustí (1998) investigaron el equilibrio de CO_2 en los ecosistemas acuáticos. Relacionaron las velocidades de respiración de la comunidad, R, con las velocidades brutas de producción primaria, P, de los ecosistemas acuáticos. Hicieron la siguiente proposición

Nuestros resultados confirman que la relación entre la velocidad de respiración de la comunidad y la producción bruta no es lineal. La respiración de la comunidad es aproximadamente proporcional a la potencia dos tercios de la producción bruta

(a) Utilice la proposición anterior para explicar porqué $R = aP^b$ se puede utilizar para describir la relación entre R y P. ¿Qué valor asignaría a b basándose en la proposición anterior?

(b) La razón R/P de un ecosistema es importante para evaluar la disponibilidad global de CO_2. Si la respiración supera a la producción, esto es, $R > P$, el ecosistema actúa como una fuente de dióxido de carbono, mientras que si la producción supera a la respiración , $P > R$, el ecosistema actúa como un sumidero de dióxido de carbono. Suponga que $b = 2/3$. Demuestre que la razón R/P como función de P es continua para $P > 0$. Además demustre que

$$\lim_{P \to 0^+} \frac{R}{P} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{P \to +\infty} \frac{R}{P} = 0\,.$$

Grafique R/P. ¿Cómo afecta a la gráfica el valor de a?

Capítulo 6

Derivación

El cálculo diferencial permite resolver problemas básicos de nuestro entorno. Concretamente, podemos optimizar una función: calcular máximos y mínimos de una curva, estudiar la razón de cambio de una variable respecto a otra. Las aplicaciones del cálculo diferencial en las ciencias naturales incluyen modelos de crecimiento simple, interacciones entre organismos, trabajo de neuronas, reacciones enzimaticas, modelamiento epidemiológico y muchas otras.

6.1 Definición e Interpretación Geométrica de Derivada

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Consideremos la función $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Diremos que f es derivable en $c \in]a, b[$ si existe el límite

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}} \tag{6.1}$$

Otras notaciones para la derivada de f en c son $Df(c)$, $\dfrac{df}{dx}(c)$. Cuando f es derivable en todo $x \in]a, b[$ diremos que f es derivable en $]a, b[$.

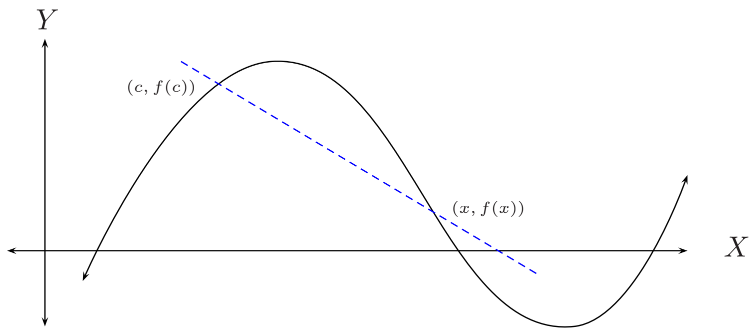
Observación 6.1 *Si en la definición de derivada, hacemos el cambio de variable $h = x - c$ se sigue que h tiende a 0 cuando x tiende a c y obtenemos*

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

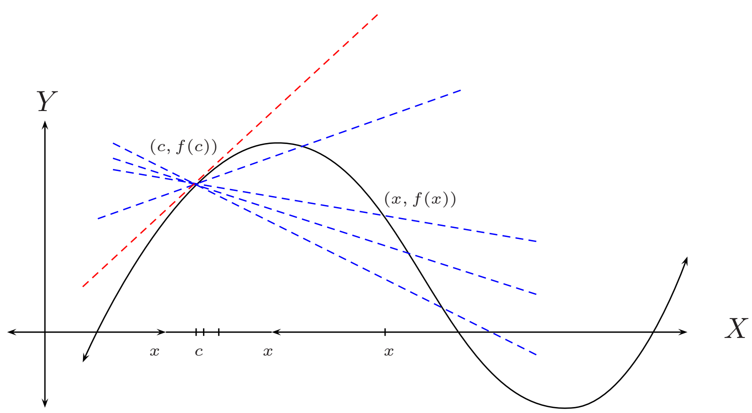
esta definición de derivada es equivalente a (6.1).

Ahora, vamos a establecer la interpretación geométrica de la derivada.

Sea f una función derivable en c. La siguiente figura nos muestra la gráfica de la función y de la recta (llamada secante) que pasa por los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$ con $x \in]a, b[$.



La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$ es $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Ahora mantendremos fijo el punto $(c, f(c))$ y acercaremos x a c, la situación geométrica se muestra como sigue



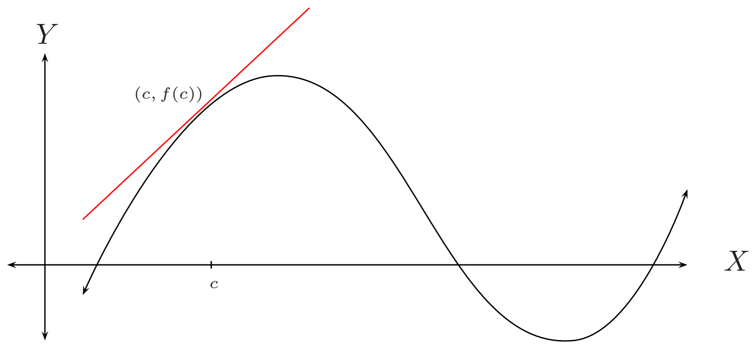
Cuando x está suficientemente próximo de c la recta secante está muy próxima a lo que llamaremos recta tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$. Tenemos la siguiente definición

Definición 6.2 *Sea f es una función derivable en c. Llamaremos recta tangente en c a la recta que pasa por el punto $(c, f(c))$ con pendiente*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

De esta forma, geométricamente

$f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$.



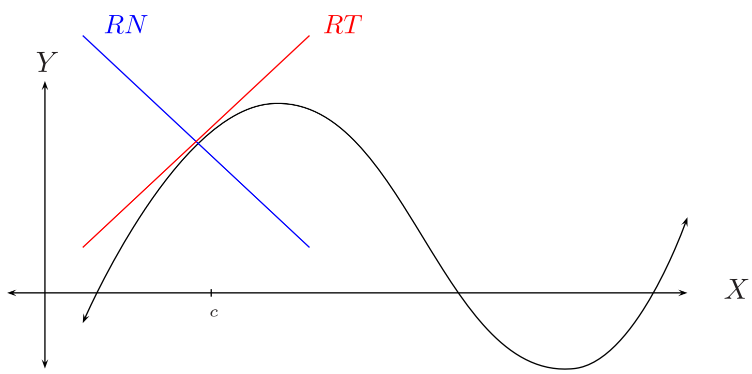
Conociendo la derivada de f en c y el punto $(c, f(c))$ es posible usando la forma punto-pendiente establecer la ecuación de la recta tangente:

$$RT: \qquad y - f(c) = f'(c)\,(x - c)$$

Definición 6.3 *Sea f es una función derivable en c con $f'(c) \neq 0$. Llamaremos recta normal en c a la recta que pasa por el punto $(c, f(c))$ y es perpendicular a la recta tangente. Su ecuación es*

$$RN: \qquad y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}\,(x - c)$$

En la siguiente figura se ilustran las rectas tangente y normal.



Ejemplo 6.4 *Derivada de una función constante.*

Consideremos la función $f(x) = b$ cuya gráfica es una recta horizontal pasando por el punto $(0, b)$. Usando la definición de derivada obtenemos

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{b - b}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{0}{x - c} = \lim_{x \to c} 0 = 0\,.$$

Luego para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f'(x) = 0$.

Ejemplo 6.5 *Derivada de una función lineal.*

La gráfica de la función $f(x) = ax + b$ es una recta de peniente a que pasa por el punto $(0, b)$. Usando la definición de derivadase puede confirmar que $f'(x) = a$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{ax + b - ac - b}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{a\,(x - c)}{x - c} = \lim_{x \to c} a = a\,.$$

Ejemplo 6.6 *Encuentre la derivada de* $g(x) = x^2$.

Solución. Utilizando la definición tenemos

$$\begin{aligned} g'(x) = & \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ = & \lim_{h \to 0} \frac{h\,(2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \end{aligned}$$

Así la derivada de $g(x) = x^2$ es $g'(x) = 2x$.

□

Ejemplo 6.7 *Encuentre la derivada de* $s(x) = sen(x)$.

Solución. Usando la definición de derivada, la identidad trigonométrica de la suma para seno y algunos límites fundamentales vistos en el capítulo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} s'(x) = & \lim_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} \\ = & \lim_{h \to 0} \frac{sen(x)cos(h) + sen(h)cos(x) - sen(x)}{h} \\ = & \lim_{h \to 0} \frac{sen(x)\,(cos(h) - 1) + sen(h)cos(x)}{h} \\ = & \; sen(x) \lim_{h \to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} + cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h} = cos(x)\,. \end{aligned}$$

Luego la derivada de la función $sen(x)$ es $cos(x)$. □

Ejemplo 6.8 *Calcule la ecuación de la recta tangente y normal a la curva* $y(x) = \sqrt{x}$ *en el punto* $(4, 2)$.

Solución. Derivamos la función por definición

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

obtenemos que la derivada de $y(x) = \sqrt{x}$ es $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Evaluando en $x = 4$, tenemos la pendiente de la recta tangente $y'(4) = \dfrac{1}{4}$. Se sigue que la ecuación de la recta tangente al gráfico de la curva en el punto $(4, 2)$ es

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

y la ecuación de la recta normal es

$$y - 2 = -4(x - 4)$$

$\square$

En forma similar a los cálculos anteriores, se obtienen las siguientes derivadas elementales

1. $(x^r)' = r\, x^{r-1}$ con $r \in \mathbb{R}$
2. $(sen(x))' = cos(x)$
3. $(cos(x))' = -sen(x)$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(ln(x))' = \frac{1}{x}$

6.2 Cálculo de Derivadas

6.2.1 Álgebra de Derivadas

Conocer las técnicas de derivación será de gran utilidad en la comprensión del resto del curso. En esta sección veremos como derivar operatorias algebraicas de funciones derivables.

Teorema 6.9 *Sean a una constante, f y g funciones derivables en x. Entonces se verifican las siguientes igualdades*

1. $(a\, f(x))' = a\ f'(x)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Las fórmulas anteriores facilitan el manejo de derivadas de expresiones algebraicas.

Ejemplo 6.10 *Calcular la derivada de las siguientes funciones*

1. $h(x) = x^2 + 4x - 3$

   Solución. Utilizando la regla de derivación para la suma y la derivada elemental de potencias, se obtiene que $h'(x) = 2x + 4\,.$ □

2. $p(x) = (x + e^x) \cdot sen(x)$

   Solución. Por la fórmula de derivación para el producto se sigue

$$p'(x) = (1 + e^x)\ sen(x) + (x + e^x)\ cos(x).$$

□

3. $f(x) = \dfrac{cos(x) + 4}{7x + x^9}$

   Solución. Usando la fórmula de derivación para la división y la suma se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) = &\quad \frac{(cos(x) + 4)'\ (7x + x^9) - (cos(x) + 4)(7x + x^9)'}{(7x + x^9)^2} \\ = &\quad \frac{-sen(x)\ (7x + x^9) - (cos(x) + 4)(7 + 9x^8)}{(7x + x^9)^2} \end{aligned}$$

.

□

4. $g(x) = ln(x)\;(\sqrt{x}\; - 4x^6)$

   Solución. Usando la fórmula de derivación para el producto y la suma se tiene

$$g'(x) = \frac{1}{x}\,(\sqrt{x}\; - 4x^6) + ln(x)\,(\frac{1}{2\,\sqrt{x}} - 24x^5).$$

$\square$

6.2.2 Regla de la Cadena

En el capítulo 2 vimos que no sólo podemos sumar o multiplicar funciones, tambien es posible bajo cietas condiciones, componer funciones. En esta sección veremos como derivar funciones compuestas.

Teorema 6.11 *Sean $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $Rec(g) \subset J$. Si g es derivable en x y f es derivable en $y = g(x)$ entonces $f \circ g$ es derivable en x y su derivada es*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\; g'(x)$$

El teorema anterior establece que al derivar la expresión $f \circ g$ obtenemos $f'(g(x))\; g'(x)$ que significa que se debe calcular la derivada de la función externa evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de la función interna evaluada en x.

Ejemplo 6.12 *Calcular la derivada de las siguientes funciones*

1. $h(x) = (4x^6 - 1)^8$

   Solución. En este caso identificamos $f(x) = 4x^6 - 1$ y $g(y) = y^8$. Por regla de la cadena resulta

$$h'(x) = 8(4x^6 - 1)^7\; 24x^5 = 192\, x^5\, (4x^6 - 1)^7$$

$\square$

2. $p(t) = \sqrt{sen(t)}$

   Solución. Ahora escribimos $f(t) = sen(t)$ y $g(y) = \sqrt{y}$. Por regla de la cadena tenemos

$$p'(t) = \frac{1}{2}\,\sqrt{sen(t)}\; cos(t) = \frac{1}{2}\, tg(t)$$

$\square$

3. $f(x) = e^{4x}\ ln(x^2+1)$

Solución. Escribimos la fórmula de derivadas para el producto

$$f'(x) = [e^{4x}]'\ ln(x^2+1) + e^{4x}\ [ln(x^2+1)]'$$

Al momento de derivar, usando regla de la cadena se sigue

$$f'(x) = 4\,e^{4x}\ ln(x^2+1) + e^{4x}\ \frac{1}{x^2+1}\,2x$$

□

4. Calcular la derivada de la función de desistegración radioactiva, que modela la cantidad de material restante tras t unidades de tiempo $N(t) = N_0\,e^{-kt}$, donde k es una constante positiva fija.

Solución. Derivamos utilizando regla de la cadena

$$N'(t) = -k\,N_0\,e^{-kt} = -k\,N(t)$$

Este resultado significa que la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de material restante. □

5. Un biólogo realizó un experimento sobre la cantidad de individuos en una población de paramecium en un medio nutritivo y obtuvo el modelo $g(t) = ln(t^2-2t+5)$ donde t se mide en días y $g(t)$ es el número de individuos en el cultivo. Hallar la derivada de la función g.

Solución. Aplicando directamente regla de la cadena a la función, obtenemos

$$g'(t) = \frac{2t-2}{t^2-2t+5}.$$

□

6.2.3 Derivadas de Orden Superior

La derivada de una función f (supuesto que existe) es también una función que se denomina primera derivada y se anota f'. Si la derivada de f' existe definimos f'' como la segunda derivada de f. La segunda derivada es también una función, si existe su derivada definimos f''' como la tercera derivada de f. Se puede continuar este proceso y anotaremos $f^{(4)}$, $f^{(5)}, \dots f^{(n)}$, la cuarta, quinta, $n-$ésima derivada de f siempre que existan.

Ejemplo 6.13 *Calcular la derivada $n-$ésima de $f(x) = e^{kx}$.*

Solución. Derivando $f(x)$ se obtiene que la primera derivada es $f'(x) = k\, e^{kx}$.
Derivando $f'(x)$ se obtiene que la segunda derivada es $f''(x) = k^2\, e^{kx}$.
Derivando $f''(x)$ se obtiene que la tercera derivada es $f'''(x) = k^3\, e^{kx}$.
Podemos ver que la derivada $n-$ésima de f es $f^{(n)}(x) = k^n\, e^{kx}$.

□

Ejemplo 6.14 *Supongamos que $f(x)$ es una función dos veces derivable. Se define $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$. Calcular la segunda derivada de $g(x)$.*

Solución. Escribimos la función $g(x) = [f(x)]^{1/3}$ y derivamos usando regla de la cadena. Obtenemos $g'(x) = \dfrac{1}{3}[f(x)]^{-2/3}\, f'(x)$. Ahora derivando $g'(x)$ mediante regla de la multiplicación y nuevamente aplicando regla e la cadena, se tiene

$$g''(x) = -\frac{2}{9}[f(x)]^{-5/3}\,[f'(x)]^2 + \frac{1}{3}[f(x)]^{-2/3}\, f''(x).$$

□

6.2.4 Funciones Implícitas y Derivación Implícita

Hasta ahora hemos calculado la derivada de funciones del tipo $y = f(x)$, en este caso se dice que y está explícitamente definida a partir de x, esto es, y es una función conocida de x. Ahora vamos a definir y implícitamente como función de x, esto significa que y es una función de x pero no conocemos su expresión.

Por ejemplo la ecuación

$$e^x + sen(xy) = y^2 + 1$$

aparecen dos variables x que supondremos la variable independiente e y que es la variable dependiente. No hay forma evidente de despejar y en términos e x. Estamos interesados en encontrar la derivada de y sin intentar un despeje de la variable.

A continuación se indican los pasos a realizar para obtener $y' = \dfrac{dy}{dx}$ cuando en una ecuación se define y implícitamente como función derivable de x.

1. Derivar término a término los miembros de la ecuación, respetando las reglas de derivación y teniendo en cuenta que y es una función de x, así cada vez que derivamos y por regla de la cadena aparece multiplicando y'.

2. Despejar en la ecuación resultante $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Ejemplo 6.15 *Calcular* $y' = \dfrac{dy}{dx}$ *si* $e^y + x^2y^3 = x - 3y$.

Solución. Se derivan los términos de la ecuación respecto a x

$$(e^y)' + (x^2)'y^3 \ + \ x^2(y^3)' = (x)' \ - \ (3y)'$$

tenemos

$$e^y\, y' \ + \ 2x\, y^3 \ + \ x^2\, 3y^2\, y' = 1 \ - \ 3y'.$$

Agrupamos a un lado de la igualdad los términos que tienen y'

$$e^y\, y' \ + \ 3y' \ + \ 3x^2\, y^2\, y' = 1 - 2x\, y^3,$$

factorizamos por y' y despejamos obteniendo $y' = \dfrac{1 - 2x\, y^3}{e^y + 3 + 3x^2\, y^2}$.

□

Ejemplo 6.16 *Calcular la recta tangente y normal a la curva* $xy - y^3 = 1$ *en el punto* $(0, -1)$.

Solución. Derivamos término a término la igualdad dada, usando las correspondientes reglas de derivación,

$$y + xy' - 3y^2y' = 0.$$

Despejamos y' y obtenemos $\dfrac{y}{3y^2 - x}$. Reemplazando los valores dados $x = 0$ e $y = -1$ se tiene $y'(0, -1) = -\dfrac{1}{3}$. La recta tangente a la curva en el punto $(0, -1)$ es

$$y + 1 = -\frac{1}{3}\, x$$

y la recta normal es

$$y + 1 = 3\, x$$

6.2.5 Ejercicios Propuestos

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = e^x\ x^4 - 7x^3 + 1$

(b) $g(x) = ln(x^2 + 1)$

(c) $f(x) = 2e^x + ln(x)$

(d) $h(x) = \dfrac{(x^5 - 4x + 1)^7}{cos(3x)}$

(e) $g(x) = \dfrac{senx + cos(x)}{sen(x) - cos(x)}$

(f) $h(x) = 3cos(x) + 2sen(x)$

(g) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(h) $f(x) = \dfrac{e^x\ \cos(x)}{1 - sen(x)}$

(i) $p(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(j) $r(x) = \dfrac{sen(x)}{x^2}$

(k) $g(x) = e^{3x^2}\ x$

(l) $p(x) = (2x - 1)^{-}6sen(5x)$

(m) $g(t) = \left(\sqrt{t^3 + 5}\right)^{\frac{5}{2}}$

(n) $h(t) = 2\ ln(\cos(2t))$

(o) $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{(2x + 1)}}$

(p) $f(x) = \dfrac{x^2\ ln(4x)}{e^{2x}}$

(q) $c(x) = sen^2(2x) + cos^2(2x)$

(r) $l(x) = \dfrac{ln(sen(x^2 + 1))}{x}$

2. Determine la pendiente de la recta tangente a la curva dada, en el valor especificado de x.

(a) $x^2 = y^3\ ,\quad x = 8$

(b) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}\ ,\quad x = \dfrac{1}{4}$

(c) $xy = 2\ ,\quad x = 2$

(d) $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1\ ,\quad x = 0$

(e) $(1 - x + y)^3 = x + 7\ ,\quad x = 1$

(f) $(x^2 - 2y)^3 = 2xy^2 + 64\ ,\quad x = 0$

(g) $(2xy^3 + 1)^3 = 2x - y^3\ ,\quad x = 0$

3. Pruebe que $[tg(x)]' = sec^2(x)$ y $[sec(x)]' = sec(x)\,tg(x)$.

4. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función dada en el punto que se indica.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\ ,\quad x = 2$

(b) $g(x) = (x - 1)(x^2 - 2)\ ,\quad x = 0$

(c) $h(x) = (x^3 - 3x + 1)(x + 2)\ ,\quad x = 1$

(d) $t(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\ ,\quad x = 2$

(e) $t(x) = tg(x)\,, \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

(f) $t(x) = sec(x)\,, \quad x = \dfrac{\pi}{3}$

5. ¿ En qué puntos tiene recta tangente horizontal la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$?

6. ¿ En qué puntos tiene recta tangente horizontal la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$?

7. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables. Calcular la derivada de

   (a) $h(x) = \sqrt{f(x) + g(x)}$

   (b) $p(x) = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} + 1\right)^2$

   (c) $y(x) = f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$

8. Derivar $y(N) = \dfrac{bN}{(k+N)^2}$ con respecto a N. Asuma que b y k son constantes positivas.

9. Demuestre que

   (a) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, satisface la ecuación $xy' - (1-x^2)y = 0$.

   (b) $y = xsenx$, satisface la ecuación $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$.

   (c) $y = xe^x$, satisface la ecuación $xy' = y - xy$

   (d) $y = e^x$, satisface la ecuación $y'' + xy' - y = xe^x$

10. Hallar $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, si $f(x) = sen^2(x - \cos x)$.

11. Pruebe que $[a^x]' = a^x\, ln(a)\,,\ a \in \mathbb{R}^+\,,\ a \neq 1$.

12. Demuestre que la función $y = \dfrac{x^2e^x}{2}$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

13. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 31 = 0$, en el punto $(-2, 3)$.

14. (a) La ecuación $sen(x+y) = xseny$ define implícitamente "y" como una función de x. Encuentre y' en el punto $(0,0)$.

    (b) Encuentre y' para $y = \ln(2x^3) + sen(1-x) - xe^{3x}$.

15. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x$ cuando $x = 2$ e $y = -2$.

16. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$ y evalúela en $(2, 1)$.

17. Verificar que la función $y = sen(\ln x) + \cos(\ln x)$ satisface la ecuación

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

18. Calcule un polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $p(-1) = 6$, $p'(1) = 8$ y $p''(0) = 4$.

19. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(2, 4)$.

20. Suponga que la concentración de nitrógeno en un lago muestra un comportamiento periódico del tipo

$$c(t) = 2 + sen(\frac{\pi}{2}\,t)$$

donde t es el tiempo en minutos. Calcular los valores positivos de t tal que $c'(t) = 0$.

21. En el siguiente modelo de población, la velocidad de crecimiento en el instante t depende del número de individuos en el instante $t - T$, siendo T una constante positiva, esto nos indica que el modelo incorpora un retardo temporal en la velocidad de nacimientos. Sea $N(t)$ el tamaño de la población en el instante t y suponga que

$$N'(t) = \frac{\pi}{2T}\,(K - N(t - T)), \tag{6.2}$$

siendo K y T constantes positivas.

   (a) Demuestre que $N(t) = K + Acos(\dfrac{\pi t}{2T})$ es una solución de (6.2).

   (b) Dibuje $N(t)$ para $K = 100$, $A = 50$ y $T = 1$. Explique con palabras cómo varía el tamaño de la población con el tiempo.

22. Suponga que $N(t)$ indica que el tamaño de una población en un instante t y $N(t)$ satisface la ecuación

$$N'(t) = 3N\left(1 - \frac{N}{20}\right)$$

Grafique $N'(t)$ para $N \geqslant 0$, e identifique todos los puntos de equilibrio, esto es, aquellos valores en que $N'(t) = 0$.

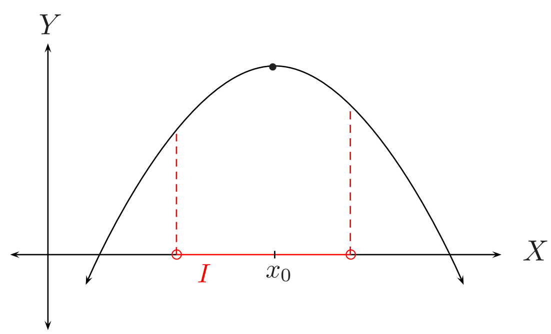
6.3 Aplicaciones de Derivadas

En esta sección vamos a utilizar el cálculo de derivadas visto en la sección anterior en problemas de optimización y razón de cambio.

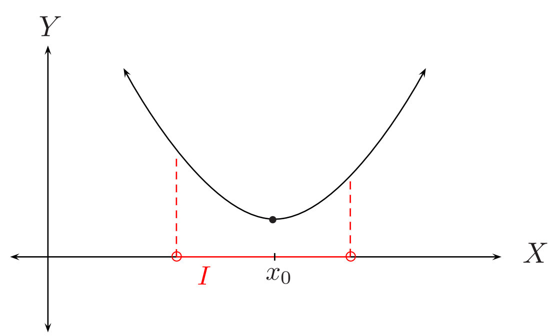
6.3.1 Valores Extremos, Crecimiento y Decrecimiento

A continuación se definen algunos conceptos necesarios para el trabajo en optimización.

Sea f una función definida en un intervalo A de $\mathbb{R}$. Diremos que $x_0 \in A$ es un máximo relativo (o local) de f si existe un intervalo abierto $I \subset A$ tal que $f(x_0) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I$.



Análogamente, diremos que $x_0 \in A$ es un mínimo relativo (o local) de f si existe un intervalo abierto $I \subset A$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I$.



Observación 6.17 *Para referirnos en forma colectiva a un máximo o mínimo relativo hablaremos de extremo relativo.*

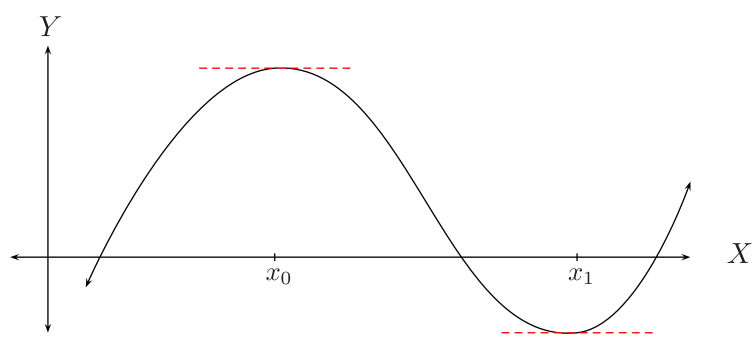
Definición 6.18 *Diremos que x_0 es un punto crítico de f si $f'(x_0)$ no esta definida o $f'(x_0) = 0$.*

La condición $f'(x_0) = 0$ nos dice, que en este tipo de puntos críticos, la recta tangente es horizontal.

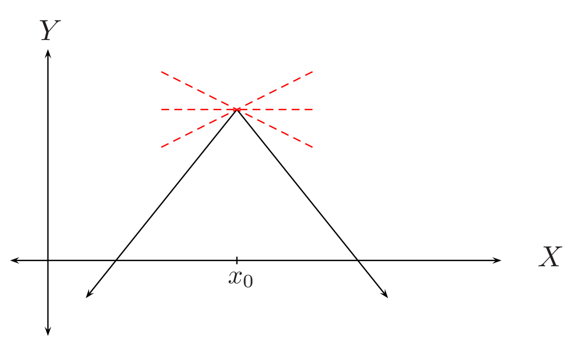
Al observar las figuras anteriores podemos notar que los extremos relativos son puntos críticos. Esto se conoce como el teorema de Fermat:

Si f tiene un extremo relativo en x_0 entonces x_0 es un punto crítico de f.

En la siguiente figura vemos la gráfica de una función donde, en los extremos relativos x_0 y x_1, la derivada vale cero.

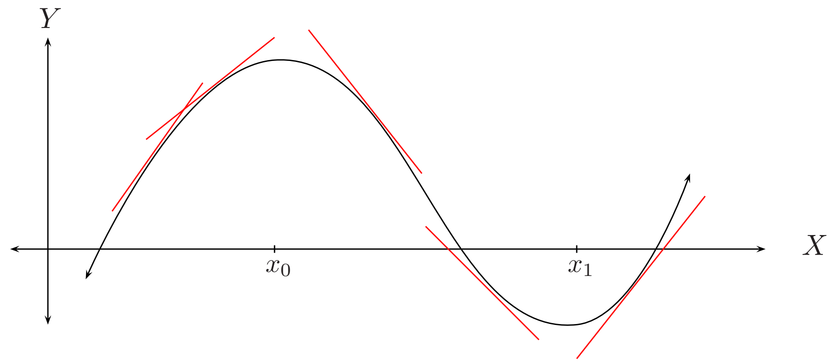


La siguiente figura ilustra una función con un máximo relativo en x_0 y la derivada no está definida en el punto.



Observación 6.19 *El recíproco del teorema de Fermat en general no es cierto, esto es, si* x_0 *es un punto crítico no necesariamente es extremo relativo, ejemplo* $f(x) = x^3$. *Esta función tiene un punto crítico en* $x = 0$ *y en este valor no hay un extremo.*

Consideremos una función f derivable en un intervalo abierto $]a, b[$. En el capítulo 3, estudiamos los conceptos de funciones crecientes y decrecientes. La siguiente figura es la gráfica de la función f, vemos que f es creciente en $]-\infty, x_0[\cup]x_1, +\infty[$ y decreciente en $]x_0, x_1[$. ¿Qué puede observar de la derivada en estos conjuntos?



Podemos ver que la pendiente de las rectas tangentes son positivas cuando x pertenece a $]-\infty, x_0[\cup]x_1, +\infty[$, por lo tanto la derivada es positiva en el conjunto donde la función crece. En el intervalo $]x_0, x_1[$, la función decrece y la derivada es negativa para x en este conjunto. Escribimos este análisis en la siguiente propiedad de monotonía.

Sea f una función derivable en $]a, b[$ entonces

$f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$ si y sólo si f es creciente en $]a, b[$.

$f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$ si y sólo si f es decreciente en $]a, b[$.

Podemos utilizar esta propiedad de las funciones derivables para determinar si un punto crítico es extremo relativo. Supongamos que $f'(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in]a, b[$.

Si la función es decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a la derecha de x_0 entonces la función tiene un mínimo relativo en x_0.

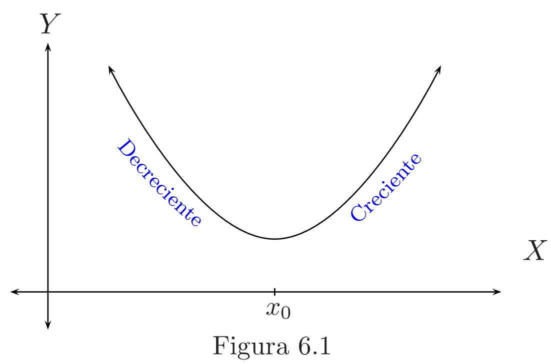


Figura 6.1

En términos del criterio de monotonía la función f tiene un mínimo relativo en x_0 si la derivada f' cambia de negativa a positiva alrededor de x_0 (de izquierda a derecha).

Si la función es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a la derecha de x_0 entonces la función tiene un máximo relativo en x_0.

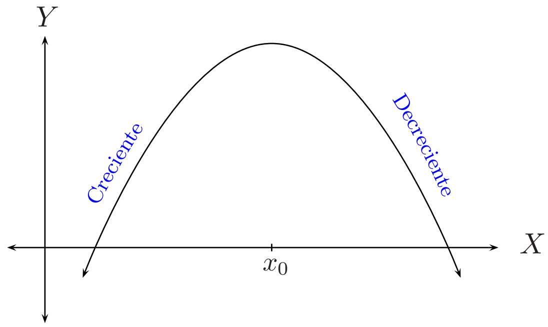


Figura 6.2

En términos del criterio de monotonía la función f tiene un máximo relativo en x_0 si la derivada f' cambia de positiva a negativa alrededor de x_0 (de izquierda a derecha).

Ejemplo 6.20 *Determine los puntos críticos, extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 6x + 2.$

Solución. La primera derivada de la función es $f'(x) = x^2 + x - 6$. Para encontrar los puntos críticos resolvemos $f'(x) = 0$, o equivalentemente $x^2 + x - 6 = 0$, de donde $(x+3)(x-2) = 0$, así la función f tiene dos puntos críticos $x = 2$, $x = -3$. Busquemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

El conjunto solución de la inecuación $(x+3)(x-2) > 0$ es $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$. De esto, f es creciente en $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$ y decreciente en $]-3, 2[$.

Como la función f a la izquierda de -3 es creciente y a la derecha es decreciente, se sigue que el punto crítico -3 es un máximo relativo de f. Alrededor de 2 la función f cambia de decreciente a creciente por lo tanto 2 es un mínimo relativo de f.

$\square$

Supongamos que x_0 es un punto crítico de f del tipo $f'(x_0) = 0$ y que la función es dos veces derivable en $]a, b[$. Hay una forma muy simple de determinar si x_0 es un extremo relativo de f. La gráfica de la función f en la Figura 6.1 tiene un mínimo relativo en x_0. Si se observa cómo cambian las pendientes de las rectas tangentes cuando se cruza x_0 desde la izquierda, puede verse que las pendientes son crecientes, es decir, $f''(x_0) > 0$. Análogamente, en la gráfica de la Figura 6.2 la función tiene un máximo relativo en x_0, en este caso las pendientes de las rectas tangentes cuando se cruza x_0 desde la izquierda son decrecientes, es decir, $f''(x_0) < 0$. La siguiente proposición es conocida como *Criterio de la segunda derivada para extremos relativos*.

Sea f una función dos veces derivable en $]a,b[$ y $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

Ejemplo 6.21 *Un biólogo realizó un experimento sobre la cantidad de individuos en una población de paramecium en un medio nutritivo y obtuvo el modelo* $g(t) = ln(t^2 - 2t + 5)$ *donde* t *se mide en días y* $g(t)$ *es el número de individuos en el cultivo. Indique después de cuánto tiempo el número de individuos en la población es mínimo.*

Solución. La derivada de la función g es $g'(t) = \dfrac{2t-2}{t^2-2t+5}$. Como la expresión cuadrática $t^2 - 2t + 5$ no es factorizable en $\mathbb{R}$, la derivada g' existe para todo $t \in \mathbb{R}$. De la ecuación $g'(t) = 0$ obtenemos como solución un único punto crítico $t = 2$. Usando regla de la división para derivadas, tenemos

$$g''(t) = \frac{-2t^2 + 4t + 6}{(t^2 - 2t + 5)^2}$$

Evaluando g'' en el punto crítico, $g''(2) = \frac{6}{25} > 0$. Por el criterio de la segunda derivada se tiene que $t = 2$ es mínimo relativo.

Interpretamos este resultado en el contexto del problema. Como pasados 2 días el número de individuos en el cultivo es mínimo, se sigue que para $0 < t < 2$ la función es decreciente y para $t > 2$ la función es creciente. A partir de $t = 0$ el número de individuos comienza a disminuir hasta llegar a una cantidad mínima de $g(2) = ln(5)$ individuos a los 2 días. Pasados dos días la población aumenta.

□

Ejemplo 6.22 *En una investigación se descubrió que la concentración* $y(t)$ *de un medicamento inyectado en el organismo vía intramuscular está dada por*

$$y(t) = \frac{c}{b-a}\,(e^{-at} - e^{-bt}),$$

donde $t \geqslant 0$ *es el número de horas transcurridas después de la inyección,* a, b *y* c *son constantes positivas con* $b > a$. *¿Cuándo ocurre la máxima concentración?*

Solución. Derivamos la función obteniendo $y'(t) = \dfrac{c}{b-a}\,(-ae^{-at} + be^{-bt})$. Igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos.

$$y'(t) = 0 \iff \frac{c}{b-a}\,(-ae^{-at} + be^{-bt}) = 0 \iff \frac{a}{b} = e^{at-bt}.$$

Aplicando la función logaritmo natural a ambos lados de la última igualdad obtenemos $ln(\frac{a}{b}) = at - bt$, de donde $t = \dfrac{1}{a-b}\, ln(\dfrac{a}{b})$ es un punto crítico de y.

La segunda derivada de y es

$$y''(t) = \frac{c}{b-a}\,(a^2e^{-at} - b^2e^{-bt}) = \frac{c}{b-a}\, b^2 \left(\frac{a^2}{b^2}e^{-at} - e^{-bt}\right) = \frac{c}{b-a}\, b^2\, e^{-at} \left(\frac{a^2}{b^2} - e^{(a-b)t}\right)$$

Reemplazando el punto crítico

$$\begin{aligned} y''(\tfrac{1}{a-b}\, ln(\tfrac{a}{b})) = \; & \frac{c}{b-a}\, b^2\, e^{-at} \left(\frac{a^2}{b^2} - e^{(a-b)\frac{1}{a-b}\, ln(\frac{a}{b})}\right) \\ = \; & \frac{c}{b-a}\, b^2\, e^{-at} \left(\frac{a^2}{b^2} - e^{ln(\frac{a}{b})}\right) = \frac{c}{b-a}\, b^2\, e^{-at} \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

Note que de los datos aportados por el problema $0 < a < b$ luego $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 < 1$ y $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \dfrac{a}{b} < 0$, de esto $y''(\frac{1}{a-b}\, ln(\frac{a}{b})) < 0$. Por el criterio de la segunda derivada se tiene que el punto crítico $t = \dfrac{1}{a-b}\, ln(\dfrac{a}{b})$ es un máximo relativo.

Así, la concentración máxima del medicamento ocurre después de $t = \dfrac{1}{a-b}\, ln(\dfrac{a}{b}))$ horas de la inyección. Como el punto es máximo tenemos que para $0 < t < \dfrac{1}{a-b}\, ln(\dfrac{a}{b})$ la concentración del medicamento es creciente y para $t > \dfrac{1}{a-b}\, ln(\dfrac{a}{b})$ la concentración disminuye a medida que pasa el tiempo.

□

6.3.2 Razón de Cambio

En las secciones anteriores hemos tratado el concepto de derivada desde el punto de vista geométrico, es decir, pendiente de la recta tangente al gráfico de una función en un punto determinado. Sin embargo, también el concepto de derivada puede interpretarse como velocidad de variación instantánea, en este caso estamos frente a una interpretación física.

Supongamos que la función posición de un cuerpo es $x(t)$. La velocidad media de la partícula durante un intervalo de tiempo $[t_0, t]$ se define como el cambio en la posición durante el intervalo dividido por la longitud del intervalo. Consideremos la notación

$$\Delta y: \quad \text{indica el cambio en } y$$

Así, podemos escribir la *velocidad media* como

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

La *velocidad instantánea* en el instante t se define como el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to t_0$, esto es

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to t_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

o equivalentemente

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

Concretamente, la derivada $x'(t)$ representa la velocidad instantánea del cuerpo t unidades de tiempo después de haber comenzado su movimiento. Esta interpretación nos permitirá describir una cantidad en términos de su rapidez de variación con respecto a otra cantidad, esto es, la razón de cambio de una variable respecto a otra.

Ejemplo 6.23 *Un equipo de investigación médica determina que t días después del inicio de una epidemia*

$$N(t) = 10t^3 + 5t + \sqrt{t}$$

personas estarán infectadas. ¿A qué razón se incrementa la población infectada en el noveno día?.

Solución. La derivada de la función N es $\dfrac{dN}{dt} = 30t^2 + 5 + \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.
En $t = 9$ se tiene $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{14611}{6} \approx 2435,16$. Esto significa que pasados 9 días la población de bacterias está aumentando a razón de $\frac{14611}{6}$ por día.

$\square$

Ejemplo 6.24 *La ley de Fick establece que el porcentaje de concentración de soluto en el interior de una célula en el tiempo t es $f(t) = C\,(1 - e^{-kt})$, donde C es la constante positiva de concentración del soluto que rodea la célula y k es una constante positiva. Suponga que para cierta célula, la concentración de soluto en el interior después de 2 horas es 0.008% de la concentación de soluto en el exterior. ¿Cómo está cambiando f respecto al tiempo? Interprete este resultado.*

Solución. Como la concentración de soluto en el interior después de 2 horas es 0.8% la concentación de soluto en el exterior, se tiene que $f(2) = 0.008C = C\,(1 - e^{-2k})$. De esto, $0.008 = 1 - e^{-2k}$, despejando y aplicando logaritmo natural se tiene $-2k = ln(0.992)$, luego $k \approx 0.004$.

Obtenemos el modelo $f(t) = C\,(1 - e^{0.004t})$. Derivando f respecto al tiempo se tiene que $\dfrac{df}{dt} = -0.004\,C\,e^{0.004t}$. Note que la función exponencial es positiva así como también la constante C. Luego $\dfrac{df}{dt}$ es negativa. Esto nos indica que en un tiempo t_0, el porcentaje de concentración de soluto en el interior de una célula disminuye a razón de $0.004\,C\,e^{0.004t}$ por cada unidad de tiempo adicional.

□

Supongamos que $y = y(x)$ es una función derivable de x y que a su vez $x = x(t)$ es una función derivable de t. Por composición de funciones tenemos que y depende de t y utilizando regla de la cadena se sigue la siguiente fórmula de derivación conocida como razón de cambio relacionadas:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

Ejemplo 6.25 *La temperatura de un determinado jarabe en el congelador está dada por* $T(r) = \sqrt{r^2 + 4r + 10}$, *donde* r *es la concentración de alcohol del medicamento por cada ml y está dada en función del tiempo (en minutos) por* $r(t) = \dfrac{5000}{4t^2 + 1}$. *Hallar la razón a la cuál está cambiando la temperatura después de 10 minutos.*

Solución. Se pide hallar la razón de cambio de la temperatura respecto al tiempo. Debemos obtener $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{dT}{dr}\,\dfrac{dr}{dt}$. Usando regla de la cadena nos queda $\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{r+2}{\sqrt{r^2 + 4r + 10}}$ y por regla de la división $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{40000t}{(4t^2+1)^2}$.

Pasados 10 minutos se tiene que $r = \dfrac{5000}{4 \cdot 10^2 + 1} = \dfrac{5000}{401} \approx 12,47$. Luego

$$\frac{dT}{dt}(10) = \frac{dT}{dr}(12,47)\,\frac{dr}{dt}(10) = -\frac{12,47 + 2}{\sqrt{12,47^2 + 4 \cdot 12,47 + 10}}\,\frac{40000 \cdot 10}{(4 \cdot 10^2 + 1)^2}$$

6.3.3 Ejercicios Propuestos

1. Un investigador médico estima que t horas después de introducirse una toxina, la población (en miles) de cierta colonia de bacterias será

$$P(t) = \frac{600}{4 + e^{-0.01t} + e^{0.003t}}$$

   ¿Cuándo es máxima la población? ¿Cuál es la máxima población de la colonia?

2. Existen varios modelos matemáticos en el estudio de enfermedades dinámicas como la leucemia y otras enfermedades que afectan a las células sanguíneas. Uno de estos modelos de producción de células sanguíneas fue desarrollado por A. Lasota en 1977 e

involucra la función exponencial

$$p(x) = A\,x^s\,e^{-sx/r}$$

donde A, s y r son constantes positivas y x es el número de glanulocitos(un tipo de glóbulos blancos) presentes.

(a) Hallar el nivel x de glanulocitos de la sangre que maximizan la función de producción.

(b) Si $s > 1$ demuestre que existen dos valores de x tales que $p''(x) = 0$.

3. Un modelo para la producción de células sanguíneas es la función

$$p(x) = \frac{Ax}{B + x^m}$$

donde x es el número de células presentes, A, B y m son constantes positivas.

(a) Hallar la tasa de producción de sangre $R(x) = p'(x)$ y determine los valores de x tales que $R(x) = 0$. ¿Qué indican estos valores?

(b) Hallar la razón a la cuál cambia $R(x)$ respecto a x. Interprete.

4. La Ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = c$, donde c es una constante. En determinado instante el volumen del gas es 600 cm^3, la presión es 150 KPa y crece a una razón de 20 KPa/ min.¿ Con qué velocidad disminuye el volumen en este momento?

5. Un globo esférico diminuto se inserta en una arteria obstruida por un coágulo y se infla a una tasa de $0.002\,\pi\,mm^3/min$ ¿Con qué rapidez crece el radio del globo cuando el radio es $r = 0.005mm$?

6. Se introduce una población de 500 bacterias en un cultivo, creciendo en número de acuerdo con la función $P(t) = 500\left(1 + \dfrac{4t}{50 + t^2}\right)$ donde t se mide en horas. Hallar a que ritmo está creciendo la población cuando han pasado 120 minutos.

7. Se estima que dentro de t años, la población de cierta comunidad suburbana será $p(t) = 10 - \dfrac{20}{(t+1)^2}$ miles de personas. Un estudio ambiental revela que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será $c(p) = 0.8\sqrt{p^2 + p + 139}$unidades cuando la población sea de p miles. ¿ A qué razón porcentual cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de 1 año?

8. La reacción a dos drogas como función del tiempo (medido en horas) está dada por:

$$R_1(t) = t \cdot e^{-t}\,, \qquad R_2(t) = t \cdot e^{-2t^2}$$

Debido a las características de cierta enfermedad, se optará por aquella droga que tenga una reacción máxima mayor ¿Qué droga se debe elegir?

9. Una persona tose cuando hay un objeto extraño en su tráquea. La velocidad de la tos depende del tamaño del objeto. Suponga que una persona tiene una tráquea cuyo radio es 20 mm. Si un objeto extraño tiene un radio "r"(en milímetros), entonces la velocidad "V" (en milímetros por segundo), necesaria para eliminar el objeto mediante la tos está dada por:

$$V(r) = k(20r^2 - r^3); 0 \leqslant r \leqslant 20$$

donde k es una constante positiva. ¿Para que tamaño del objeto se necesita la velocidad máxima con el fin de removerlo?

10. El flujo de sangre en los vasos sanguíneos es más rápido cuando se dirige hacia el centro del vaso y más lento hacia el exterior. La velocidad del fluido sanguíneo V esta dada por:

$$V = \frac{p}{4Lk}(R^2 - r^2)$$

donde R es el radio del vaso sanguíneo, r es la distancia que recorre la sangre desde el centro del vaso, y p, L y k son constantes físicas relacionadas con la presión. Cuando se excava nieve en medio del aire frío, una persona con historial médico de dificultades cardíacas puede desarrollar angina (dolor de pecho) debido a la contracción de los vasos sanguíneos. Para contrarrestarlo, puede tomar una tableta de nitroglicerina, que dilata los vasos sanguíneos. Suponga que después de tomar una tableta de nitroglicerina, el radio de un vaso sanguíneo se dilata a razón de 0.0025 mm/ min en un lugar en el vaso sanguíneo donde el radio es R= 0.02 mm, encuentre la razón de cambio de la velocidad de la sangre.

11. Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, entonces al cabo de t años, N miles de personas adultas recibiría beneficios directos, donde

$$N = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 8$$

¿ Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

12. Un biólogo realizó un estudio sobre los factores que influyen en el crecimiento o decrecimiento de una población de peces presentes en un lago natural. El científico llegó a la conclusión que en verano producto de la visita humana al lugar la cantidad de peces presentes en el lago se modela por

$$f(t) = 4 + te^{-kt}$$

donde t es el tiempo medido en semanas (t=0 es el primer día de verano) y $f(t)$ es el número de peces en miles.

(a) Establezca el modelo en forma precisa (encuentre el valor de k), si se sabe que después de una semana de comenzado el verano hay 4.600 peces en el lago ¿Cuántos peces hay después de 4 semanas?

(b) Para el modelo encontrado en (a) ¿después de cuántas semanas el número de peces en el lago es máximo? ¿Cuándo la cantidad de peces estará aumentado, cuándo disminuyendo?

(c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ e interprete el resultado en el contexto del problema.

13. En Nueva Escocia se llevó a cabo un estudio de la polilla de invierno. Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huéspedes a una distancia de x pies de la base del árbol. La densidad de larvas D (número de larvas por pie cuadrado de suelo), viene dada por:

$$D = 59.3 - 1.5x + 0.5x^2; \;\; 1 \leqslant x \leqslant 9$$

(a) ¿Con qué rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia cuando éstas están a 6 pies de la base del árbol?

(b) ¿A qué distancia de la base del árbol la densidad de larvas decrece a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

14. Suponga que t semanas después del brote de una epidemia,

$$f(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0.8t}}$$

personas la adquieren.

¿Cuál es la razón de cambio del crecimiento de f al finalizar la semana 1?

15. Cuando la basura orgánica se vacía en un estanque, el proceso de oxidación que se lleva a cabo reduce el contenido en el estanque; sin embargo, después de cierto tiempo,

la naturaleza regresa el contenido de oxígeno a su nivel natural. Supóngase que el porcentaje de contenido de oxígeno t días después de tirar la basura orgánica en el estanque está dado por

$$P(t) = 100 \cdot \left[\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100} \right]$$

con respecto de su nivel normal. ¿Qué tan rápido cambia el contenido de oxígeno en el estanque 20 días después de vaciar la basura orgánica?

16. La fuerza R de reacción del cuerpo humano a una dosis D de cierto medicamento está dada por

$$R(D) = D^2 \cdot \left(\frac{k}{2} - \frac{D}{3} \right)$$

donde k es una constante positiva. Demuestre que la máxima reacción se alcanza cuando la dosis es k unidades.

17. El porcentaje de alcohol en el flujo sanguíneo de una persona, t horas después de beber cierta cantidad de whisky está dado por

$$P(t) = 0.23 \cdot t \cdot e^{-0.4t}$$

¿Qué tan rápido aumenta el porcentaje de alcohol en el flujo sanguíneo de una persona después de media hora?

18. Cuando se administra una droga o vitamina intramuscularmente, la concentración en la sangre (medida en ug/ml) t horas después de la inyección se puede aproximar por medio de la función

$$f(t) = C\,(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}),$$

donde C , k_1 y k_2 son constantes positivas. ¿ En qué instante la concentración de la droga es máxima?

19. La concentración C de cierto producto químico en la sangre, t horas después de ser inyectado en el tejido muscular es

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}$$

¿Cuándo es máxima la concentración?

20. La reacción del cuerpo a las drogas se puede modelar por la función $R(D) = D^2 \cdot \left(\frac{k}{2} - \frac{D}{3}\right)$, donde D es la dosis y k es una constante que indica la dosis máxima que puede administrarse. La razón de cambio de $R(D)$ con respecto a D se denomina sensibilidad. Hallar el valor de D para que la sensibilidad sea máxima.

21. Una enzima es una proteína que puede actuar como catalizador para aumentar el ritmo al que se desarrolla una reación en las células. En una reacción determinada, una enzima se convierte en otra enzima denominada producto. Este último actua como catalizador para su propia formación. La tasa R a la que se forma el producto (con respecto al tiempo) está dada por la función $R(p) = kp\,(L-p)$, donde L es la cantidad inicial de ambas enzimas, p es la cantidad de la enzima producto y k es una constante positiva. ¿ Para qué valor de p será máxima la tasa a la que se forma el producto?

22. Un agente antibacteriano agregado a una población de bacterias causa disminución en el tamaño de ésta. Si la población t minutos después de agregado el agente es $Q(t) = Q_0\,2^{-t/3}$, donde Q_0 representa la cantidad inicial. Determine

    (a) La razón de cambio de la población al tiempo t si la población inicial es de 10^6 bacterias.

    (b) ¿Después de qué período de tiempo la población ha disminuido a 10^3 unidades?

23. El volumen de un tumor canceroso esférico está dado por $V(x) = \frac{\pi}{6}x^3$, donde x es el diámetro del tumor el cuál varia en el tiempo t medido en días. Un médico estima que el diámetro está creciendo a razón de $0.4\,ml$ por día en el momento en que el diámetro es de $10\,ml$. ¿ A qué velocidad está cambiando el volumen del tumor en ese momento?

24. En una comunidad particular, una cierta epidemia se propaga en tal forma que x meses después de iniciarse el número de personas infectadas es $P(t) = \dfrac{30x^2}{(1+x^2)^2}$ medido en miles de personas. ¿ A qué razón se propaga la epidemia pasadas 2 semanas?

25. Los ictiosaurios son un grupo de reptiles marinos con forma de pez y comparables en tamaño a los delfines. Se extinguieron durante el periodo Cretáceo. Basándose en el estudio de 20 esqueletos fósiles, se descubrió que la longitud del cráneo $S(x)$ (en cm) y la longitud de la espina dorsal $B(x)$ (en cm) de los ejemplares estaban relacionadas mediante la igualdad $S(x) = 1,162\,[B(x)]^{0,993}$, donde x es la edad del fósil. ¿Cómo se relaciona la razón de crecimiento de la espina dorsal con la del cráneo?

26. Un instituto de salud pública mide la probabilidad que una persona de cierto grupo muera a la edad x y emplea la fórmula $P(x) = \lambda^2\,x\,e^{-\lambda x}$, donde λ es un parámetro tal que $0 < \lambda < e$. Hallar el valor máximo de $P(x)$ e interprete el resultado.

Capítulo 7

Integración

En el capítulo anterior nos preocupamos del problema *dada una función encontrar su derivada.* Sin embargo, muchas aplicaciones importantes del cálculo están relacionadas con el problema inverso, esto es, *dada la derivada encontrar la función que la origina.* Por ejemplo, un sociólogo que conoce la razón a la cuál crece la población puede utilizar esta información para predecir futuros niveles de población.

En este capítulo, veremos el concepto de primitiva e integral indefinida, propiedades y ejemplos básicos de integrales. Aprenderemos dos importantes técnicas de integración. Finalmente, estudiaremos aplicaciones de integral.

7.1 Integral Indefinida

7.1.1 Primitivas

Definición 7.1 *Una función F se denomina primitiva de una función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

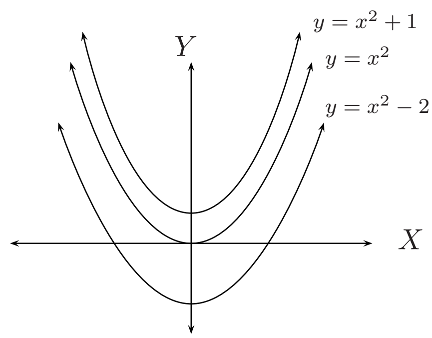
Ejemplos 7.2

1. *$F(x) = x^2$ es la primitiva de $f(x) = 2x$*
2. *$F(x) = sen(x)$ es la primitiva de $f(x) = cos(x)$*
3. *$F(x) = ln(x)$ es la primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$*

Una función tiene más de una primitiva. Por ejemplo, una primitiva de la función $f(x) = 2x$ como vimos en el ejemplo anterior es $F(x) = x^2$ pero también los son $G(x) = x^2 + 1$, $H(x) = x^2 - 2$, puesto que al derivar estas funciones obtenemos f. En general las funciones con derivadas idénticas se diferencian sólo en una constante. En resumen:

Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la función continua $f(x)$ en un intervalo I entonces existe una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.

La propiedad anterior nos dice que podemos representar toda la familia de primitivas de una función mediante la adición de un valor constante a una primitiva conocida. Existe una interpretación geométrica para el hecho que dos primitivas cualesquiera de la misma función continua f difieran en una constante. Cuando se dice que F y G son primitivas de f, significa que $F'(x) = G'(x) = f(x)$, luego la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = F(x)$ para cada valor de x es la misma que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = G(x)$ en x. En otros términos la gráfica de $G(x)$ es una traslación vertical de $F(x)$. En la figura se muestra la gráfica de algunas primitivas de $f(x) = 2x$.



7.1.2 Integral Indefinida

La familia de todas las primitivas de una función continua $f(x)$ se denomina *Integral Indefinida* y se representan usando el simbolismo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C es una constante y F es una primitiva de f para todo x en un intervalo I.

Notación: el símbolo $\displaystyle\int$ se lee integral, $f(x)$ es llamado integrando, dx indica la variable de integración.

7.1.3 Reglas Básicas de Integración

Sean f y g funciones continuas en un intervalo I y $k \in \mathbb{R}$ una constante. Se verifican las propiedades

1. $\displaystyle\int k\,dx = kx + C$

2. $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

El lector puede verificar fácilmente las siguientes integrales de funciones comunes

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1.$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = ln(x) + C \quad , \quad x > 0$

3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

4. $\displaystyle\int cos(x)\,dx = sen(x) + C$

5. $\displaystyle\int sen(x)\,dx = -cos(x) + C$

6. $\displaystyle\int sec^2(x)\,dx = tg(x) + C$

7. $\displaystyle\int sec(x)\,tg(x)\,dx = sec(x) + C$

8. $\displaystyle\int cosec^2(x)\,dx = -ctg(x) + C$

Ejemplo 7.3 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$

Solución. Realizando un trabajo algebraico en el integrando y usando las propiedades antes vistas obtenemos

$$\int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x^2}\,dx = \int 1dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int 1dx + \int x^{-2}\,dx = x - \frac{1}{x} + C$$

□

Ejemplo 7.4 *Calcular* $\displaystyle\int x^2\,\sqrt{x}\,dx$

Solución. Multiplicando potencias de igual base y de las propiedades anteriores se sigue que

$$\int x^2\,\sqrt{x}\,dx = \int x^2\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{5}{2}}\,dx == \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

□

Ejemplo 7.5 *Calcular* $\int 4cos(x) + x(x-3)^2\,dx$

Solución. Separando la integral con la propiedad de la suma y desarrollando el cuadrado de binomio tenemos

$$\int 4cos(x) + x(x-3)^2\,dx = \int 4cos(x)\,dx + \int x(x^2 - 6x + 9)\,dx$$

Aplicando nuevamente las propiedades se tiene

$$\int 4cos(x) + x(x-3)^2\,dx = 4\int cos(x)\,dx + \int x^3 - 6x^2 + 9x\,dx = 4sen(x) + \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2}$$

$\square$

Ejemplo 7.6 *Un ambientalista descubre que cierto tipo de árbol crece de tal forma que después de t años su altura $h(t)$ cambia a razón de $h'(t) = 0.2\,t^{2/3} + \sqrt{t}$, cm/año.*
Si el árbol tenía 20 cm de altura cuando se plantó ¿cuánto medirá dentro de 27 años?

Solución. Es claro del planteo verbal que se nos indica la derivada de la función altura y se nos pide encontrar dicha función. En términos de integral indefinida escribimos

$$h(t) = \int [0.2\,t^{2/3} + \sqrt{t}]\,dt = 0.2\int t^{2/3}\,dt + \int t^{1/2}\,dt = 0.2\,\frac{3}{5}\,t^{5/3} + \frac{3}{2}\,t^{2/3} + C$$

La función altura $h(t) = 0.2\,\frac{3}{5}\,t^{5/3} + \frac{3}{2}\,t^{2/3} + C$ depende de la constante C. Sin embargo, sabemos que $h(0) = 20$. De esto $C = 20$.

Finalmente $h(t) = 0.2\,\frac{3}{5}\,t^{5/3} + \frac{3}{2}\,t^{2/3} + 20$. Después de 27 años la altura del árbol es

$$h(27) = 0.2\,\frac{3}{5}\,27^{5/3} + \frac{3}{2}\,27^{2/3} + 20 = 0.2\,\frac{3}{5}\,3^5 + \frac{3}{2}\,3^2 + 20.$$

$\square$

7.1.4 Ejercicios Propuestos

1. Encuentre una primitiva de las siguientes funciones

   (a) $h(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$

   (b) $f(x) = 10x^4 - 6x^3 + 5\sqrt{x} - \sqrt[5]{x}$

   (c) $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$

   (d) $p(t) = e^{3t}$

(e) $h(t) = sen(4t)$

(f) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - x^2 + 1}{4x}$

2. Resuelva los siguientes problemas

(a) Sea $f(x) = 6x^2 + x - 5$. Encuentre $F(x)$ si se sabe que $F(0) = 2$.

(b) Sea $f(x) = 12x^2 - 6x + 1$. Encuentre $F(x)$ si se sabe que $F(1) = 5$.

(c) Sea $f'(x) = 9x^2 + x - 8$. Encuentre $f(x)$ si se sabe que $f(-1) = 1$.

(d) Sea $f''(x) = 4x - 1$. Encuentre $f(x)$ si se sabe que $f'(2) = -2$, $f(1) = 3$.

(e) Sea $f''(x) = x^{\frac{1}{9}} - 5$. Encuentre $f(x)$ si se sabe que $f'(1) = 2$, $f(1) = -8$.

3. Calcular las siguientes integrales indefinidas

(a) $\displaystyle\int 4x^3 + 8x - 3\,dx$

(b) $\displaystyle\int 2e^u + \frac{6}{u} + 2\,du$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2} + x \cdot \sqrt{x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int 3\cos(x) - \frac{1}{x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{2y} - \frac{2}{y^2} + \frac{3}{\sqrt{y}}\,dy$

(g) $\displaystyle\int 4\cos(5x)\,dx$

(h) $\displaystyle\int x^5\,dx$

(i) $\displaystyle\int x + \sqrt{x}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2\,dx$

(m) $\displaystyle\int 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

(o) $\displaystyle\int sen(7x)\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int (x+1)(3x-2)\,dx$

(r) $\displaystyle\int (t^2 + sec^2(t))\,dt$

(s) $\displaystyle\int tg^2(y) + 1\,dx$

7.2 Métodos de Integración

7.2.1 Integración por Sustitución

El método de integración por sustitución o cambio de variable es la regla de la cadena en forma integral.

Teorema 7.7 *Sean f y g funciones que satisfacen las condiciones del Teorema Regla de la Cadena para la función compuesta $y = f(g(x))$. Si F es una primitiva de f entonces*

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Si $u = g(x)$ entonces $du = g'(x)dx$ y $\displaystyle\int f(u)\, du = F(u) + C$ (Cambio de Variable).

El teorema anterior nos dice que la técnica de integración por sustitución la variable u se sustituye por una función de x y la integral original se transforma en una más simple en la cual la variable de integración es u. Veamos los siguiente ejemplos.

Ejemplo 7.8 *Calcular* $\displaystyle\int 2x(x^2+4)^3\, dx$

Solución. Observamos el integrando e identificamos $u = g(x) = x^2+4$, luego $du = 2xdx$, reemplazando tenemos

$$\int 2x(x^2+4)^3\, dx = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2+4)^4}{4} + C$$

□

Ejemplo 7.9 *Calcular* $\displaystyle\int sen(5x)\, dx$

Solución. Sea $u = 5x$, luego $du = 5dx$ despejando $dx = \frac{du}{5}$ y reemplazando,

$$\int sen(5x)\, dx = \int sen(u)\, \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int sen(u)\, du = -\frac{1}{5}cos(u) + C = -\frac{1}{5}cos(5x) + C$$

□

Ejemplo 7.10 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{sec^2(x)}{\sqrt{tg(x)}}\, dx$

Solución. Hacemos el cambio de variable $u = tg(x)$, luego $du = sec^2(x)dx,$ integramos

$$\int \frac{sec^2(x)}{\sqrt{tg(x)}}\, dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}}\, du = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2tg(x)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{tg(x)} + C$$

□

Ejemplo 7.11 *Cuando una persona comienza por primera vez a estudiar un tema, quizás no sea muy hábil, pero con el tiempo se aproximará a los límites de su habilidad. Sea T el tiempo necesario (en días) para que una persona aprenda una cantidad L de temas. Se sabe que la razón de cambio del tiempo respecto a la cantidad de temas es*

$$\frac{dT}{dL} = a\sqrt{L+b} + \frac{a\,L}{2\sqrt{L+b}}$$

donde a y b son constantes positivas. Si para aprender tres temas se necesita un tiempo de $3a\sqrt{3+b}+1$ días, ¿cuántos días se necesitan para aprender 4 temas?

Solución. Usamos propiedades de la integral indefinida y con la sustitución $u = L + b$, obtenemos que $du = dL$ y

$$\begin{aligned}
T(L) = & \int a\sqrt{L+b} + \frac{a\,L}{2\sqrt{L+b}}\,dL \\
= & \; a\int \sqrt{L+b}\,dL \; + \frac{a}{2}\int \frac{L}{\sqrt{L+b}}\,dL \\
= & \; a\int \sqrt{u}\,du \; + \frac{a}{2}\int \frac{u-b}{\sqrt{u}}\,dL \\
= & \; a\int u^{1/2}\,du \; + \frac{a}{2}\int u^{1/2} - bu^{-1/2}\,dL
\end{aligned}$$

Integrando y volviendo a la variable L, tenemos

$$T(L) = \frac{2}{3}a(L+b)^{3/2} + \frac{1}{3}a(L+b)^{3/2} - b(L+b)^{1/2} + C\,.$$

Reduciendo términos y factorizando se sigue que $T(L) = a\,L\sqrt{L+b} + C$. Como $T(3) = 3a\sqrt{3+b}+1 = 3\,a\sqrt{3+b} + C$, de esto se tiene que $C = 1$ y la función T es

$$T(L) = a\,L\sqrt{L+b} + 1$$

Para aprender 4 temas se necesitan $T(4) = 4\,a\sqrt{4+b} + 1$ días.

$\square$

7.2.2 Integración por Partes

Teorema 7.12 *Si u y v son funciones de x, esto es, $u = u(x)$ y $v = v(x)$, con derivadas continuas entonces*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ejemplo 7.13 *Calcular* $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$

Solución. Debemos elegir en el integrando los términos u y dv. Tomando $dv = e^x\,dx$ tenemos que $v = \displaystyle\int dv = \int e^x\,dx = e^x$. Si $u = x$ entonces $du = dx$ y aplicando el teorema de integración por partes

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C$$

□

Ejemplo 7.14 *Calcular* $\displaystyle\int x\,ln(x)\,dx$

Solución. Elegimos por $dv = x\,dx$ y por $u = ln(x)$. En este caso, $v = \dfrac{x^2}{2}$ y $du = \dfrac{1}{x}dx$. Aplicando el teorema de integración por partes tenemos

$$\int x\,ln(x)\,dx = ln(x)\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = ln(x)\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = ln(x)\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

□

Ejemplo 7.15 *Suponga que el tamaño de una población, denominado $N(t)$, cumple la ecuación*

$$\frac{dN}{dt} = e^{0.1t}\left(2 + \frac{t}{35}\right)$$

para $t \geqslant 0$. Determine $N(t)$ si $N(0) = 10$.

Solución. Tenemos que

$$N(t) = \int e^{0.1t}\left(2 + \frac{t}{35}\right)\,dt = \int e^{0.1t}\left(2 + \frac{t}{35}\right)\,dt$$

Para integrar por partes, elegimos $u = \left(2 + \frac{t}{35}\right)$ y $dv = e^{0.1t}$. Derivando e integrando, tenemos $du = \dfrac{1}{35}$ y $v = \dfrac{e^{0.1t}}{0.1}$. Se obtiene

$$N(t) = \left(2 + \frac{t}{35}\right)\,\frac{e^{0.1t}}{0.1} - \frac{1}{3.5}\int e^{0.1t}\,dt = \left(2 + \frac{t}{35}\right)\,\frac{e^{0.1t}}{0.1} - \frac{1}{0.35}e^{0.1t} + C\,.$$

Como $N(0) = 10$ se sigue que $\dfrac{2}{0.1} - \dfrac{1}{0.35} + C = 10$, de esto $C \approx -7.14$. Luego la función pedida es

$$N(t) = \left(2 + \frac{t}{35}\right)\frac{e^{0.1t}}{0.1} - \frac{1}{0.35}e^{0.1t} - 7.14\,.$$

$\square$

7.2.3 Ejercicios Propuestos

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas por el método de sustitución:

(a) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int 3\sqrt{3x+1}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^3\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^5}{3x^6+1}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$

(g) $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^2}{3x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{ln(x)}{x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int tg(x)\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{sen(x)}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{sen(2x)}{1+cos(2x)}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,dx$

(o) $\displaystyle\int (e^x+1)^2\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{3x}+4}$

(t) $\displaystyle\int x(x^2+1)^5\,dx$

(u) $\displaystyle\int 3t^2\sqrt{t^3-2}\,dt$

(v) $\displaystyle\int xsen(x^2)\,dx$

(w) $\displaystyle\int \frac{6x}{(1+x^2)^3}\,dx$

(x) $\displaystyle\int u^3\cdot\sqrt{u^4+2}\,du$

(y) $\displaystyle\int (1+\frac{1}{t})^3\cdot\frac{1}{t^2}\,dt$

(z) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,dx$

2. Calcular las siguientes integrales indefinidas por el método de integración por partes:

(a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(b) $\displaystyle\int xln(x)\,dx$

(c) $\int ln(x)\,dx$

(d) $\int x sen(x)\,dx$

(e) $\int x^n ln(x)\,dx$

(f) $\int x cos^2(x)\,dx$

(g) $\int sec^3(x)\,dx$

(h) $\int e^x cos(2x)\,dx$

(i) $\int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

(j) $\int x^2 sen(x)\,dx$

(k) $\int u\,ln(u+1)\,du$

(l) $\int \dfrac{x}{e^x}\,dx$

(m) $\int x sec^2(x)\,dx$

(n) $\int 4u\,sec(u)\,tg(u)\,dt$

(o) $\int e^{2x} sen(x)\,dx$

(p) $\int \dfrac{ln(2u)}{u^2}\,du$

(q) $\int 1 + \dfrac{te^{2t}}{(2t+1)^2}\,dt$

(r) $\int \dfrac{x}{\sqrt{2+3x}}\,dx$

(s) $\int \dfrac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$

(t) $\int x^2 cos(x)\,dx$

3. Usando integración por sustitución e identidades trigonométricas apropiadas, calcular las siguientes integrales:

(a) $\int sen^5(x)\,cos(x)\,dx$

(b) $\int sec^4(x)\,tg(x)\,dx$

(c) $\int sen^3(x)\,cos^4(x)\,dx$

(d) $\int sec^4(2x)\,dx$

(e) $\int sen^2(x)\,cos^5(x)\,dx$

(f) $\int tg^3(1-u)\,du$

(g) $\int cos^3(\dfrac{x}{2})\,dx$

(h) $\int tg^5(\dfrac{x}{4})\,dx$

(i) $\int \dfrac{sen^3(4x)}{\sqrt{cos(4x)}}\,dx$

(j) $\int sec^2(\dfrac{\pi x}{2})\,tg^3(\dfrac{\pi x}{2})\,dx$

(k) $\int sen^2(\pi x) cos^4(\pi x)\,dx$

(l) $\int sec^2(3x)\,tg^2(3x)\,dx$

(m) $\int \dfrac{cos^3(x)}{sen^4(x)}\,dx$

(n) $\int \dfrac{1}{sec(x)\,tg(x)}\,dx$

(o) $\int \dfrac{sen^2(x) - cos^2(x)}{cos(x)}\,dx$

(p) $\int sec^2(u)\,\sqrt{tg(u)}\,du$

(q) $\int cos^7(x)\,dx$

(r) $\int tg^4(t) - sec^4(t)\,dt$

(s) $\int cos^3(x)\,\sqrt{sen^5(x)}\,dx$

(t) $\int cosec^4(x)\,dx$

4. Se ha determinado que el flujo sanguíneo de una arteria a un vaso capilar pequeño está dado por una función F que depende del diámetro del vaso capilar D, de la presión de la arteria A, de la presión del vaso capilar E. Si el cambio del flujo F respecto a la presión E es

$$\frac{dF}{dE} = -\frac{kD^2}{\sqrt{A-E}}$$

donde k es una constante positiva. Hallar la función $F(E)$.

Si el cambio del flujo F respecto a la presión de la arteria A es

$$\frac{dF}{dA} = \frac{kD^2}{\sqrt{A-E}}$$

Hallar la función $F(A)$.

5. El coeficiente de dilatación térmica de una pequeña pieza para implantes se define como

$$\sigma = \frac{L'(T)}{L(T)}$$

donde $L(T)$ es la longitud del objeto cuando la temperatura es T. A partir de la definición de σ, encuentre una expresión de $L(T)$ que no dependa de $L'(T)$.

6. Se proyecta que dentro de t años, la población de cierta comunidad estará creciendo a razón de $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{6}{(t+1)^2}$ por año. Si después de un año la población es de 17 mil personas, hallar la proyección de población cuando pase una cantidad muy grande de años.

7. Un estudio ambiental indica que dentro de t años el nivel de monóxido de carbono Q cambiará a razón de $0.1t + 0.1$ partículas/millón por año. Si ahora $(t = 0)$ hay 3.4 partículas por millón, hallar la función $Q(t)$.

8. Una enfermedad se propaga en el tiempo a razón de $\dfrac{dN}{dt} = 4t^2(6-t)\,,\ 0 \leqslant t \leqslant 8\,,$ personas por día. Si cuando comienza la enfermedad hay 5 enfermos, encuentre la función $N(t)$ y describala usando la información del problema.

9. Suponga que la concentración $c(t)$ de un fármaco en la corriente sanguínea en el instante t satisface la igualdad

$$\frac{dc}{dt} = -0.1e^{-0.3t}$$

para $t \geqslant 0$. Si se sabe que $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = 0$, hallar la concentración $c(t)$.

10. Suponga que la longitud de cierto organismo a la edad x está dada por $L(x)$, que satisface
$$\frac{dL}{dx} = e^{-0.1x}$$
para $x \geqslant 0$. Calcule $L(x)$ si $\lim_{x\to+\infty} L(x) = 25$.

11. Suponga que la velocidad de crecimiento de una población en el instante t sufre variaciones estacionales en su tamaño de acuerdo con la ecuación
$$\frac{dN}{dt} = 3\, sen(2\pi t)$$
donde t se mide en años e indica el tamaño de la población en el instante t. Si $N(0) = 10$ (en unidades de miles), calcule una expresión de $N(t)$. ¿Cómo se reflejan las variaciones estacionales de la velocidad de crecimiento en el tamaño de la población?

12. Suponga que la cantidad de agua que contiene una planta en el instante t se denomina $V(t)$. Debido a la evaporación $V(t)$ cambia con el tiempo. Suponga que el cambio de volumen en el instante t, medido en un periodo de 24 horas, es proporcional a $t(24-t)$ medido en gramos por hora. Para compensar la pérdida de agua, se riega la planta a una velocidad constante de 4 gramos de agua por hora.

    (a) Explique por qué
    $$\frac{dV}{dt} = -a\,t\,(24-t) + 4$$
    con $0 \leqslant t \leqslant 24$, para alguna constante positiva a, describe esta situación.

    (b) Determine $V(t)$ si $V(0) = 2$.

13. El ritmo aeróbico de una persona de x años es una función $A(x)$. Se sabe que este ritmo aeróbico cambia a razón de $\frac{dA}{dx} = 110\,\frac{3-ln(x)}{x^2}$, para $x \geqslant 2$. Hallar la función $A(x)$.

Bibliografía

[1] L. Hoffmann, G. Bradley. *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*. Editorial M. Graw Hill.

[2] J. Kitchen. *Cálculo en una Variable.* Editorial Addison Wesley.

[3] Larson, Hostetler. *Cálculo con Geometría Analítica.* Editorial M. Graw Hill.

[4] E. Lima. *Análisis Real*. Colección Textos del IMCA.

[5] C. Neuhauser. *Matemáticas para Ciencias*. Editorial Pearson.

[6] C. Pita. *Cálculo de una Variable.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.

[7] J. Stewart. *Cálculo en una Variable.* Editorial Brooks–Cole Publishing.

[8] M. Spivak. *Calculus.* Editorial Reverté.

[9] Ian Stewart. *El segundo secreto de la vida*. Editorial crítica.

[10] E. Swokowski. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*